This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

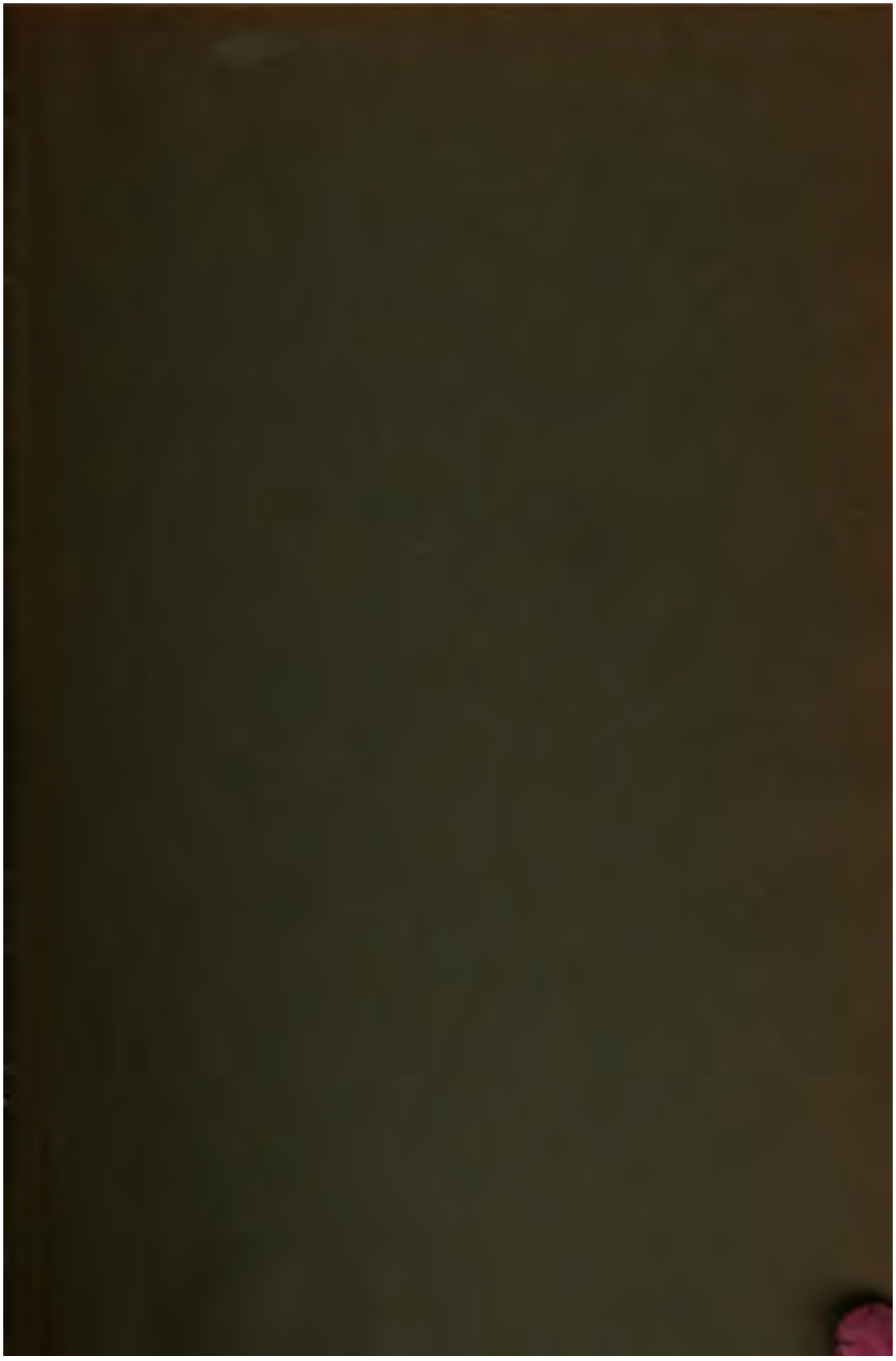
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

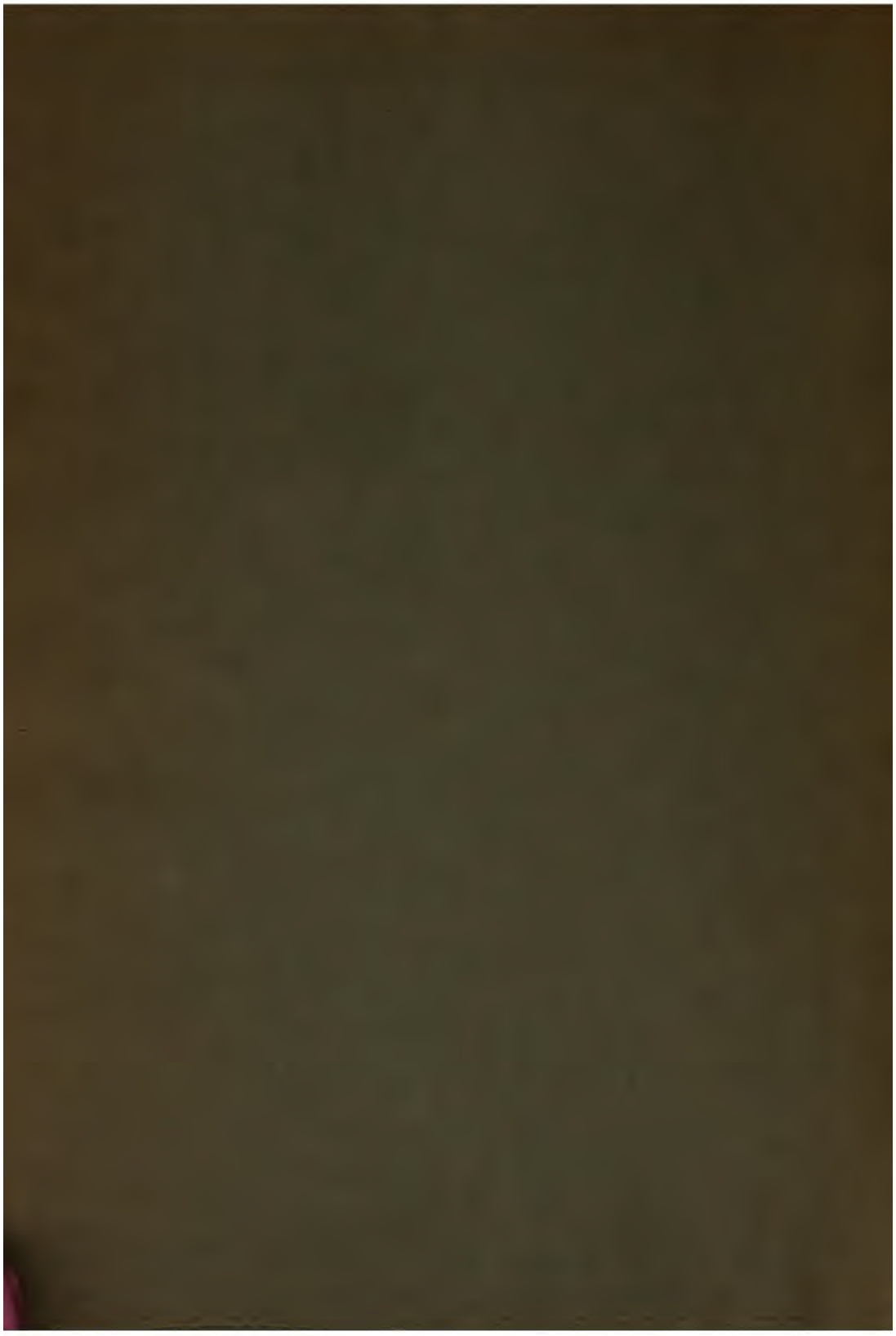
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Library
of the
University of Wisconsin





Elastizität und Festigkeit.

Die für die

Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage.

Von

Dr.-Ing. C. Bach,
K. Württ. Baudirektor,
Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 20 Tafeln in Lichtdruck.

Fünfte, vermehrte Auflage.

Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1905.

Der Verfasser behält sich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen vor.

Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.

116273
MAR 10 1908
SDH
B12
3
6117140

Vorwort zur ersten Auflage.

Die vorliegende Arbeit, welche in zwei Lieferungen erschienen ist, von denen die erste, bis § 40 reichend, Ende Februar und die zweite Ende September 1889 abgeschlossen wurde, war — in beschränkterem Umfange und mit Hinweglassung dessen, was sonst anderwärts zusammengestellt zu finden ist — ursprünglich nur für die Zuhörer meines Vortrags über Elastizitätslehre bestimmt, mit dem Ziele, ihnen die erfahrungsmäßigen Grundlagen der technischen Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu bieten, ohne hierzu die für die Vorlesung verfügbare Zeit (3 Stunden im Sommersemester), welche mit Rücksicht auf die Behandlung der schwierigen Aufgaben dieses Gebiets an und für sich knapp bemessen erscheint, in Anspruch nehmen zu müssen. Wiederholten Anregungen schließlich Folge leistend, übergebe ich dieselbe mit den hierdurch bedingten Erweiterungen der Öffentlichkeit.

Sie geht davon aus, daß es in erster Linie auf die Erkenntnis des tatsächlichen Verhaltens der Materialien ankommt.

In Gemäßheit dieses Standpunktes war zunächst der unanschauliche Begriff des Elastizitätsmoduls fallen zu lassen. Selbst wenn man von der verbreiteten und angesichts des wirklichen Verhaltens der Stoffe höchst bedenklichen Begriffsbestimmung absieht, nach der unter Elastizitätsmodul diejenige Kraft zu verstehen ist, welche ein Prisma vom Querschnitte 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, falls dies ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze möglich wäre, so erweist sich der Umstand, daß der als Maß der Elastizität für die Betrachtungen und Rechnungen geschaffene Elastizitätsmodul umgekehrt proportional der Elastizität ist, als außerordentlich störend. Durch Einführung des Dehnungskoeffizienten (§ 2), dessen Größe in geradem Ver-

hältnisse zur Formänderung steht, läßt sich dieser Übelstand auf einfache Weise beseitigen. Demgemäß sind sämtliche Rechnungen und Erörterungen mittels des Dehnungskoeffizienten durchgeführt. Die Gewinnung von Maßen für den Dehnungsrest und für die Federung, d. i. die eigentliche Elastizität zum Unterschied von dem Maße für die Gesamtdehnung, ist damit ohne weiteres gesichert.

An die Stelle des der Anschauung unzugänglichen Schubelastizitätsmoduls tritt der Schubkoeffizient (§ 29), dessen Bedeutung unmittelbar aus dem Vorgange der Schiebung folgt.

Sodann war der mit der Längsdehnung (Zusammendrückung) verknüpften Querzusammenziehung (Querdehnung) (§ 1) und deren Einfluß (§ 7, § 9, Ziff. 1, § 14, § 20, Ziff. 2, S. 82 u. s. w.) mehr Beachtung zu schenken, als dies sonst zu geschehen pflegt; zumal in weiten Kreisen z. Z. noch die Auffassung besteht, daß die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen innerhalb gewisser Spannungsgrenzen allgemein gültig sei, gleichgültig, ob außer der Zug- oder Druckkraft, welche in Richtung der Stabachse wirkt, auch noch Kräfte senkrecht zu letzterer tätig sind oder nicht.

Ferner mußten aus der meist ganz unbeachtet gelassenen Tatsache, daß die eben erwähnte Proportionalität überhaupt nicht für alle der Technik wichtigen Materialien vorhanden ist, die nötigen Folgerungen gezogen werden. Dies trifft beispielsweise zu für das dem Maschinenbau unentbehrliche und daselbst so vielfach verwendete Gußeisen, bei dem die Dehnungen rascher wachsen als die Spannungen; für das als Kraftübertragungsmittel so wichtige Leder, bei welchem das Umgekehrte stattfindet u. s. f. (insbesondere § 2, § 20, Ziff. 4, S. 85 u. f., § 22, Ziff. 2, § 26, S. 113, Fußbemerkung 1, § 35 und § 36, § 40, § 41, § 56, S. 324 u. f., § 58, S. 344, Fußbemerkung, u. s. w.).

Was Einzelheiten anlangt, so glaubte ich Wert legen zu sollen auf die Klarstellung von Begriffen wie Festigkeit (§ 3), Proportionalitäts- und Elastizitätsgrenze (§ 2, § 4), Knickbelastung (§ 23), Zerknickungskoeffizient (§ 26), zulässige Anstrengung (§ 48, Ziff. 1), Einspannung (§ 53) u. s. w. sowie auf die Beseitigung von eingebürgerten Irrtümern. Wie oft wird beispielsweise die Berechnung auf Schub vorgeschrieben, wo Biegung maßgebend ist (§ 40, § 52); wie allgemein ist bei Ermittlung des

Dehnungskoeffizienten (Elastizitätsmoduls) aus Biegungsversuchen der Einfluß der Schubkraft vernachlässigt worden (§ 22, Ziff. 1, § 52, Ziff. 2b); wie verbreitet ist die Auffassung der unbedingten Gültigkeit der Gleichung der einfachen Zug- und Druckfestigkeit, nach welcher es nur auf die Größe des Querschnittes ankommt (§ 9, § 13, § 14); wie selten wird erkannt, daß die Druckfestigkeit bei Materialien wie weichem Stahl u. s. w., die Fließ- oder Quetschgrenze ist (§ 11, Schluß; § 27, Ziff. 1, S. 122 u. s. f.).

Die bedeutende Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform war so weit festzustellen, daß sie rechnungsmäßig berücksichtigt werden kann (§ 20, § 22, Ziff. 2).

Das immer dringender gewordene Bedürfnis, die Anstrengung auf Drehung beanspruchter Körper von nichtkreisförmigem Querschnitt mit mehr Sicherheit feststellen zu können, als dies bisher möglich war, verlangte eine eingehende Behandlung der hierher gehörigen Aufgaben (§ 32 bis § 36, § 43, § 47, § 49, § 50, § 52, Fußbemerkung S. 281 und 282). Dabei ergab sich die Notwendigkeit, Formänderungen ins Auge zu fassen, die bisher bei Beurteilung der Materialanstrengung ganz unbeachtet gelassen worden waren (§ 34, Ziff. 3).

Dem Umstande, daß die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung ziemlich häufig nicht in dem Verhältnisse steht, wie dies die Elastizitätslehre ermittelte (Gleichung 101, 102 [§ 31, Gleichung 5 und 6]), habe ich — wie bereits in meinen Maschinenelementen 1880 getan (S. 11, S. 205 u. f. daselbst) — durch Einführung des Anstrengungsverhältnisses Rechnung getragen (α_0 in § 48, Ziff. 2, auch β_0 in § 45, Ziff. 1).

Die Außerachtlassung der schon ursprünglich vorhandenen Krümmung der Mittellinie bei auf Biegung beanspruchten Körpern erschien nicht mehr in dem Maße zulässig, wie dies bisher bei Berechnung von Kettenhaken und dergleichen ziemlich allgemein üblich war. Wenn auch die Endergebnisse der mit Rücksicht hierauf in § 54 angestellten Erörterungen nichts Neues bieten, so dürfte doch der hierbei eingeschlagene Weg zur Gewinnung eines besseren Einblicks in die Anstrengungsverhältnisse, sowie dazu beitragen, daß mancher, welcher bisher die ursprüngliche Krümmung nicht berücksichtigte, sie mindestens schätzungsweise bei Wahl der zulässigen Anstrengung in Betracht zieht.

In § 60 war die Anstrengung der elliptischen Platte zu bestimmen; außerdem waren bisher nicht beachtete Einflüsse festzustellen. Weitergehende Ermittlungen mußten namentlich bei den großen Schwierigkeiten, welche hierauf bezüglichen Versuchen begegnen, zunächst unterbleiben.

Gern hätte ich Versuche der in § 56 behandelten Art in größerem Umfange sowie auch solche zu § 57 durchgeführt. Da mir aber weder für meine Lehrtätigkeit noch für meine Versuchsarbeiten ein Assistent zur Verfügung steht, und der eigenen Arbeitskraft durch die Natur eine Grenze gezogen ist, auch die übrigen Mittel sehr knapp bemessen sind, so mußte wenigstens vorerst Beschränkung geübt werden. Dieselbe Bemerkung hat auch Geltung für andere Abschnitte, insbesondere für § 61.

Im ganzen habe ich mich namentlich im Hinblick auf die Bedürfnisse der mitten in der Ausführung stehenden Ingenieure bestrebt, die einzelnen Entwicklungen so viel als tunlich für sich allein verständlich durchzuführen und den hierzu erforderlichen mathematischen Apparat unter Heranziehung von Versuchen nach Möglichkeit zu beschränken. Daß sich auf diesem Wege Aufgaben, welche sonst trotz ihrer großen Wichtigkeit gar nicht oder nur ganz ausnahmsweise behandelt zu werden pflegen, recht klar und dazu fruchtbringender, als es bisher geschehen ist, erörtern lassen, davon dürften beispielsweise die §§ 33, 34 und 43, S. 220 u. f., sowie § 52, Ziff. 2, Zeugnis ablegen. Die Tatsache, daß die vor vier Jahrzehnten von de Saint Venant gegebene Lösung der Torsionsaufgabe — ungeachtet ihrer wissenschaftlichen Strenge — nur ganz vereinzelt Eingang in die technische Literatur gefunden hat, dürfte vorzugsweise in dem Mangel an verhältnismäßiger Einfachheit der zur Lösung führenden Rechnungen begründet sein.

Um den Umfang des Buches innerhalb einer gewissen Grenze zu halten, wurde die zweite Lieferung etwas weniger umfassend gestaltet, als ursprünglich geplant war, wodurch übrigens die Anschauung über die wirklichen Vorgänge, über das tatsächliche Verhalten des Materials eine Beeinträchtigung nicht erfährt. Es erschien dies um so mehr zulässig, als seit Abschluß der ersten Lieferung das v. Tetmajersche Werk: „Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre“ mit einer Fülle von Beobachtungsmaterial zur Ausgabe gelangt ist (siehe auch des Verfassers

Besprechung dieses Buches in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 452—455 und S. 473—479) und überdies die wertvollen Arbeiten von Mehrtens vorliegen. Beispiele und Erfahrungszahlen glaubte ich ohnehin als naturgemäß in meine Maschinenelemente gehörig dahin verweisen zu sollen.

Möge auch diese Arbeit, welche nicht mehr als ein Schritt in neuer Richtung sein soll, zur Förderung der Technik und damit der Industrie beitragen, indem sie die Bedeutung der Erkenntnis des tatsächlichen Verhaltens der Materialien klarlegt, und indem aus ihr erhellt,

daß es nicht genügt, von dem Satze der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen allein ausgehend, das ganze Gebäude der Elastizität und Festigkeit auf mathematischer Grundlage aufzubauen,

daß es vielmehr für den Konstrukteur — namentlich wenn er in voller Erkenntnis der wirklichen Verhältnisse die Abmessungen festsetzen und sich nicht in dem Geleise hergebrachter Formen halten will — notwendig erscheint, immer und immer wieder die Voraussetzungen der einzelnen Gleichungen, welche er benützt, im Spiegel der Erfahrungen, soweit solche vorliegen, sich zu vergegenwärtigen, und die auf dem Wege der Überlegung, der mathematischen Ableitung gewonnenen Beziehungen hinsichtlich des Grades ihrer Genauigkeit zu beurteilen, soweit dies bei dem jeweiligen Stande unserer Erkenntnisse überhaupt möglich ist,

und daß da, wo die letzteren und die Überlegung — Aufsuchung und Ausbildung neuer Methoden eingeschlossen — nicht ausreichen, in erster Linie durch den Versuch Fragestellung an die Natur zu erfolgen hat.

Stuttgart, den 30. September 1889.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten — abgesehen von der Umarbeitung des Abschnittes über die plattenförmigen Körper — in der Hauptsache durch Ergänzungen, entsprechend einer Vermehrung des Textes um 56 Seiten. Beschränkung in dieser Hinsicht zu üben, erschien schon deshalb angezeigt, um dem Buche das Eindringen in weitere Kreise zu sichern, wozu gehört, daß der Preis desselben eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Hierin lag auch der Grund, der veranlaßte, davon abzusehen, die ursprüngliche Idee, eine Anzahl von Aufgaben nebst Lösungen aufzunehmen, zur Ausführung zu bringen.

Die Grundgedanken, welche bei Abfassung der ersten Auflage maßgebend waren, sind die leitenden geblieben, weshalb ich in dieser Beziehung nichts hinzuzufügen habe. Daß die Ersetzung des Elastizitätsmoduls durch den Dehnungskoeffizienten nicht ohne Bemängelung abgehen würde, war vorauszusehen. Demgegenüber kann ich nur auf die Arbeit selbst, insbesondere auf die Fußbemerkung zu § 2, verweisen, welche durch Übernahme einer bereits in der zweiten Auflage meiner Maschinenelemente gegebenen Darlegung ergänzt worden ist. Im Laufe der Zeit wird sich von selbst entscheiden, ob die Begriffe „Elastizitätsmodul“ und „Schubelastizitätsmodul“ das Feld behaupten, oder ob die Begriffe „Dehnungskoeffizient“ und „Schubkoeffizient“ an deren Stelle treten werden.

Im ganzen hat sich die Arbeit einer so wohlwollenden Aufnahme seitens der Fachgenossen zu erfreuen gehabt, daß ich nicht umhin kann, für die außerordentliche Förderung, welche hierin liegt, zu danken. Die Arbeitskraft des einzelnen ist eine begrenzte und das Arbeitsfeld des Maschineningenieurwesens ein so ausgedehntes, daß der einzelne selbst nur einen kleinen Beitrag durch das in seinen Arbeiten enthaltene Neue zu leisten vermag, infolgedessen dieses der entschiedenen Förderung durch die Fachgenossen bedarf, soll der Fortschritt ein allgemeiner und damit ein erheblicher werden.

Stuttgart, den 1. Juni 1894.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage ist, abgesehen von einer Anzahl rechnerischer Ergänzungen, vorzugsweise durch Aufnahme von Versuchsergebnissen und den hierzu gehörigen Darlegungen in Zahl, Wort und Bild ergänzt worden. Ich halte es für zweckmäßig, den Leser geistig teilnehmen zu lassen an den wesentlichen Einzelheiten des Versuchs und ihn auf diese Weise zu befähigen, sich nach Möglichkeit ein eigenes, auf die tatsächlichen Verhältnisse gegründetes Urteil zu bilden. Dem jungen Fachgenossen kommt dabei von Anfang an zum Bewußtsein, daß es sich nicht um ein Gebiet handelt, das zu einem großen Teil bereits abgeschlossen ist, wie man vielfach anzunehmen pflegt, sondern daß er sich auf einem Gebiet befindet, welches selbst hinsichtlich der Feststellung seiner erfahrungsmäßigen Grundlagen noch in lebhafter Entwicklung begriffen ist.

In dieser Richtung weiterzuschreiten, dazu veranlaßte nicht bloß der leitende Grundgedanke des ganzen Buches (vergl. Vorwort zur ersten Auflage) sondern auch der Umstand, daß in mathematischer Hinsicht ausführliche und vorzügliche Werke vorliegen: die Arbeiten von Grashof, Keck, Müller-Breslau, Ritter, Weyrauch, Winkler u. a.

Eine vorurteilsfreie Überprüfung des Standes der Elastizitäts- und Festigkeitslehre zeigt, daß die physikalische Seite gegenüber der mathematischen Behandlung in gewissen Richtungen recht erheblich zurückgeblieben war. Damit hängt es dann auch teilweise zusammen, daß mancher der an und für sich richtigen, aber nicht auf ausreichend sicherer physikalischer Grundlage ruhenden mathematischen Entwicklungen der Vorwurf des Zuweitgehens oder gar der Unbrauchbarkeit gemacht werden konnte. Andererseits ließ man bei der mathematischen Bearbeitung Aufgaben von großer

praktischer Bedeutung so gut wie unbeachtet, oder man sah bei ihrer Einkleidung in das mathematische Gewand von Wesentlichem ab, ließ wohl auch im Laufe der Rechnung mehr oder minder weitgehende Vernachlässigungen eintreten, ohne dann die Ergebnisse durch den Versuch einer Prüfung und nötigenfalls einer Berichtigung zu unterziehen.

Auf diesem Boden gedieh der Satz von dem Widerspruch zwischen Wissenschaft und Praxis. Man übersah dabei allerdings, daß eine Wissenschaft, die im Widerspruch steht mit der Wirklichkeit, d. h. mit dem, was tatsächlich ist, oder deren Folgerungen zu solchen Widersprüchen führen, nicht den Anspruch machen kann, wirklich Wissenschaft zu sein, mindestens nicht in Beziehung auf diejenigen Punkte, welche der Wirklichkeit zuwiderlaufen. Wo ein Gegensatz zwischen Wissenschaft und Praxis in die Erscheinung tritt, da zeigt eine scharfe Untersuchung meist sehr bald, daß entweder die Annahmen, die Grundlagen, von denen die wissenschaftliche Betrachtung ausgegangen ist, fehlerhaft waren, oder daß die Schlußfolgerungen mit Mängeln behaftet sind.

Ich habe es mir von vornherein, d. h. mit Eintritt in die Lehrtätigkeit im Jahre 1878, zur Aufgabe gestellt, mein bescheidenes Teil dazu beizutragen, daß solche Gegensätze verschwinden[1]). Wissenschaft und ausführende Technik müssen naturgemäß Hand in Hand gehen. Wo dieser Zustand nicht besteht, da muß von beiden Seiten mit Eifer und Ausdauer daran gearbeitet werden, ihn herbeizuführen. Wer in dieser Richtung kräftig strebt, wird sehr bald zu der Erkenntnis gelangen, daß den Ingenieurwissenschaften in erster Linie eine Sicherung und Erweiterung ihrer erfahrungsmäßigen Grundlagen, d. h. eine besondere Pflege ihrer physikalischen und chemischen Seite, nottut. Die Mathematik wird hierbei nicht nur ein sehr oft außerordentlich wertvolles Hilfsmittel sein, sondern sie wird häufig das Werkzeug bilden, ohne dessen Vorhandensein eine tiefere Erkenntnis überhaupt unerreichbar bliebe.

Die ausführende Technik ist nach meinen Erfahrungen immer dankbar, wenn ihr die Wissenschaft Hilfe leistet; sie läßt sich nicht — wie wohl zuweilen gemeint wird — durch das Schlag-

---

[1]) Vergl. z. B. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1894, S. 1361 und 1362; 1895, S. 1215 und 1216; 1896, S. 268 und 269; 1899, S. 1571.

wort von dem Widerspruch zwischen Theorie und Praxis abhalten, die wissenschaftlichen Darlegungen zu studieren und zu verwerten, vorausgesetzt, daß diese die Anforderung der Klarheit und genügender Einfachheit befriedigen. Sie weiß ihr Interesse, welches die volle Beachtung der Wissenschaft verlangt, wohl wahrzunehmen. Aber sehr empfindlich ist sie, wenn ihr von wissenschaftlicher Seite Darlegungen geboten werden, durch deren Befolgung Schaden entsteht. Bei der unmittelbaren und oft recht weitgehenden Verantwortlichkeit, welche die ausführende Technik zu tragen hat, erscheint dies durchaus begreiflich. Jeder Verstoß, den der Ingenieur gegen die Wirklichkeit begeht, pflegt bei der Ausführung seines Werkes als Fehler an das Tageslicht zu treten und in irgend einer Form Strafe nach sich zu ziehen. In der hieraus folgenden Notwendigkeit, möglichst zuverlässig zu arbeiten, liegt auch einer der Gründe, weshalb schon seit längerer Zeit die Technik und ihre wissenschaftlichen Vertreter nicht bloß manche in das Gebiet der Physik und Chemie gehörige Zahl genauer festgestellt haben, als dies von der Physik beziehungsweise der Chemie selbst geschehen ist, sondern daß sie auch manches bisher überhaupt nicht Erkannte aufgefunden sowie manchen ins Dunkle gehüllten Vorgang aufgeklärt und ganz wesentlich zur Entwicklung und Förderung dieser Wissenschaften an sich beigetragen haben. Ein weiterer Grund dafür, daß die Technik der Wissenschaft an sich häufiger vorauseilt, als man anzunehmen pflegt, ist dadurch gegeben, daß ihr Aufgaben entgegengebracht werden, die sie lösen muß — möglichst vollkommen, namentlich auch in wirtschaftlicher Beziehung —, ohne sich auf wissenschaftlich Erkanntes stützen zu können. Die deutsche Industrie und die technischen Staatsbetriebe Deutschlands besitzen eine vergleichsweise große Anzahl von Ingenieuren, die in einer Weise streng wissenschaftlich arbeiten, wie vielfach selbst von Vertretern der Wissenschaft nicht vermutet wird.

Inwieweit es mir mit der Bearbeitung der dritten Auflage gelungen ist, zur Klarstellung schwebender oder aufgeworfener Fragen (vergl. z. B. den Inhalt von § 4 und § 5, ferner S. 116 u. f., S. 192 u. f., S. 211 u. f., S. 470 u. f., u. s. w.), zur Vertiefung unserer Erkenntnisse auf dem Gebiet der Elastizität und Festigkeit beizutragen, muß ich dem wohlwollenden Urteil der Fachgenossen zur Entscheidung anheimstellen. Gern hätte ich noch Weiteres auf-

genommen, aber die starke Inanspruchnahme durch die unmittelbare Berufstätigkeit, zu welcher sich z. Z. noch die Errichtung eines Laboratoriums für Maschineningenieure gesellt hat, im Zusammenhange damit, daß das Buch schon seit längerer Zeit vergriffen ist, nötigten zur Beschränkung.

Stuttgart, Anfang Januar 1898.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage wurde, abgesehen von einer größeren Anzahl von Ergänzungen in allen bisher vorhandenen Abschnitten des Buches (vergl. z. B. § 13, Ziff. 3, § 22, Ziff. 4 u. s. w.), durch Aufnahme eines neuen (achten) Abschnittes: „Allgemeine Beziehungen über Spannungen und Formänderungen im Innern eines elastischen Körpers“ erweitert. Hierzu veranlaßte in erster Linie der Umstand, daß ich seit Erscheinen der dritten Auflage infolge des wachsenden Umfanges der mir sonst obliegenden Verpflichtungen u. a. auch die Vorlesung über Elastizitätslehre abgegeben habe. In diesem Vortrag, der im Jahre 1878 an unserem Polytechnikum mit besonderer Rücksichtnahme auf die dem Maschinenkonstrukteur sich bietenden Aufgaben zur Einführung gelangte, habe ich in den 21 Jahren, während deren ich ihn gehalten, auch das gegeben, was der genannte Abschnitt bietet. Die Aufnahme in das Buch ist bisher unterblieben, weil, wie schon in dem Vorwort zur ersten Auflage ausgesprochen, dasselbe ursprünglich nur für die Zuhörer dieses Vortrages bestimmt war.

Ich weiß recht wohl, daß die Anzahl derjenigen Studierenden und Ingenieure, welche sich mit den allgemeinen Betrachtungen über den Spannungs- sowie Formänderungszustand und insbesondere den aus ihnen sich ergebenden Gleichungen zu beschäftigen pflegen, verhältnismäßig gering ist, und ich bin der Überzeugung, daß dies auch voraussichtlich so bleiben wird, ohne daß hierin ein schwerwiegender Nachteil für die Technik erblickt werden kann.

Es setzt dies allerdings voraus, daß sich eine, wenn auch kleine, Minderzahl erfolgreich mit Bearbeitung des hier zur Erörterung stehenden Gebietes befaßt. Der großen Mehrzahl der mitten in der Ausführung stehenden Ingenieure, welche auf den Gebieten des wirtschaftlichen Lebens leitend oder auch noch schöpferisch tätig sein müssen, liegen andere Aufgaben ob[1]), und bei der Begrenztheit der Arbeitskraft des einzelnen einerseits und angesichts der ungeheuren Ausdehnung des Ingenieurwesens andererseits wird die Arbeitsteilung zur Notwendigkeit.

Diese Verhältnisse haben mich jedoch niemals abgehalten, mit meinen Zuhörern die Betrachtungen durchzunehmen, welche zu den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre führen. Der zukünftige Ingenieur muß — auch wenn er keine Neigung hat, an der Entwicklung der wissenschaftlichen Grundlagen des Ingenieurwesens mitzuarbeiten —, die allgemeinen Grundlagen der Gebiete, die er studiert, ausreichend kennen. Im vorliegenden Sonderfalle heißt dies, daß ihm die allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre, wenn sie ihm in der Literatur entgegentreten, nicht fremd sein dürfen. Er soll — wenn auch nur in beschränktem Sinne — ein Urteil darüber haben, wie sicher oder unsicher die Grundlagen sind, auf denen sich derartige Rechnungen aufbauen, und ob aus der einen oder anderen solcher Rechnungen ein brauchbares Ergebnis für das Ingenieurwesen zu erwarten steht. Es ist für den ausführenden Ingenieur nicht selten außerordentlich wichtig, ein Urteil, wenn auch nur einigermaßen, darüber zu haben, was man überhaupt nicht oder doch nicht sicher weiß, gegebenenfalls nicht sicher ermitteln kann.

Außerdem kommt in Betracht, daß eine strenge Behandlung verschiedener, für die ausführende Technik wichtiger Aufgaben von den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre auszugehen oder doch auf sie zurückzugreifen hat, wenn auch nur, um zu prüfen, ob die gemachten Annahmen mit ihnen in Widerspruch stehen oder nicht. Es sei hier erinnert an die Aufgaben der Drehungselastizität, deren strenge Lösung allerdings bisher nur für wenige der in Betracht kommenden Querschnitte ausreichend gelungen ist, sowie an die Aufgaben, bei denen Normal- und Schub-

[1]) Vergl. z. B. das Vorwort zur achten Auflage der Maschinenelemente des Verfassers.

spannungen in den Querschnitten stabförmiger Körper gleichzeitig auftreten, an die Aufgaben, welche plattenförmige Körper und Gefäße vielfach bieten, u. s. w.

Wenn auch manche Entwicklungen in dem bisherigen Inhalt des Buches (Abschnitt 1 bis 7) auf die Ergebnisse des neuen achten Abschnittes hätten gestützt werden können, so habe ich dies doch absichtlich unterlassen, weil ich es für den Ingenieur als wertvoll erachte, jede Untersuchung für sich so weit selbstständig durchzuführen, als es die Verhältnisse gestatten und als im Einzelfalle zweckmäßig erscheint, und zweitens, weil ich der Überzeugung bin, daß die Elastizität und Festigkeit am erfolgreichsten zunächst in der Weise studiert wird, daß man von den einfachen Fällen ausgeht und unter Benutzung der hierbei gewonnenen Ergebnisse zu zusammengesetzteren fortschreitet. Ich halte dieses Vorgehen auch dann für richtig, wenn der Studierende über gute Kenntnisse auf dem Gebiete der höheren Mathematik verfügt. Die Auffassung, daß der wissenschaftliche Gang bei der Behandlung der Elastizitäts- und Festigkeitslehre auch für den Ingenieur vom Allgemeinen zum Besonderen zu führen habe, vermag ich nicht zu teilen. Derjenige Studierende, welcher beim erstmaligen Studium des Gebietes zunächst die seinem Verständnis näher liegenden Sonderfälle mit den verschiedenen Abweichungen von den Voraussetzungen, welche die Elastizitätslehre bei ihren allgemeinen Entwicklungen notwendigerweise machen muß, gründlich studiert hat und sodann fortschreitend schließlich bis zur Klarheit über die allgemeinen Beziehungen der Elastizitätslehre gelangt ist, wird bei demselben Zeitaufwand in der Regel einen weiter- und tiefergehenden Einblick gewonnen haben als derjenige, welcher den umgekehrten Weg eingeschlagen hat. Insbesondere wird dies zutage treten, wenn es sich um die Verwendung der Kenntnisse auf dem Gebiete des Ingenieurwesens handelt, also um das Können gegenüber den tausendfältigen Aufgaben, die das Leben fortgesetzt bietet.

Stuttgart, Anfang September 1901.

Vorwort zur fünften Auflage.

Die neue Auflage hat verschiedene Ergänzungen erfahren, so z. B. im ersten Abschnitt durch die Klarstellung, daß im allgemeinen eine untere und eine obere Streckgrenze zu unterscheiden ist, und daß diese Spannung in erheblichem Maße von der Querschnittsform beeinflußt wird (§ 2, § 4), ferner durch die Aufnahme von Versuchsergebnissen über die Änderung der Festigkeitseigenschaften von Metallen bei höheren Temperaturen (§ 10) u. s. w. Allerdings konnten die Ergänzungen nicht in dem Umfange stattfinden, wie ich es selbst gewünscht hatte. Das Buch war schon seit einiger Zeit vergriffen und ich sonst recht stark in Anspruch genommen; infolgedessen mußte Beschränkung geübt werden.

Im übrigen darf ich wohl auf das zu den früheren Auflagen Gesagte verweisen; die daselbst niedergelegten Gesichtspunkte sind auch jetzt wieder für mich leitend gewesen.

Die wohlwollende Aufnahme, welche das Buch gefunden hat, im Zusammenhange mit dem Umstande, daß ein großer Teil dessen, was ich in den früheren Auflagen dargelegt habe, bereits Allgemeingut geworden ist oder doch anregend und klarstellend gewirkt hat, läßt mich hoffen, daß auch die neue Auflage zur Förderung der Erkenntnis des tatsächlichen Verhaltens der Materialien beitragen wird.

Meinem früheren Assistenten, Herrn Ingenieur Braun, habe ich für die Unterstützung bei der Arbeit (vergl. z. B. S. 498) bestens zu danken.

Stuttgart, den 15. März 1905.

C. Bach.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen (Dehnungen).

Einleitung.

Seite

§ 1. Formänderung. Spannung 1
§ 2. Dehnung. Dehnungskoeffizient. Proportionalitätsgrenze. Fließgrenze 3
§ 3. Bruchbelastung. Zugfestigkeit. Querschnittsverminderung. Bruchdehnung. Arbeitsvermögen 8
§ 4. Längenänderungen verschiedener Stoffe.
Gesamte, bleibende und federnde Längenänderungen. Elastizitätsgrenze.
1. Versuche mit Gußeisen 13
2. - - Flußeisen 41
3. - - Flußstahl 51
4. - - Kupfer 54
5. - - Bronze 59
6. - - Messing 62
7. - - Leder 64
8. - - Zement, Zementmörtel, Beton 67
9. - - Granit 69
10. - - Marmor 71
11. - - Sandstein 76
§ 5. Gesetz der Längenänderungen u. s. w.
1. Gesetz der Längenänderungen 76
2. Maß der Vollkommenheit und der Größe der Elastizität . . . 79
3. Allgemeineres Gesetz der elastischen Dehnung 81
4. Einfluß der Zeit. Elastische Nachwirkung 88

I. Zug.

Seite

§ 6. Gleichungen der Zugelastizität und Zugfestigkeit.
1. Stab mit gleichem Querschnitt 91
2. Stab mit veränderlichem Querschnitt 91
3. Beispiel der Zugelastizität mit Rücksicht auf den Einfluß der Temperatur 95

§ 7. Maß der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Gehinderte Zusammenziehung 99

§ 8. Zugproben 103
Einrichtungen zum Messen der Längenänderungen (Zug und Druck) 110

§ 9. Einfluß der Form des Stabes 122
1. Einfluß der Stabform, welche der Querschnittsverminderung (Zusammenziehung) hinderlich ist 123
2. Einfluß der Länge und des Durchmessers 129
3. Einfluß der Querschnittsform 136

§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluß der Zeit auf Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung. Einfluß der Temperatur.
1. Einfluß der Zeit 144
2. Einfluß der Temperatur 147

II. Druck.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit 154

§ 12. Gleichungen der Druckelastizität und Druckfestigkeit 158

§ 13. Druckversuche. Einfluß der Gestalt des Körpers auf die Druckfestigkeit 160
1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers . 161
2. Die Belastung trifft unmittelbar nur einen Teil der Querschnittsfläche des Probekörpers 167
3. Die Belastung trifft einen Körper mit gewölbter Oberfläche (Kugel, Zylinder) 172

§ 14. Hinderung der Querdehnung 184

§ 15. Theorien der Druckfestigkeit 186

III. Biegung.

§ 16. Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaares den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet 187

§ 17. Trägheitsmomente 193
1. Rechteck 194
2. Dreieck 194
3. Kreis 195
4. Ellipse 195
5. Zusammengesetzte Querschnitte.
a) Rechnerische Bestimmung 196
b) Zeichnerische Bestimmung 197
6. Zusammenstellung 200

Seite

§ 18. Fälle bestimmter Belastungen.
1. Der Stab ist an dem einen Ende eingespannt, am freien Ende mit P belastet 201
2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen 203
3. Der Stab ist beiderseits wagrecht eingespannt 208

§ 19. Körper von gleichem Widerstande 210
1. Der Stab mit rechteckigem Querschnitt von gleicher Breite ist einerseits eingespannt, am anderen, freien Ende belastet . 211
2. Der Stab wie unter 1, jedoch von konstanter Höhe h 213
3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen und ist zwischen beiden belastet 214

§ 20. Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit. Der durch Biegung in Anspruch genommene Stab auf Grund des Gesetzes $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ 215
1. Die äußeren Kräfte ergeben nur ein Kräftepaar 219
2. Die Fasern üben einen gegenseitigen Einfluß aufeinander nicht aus 220
3. Die Querschnitte bleiben eben 223
4. Der Dehnungskoeffizient ist unveränderlich. Der gebogene Stab auf Grund des Gesetzes $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ 224
5. Zusammenfassung 234

§ 21. Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaares keine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält.
1. Hauptachsen. Hauptträgheitsmomente 236
2. Biegungsanstrengung 238
3. Durchbiegung 241

§ 22. Biegungsversuche.
1. Biegungsversuche im allgemeinen 243
2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform 247
3. Einfluß der Gußhaut 253
4. Versuche zur Klarstellung des Zusammenhanges zwischen Zug- und Biegungsfestigkeit von Gußeisen u. s. w. 254

IV. Knickung.

§ 23. Wesen der Knickung 262
§ 24. Knickbelastung (Eulersche Gleichung) 264
§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung 270
§ 26. Naviersche (Schwarzsche) Knickungsformel 273
§ 27. Knickungsversuche 281

Siebenter Abschnitt.

Plattenförmige Körper.

Seite

§ 60. Ebene kreisförmige Platte (Scheibe).
1. Ermittlung der Anstrengung auf dem Wege der Rechnung . . 567
2. Vergleichung der Voraussetzungen, welche bei den unter Ziff. 1 durchgeführten Rechnungen gemacht worden sind, mit den tatsächlichen Verhältnissen 585
3. Versuchsergebnisse 587
4. Näherungsweg zur Ermittlung der Anstrengung 593

§ 61. Ebene elliptische Platte 598

§ 62. Ebene quadratische Platte 610

§ 63. Ebene rechteckige Platte 614

§ 64. Versuchsergebnisse.
1. Verlauf der Bruchlinie. Sonstiges Verhalten 618
2. Gesetz der Widerstandsfähigkeit 624
3. Schlußbemerkung 625

Achter Abschnitt.

Allgemeine Beziehungen über Spannungen und Formänderungen im Innern eines elastischen Körpers.

§ 65. Spannungen in einem beliebigen Punkte eines festen Körpers.
1. Begriff der Normal- und Tangential- oder Schubspannung . . 626
2. Spannungen in drei zueinander senkrechten Ebenen 627
3. Gleichgewicht der Kräfte an einem unendlich kleinen Parallelepiped 630
4. Gleichgewicht der Kräfte an einem unendlich kleinen Tetraeder 635
5. Geometrische Darstellung der Spannungen 637
6. Hauptspannungen 639

§ 66. Formänderungen in einem beliebigen Punkte eines festen Körpers.
1. Die Dehnungen nach einer beliebigen Richtung als Funktion von den Dehnungen dreier ursprünglich zueinander senkrechter Richtungen und von Änderungen der Winkel dreier ursprünglich sich rechtwinklig schneidender Ebenen 642
2. Darstellung der Formänderung 646
3. Sätze über die Formänderung 648

§ 67. Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen.
1. Die Hauptdehnungen und Hauptspannungen 652
2. Spannungen und Formänderungen für drei beliebige, zueinander senkrecht stehende Richtungen 655
3. Bedeutung der Größe β 656

Seite

§ 68. Allgemeine Aufgabe der Elastizitätslehre und Weg zur Lösung derselben 657

§ 69. Anwendung auf den Sonderfall der Belastung eines geraden stabförmigen Körpers 660

Bedeutung der in den Gleichungen auftretenden Buchstabengrößen 665

Berichtigungen.

S. 108, unterste Zeile der Fußbemerkung lies: „mm“ statt „m“.

S. 175, - - lies: „$\sqrt{\ }$“ statt „$\sqrt[3]{\ }$“.

S. 176, in Gleichung 17 lies: „σ_{max}^2“ statt „σ_{max}^3“.

S. 176, in der letzten Gleichung lies: „π^2“ statt „π^3“.

S. 285, Zeile 3 von oben lies: „Rechnung“ statt „Richtung“.

S. 291, - 5 - - - : „$\frac{CC_1'}{OC}$“ statt „$\frac{\overline{OC_1'}}{\overline{OC}}$“.

S. 320, - 15 - - - : „τ_a'“ statt „τ“.

S. 320, - 16 - - - : „τ_a'“ - „τ_a“.

S. 320, - 3 - unten - : „τ_a'“ - „τ_a“.

S. 324, - 13 - - - : „$b:h$“ statt „$b\,.\,h$“.

S. 338, - 2 - - - : „2,11“ - „2,14“.

S. 418, unterste Zeile lies: „855“ statt „885“.

S. 526, Zeile 10 von unten lies: „368“ - „355“.

S. 532, - 14 - - - : „46800 kg . cm“ statt „46800 kg/cm“.

S. 534, unter Stab 3 lies: „0,137“ statt „0,137 mm“.

S. 556, Zeile 8 von oben lies: „$\frac{m}{1+m}\,k_z$“ statt „$\frac{1+m}{m}\,k_z$“.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

Einleitung.

Seite

§ 28. Schiebung 288
§ 29. Schubspannung. Schubkoeffizient 291
§ 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen 293
§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubkoeffizient und Dehnungskoeffizient.
1. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren größter Wert 296
2. Beziehung zwischen Dehnungskoeffizient und Schubkoeffizient. 298

V. Drehung.

§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt 302
§ 33. Stab von elliptischem Querschnitt.
1. Formänderung 309
2. Schubspannungen 310
§ 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.
1. Formänderung 316
2. Schubspannungen 319
3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung 326
§ 35. Drehungsversuche.
1. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform 328
2. Drehungswinkel 348
3. Versuche mit Rundstäben und mit Schrauben aus Schweiß- und Flußeisen 351
§ 36. Zusammenfassung 353
Kreis, Ellipse, Sechseck, Rechteck, Dreieck, ⊢⊣-Querschnitt, Kreuzquerschnitt, ⊔-Querschnitt, Winkelquerschnitt.

VI. Schub.

§ 37. Allgemeines. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt . . . 357
§ 38. Schubspannungen im rechteckigen Stabe 359
§ 39. Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt 363
§ 40. Schubversuche 372

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung, Drehung oder Schub.

Seite

§ 41. Arbeit der Längenänderung 381
§ 42. Arbeit der Biegung 385
§ 43. Arbeit der Drehung 388
§ 44. Arbeit der Schiebung 395

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen). Zug, Druck und Biegung.

§ 45. Allgemeines. Der Stab ist nur durch Kräfte beansprucht, welche in Richtung seiner Achse wirken.

Allgemeines 397
Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch exzentrisch zu ihr gelegene Kraft P belastet.
1. Die Kraft wirkt ziehend 399
2. Die Kraft wirkt drückend 401
   a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a klein . . . 402
   b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes groß 405
   c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Größe des Hebelarmes so bedeutend, daß eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt 406

§ 46. Einfluß von Kräften, welche in Richtung der Stabachse oder parallel zu ihr wirken, während der Stab durch Querkräfte durchgebogen wird.
1. Einfluß des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte durch P belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung . . . 410
2. Der an den Enden drehbar befestigte und hier durch Zugkräfte gespannte prismatische Stab wird durch die gleichmäßig über ihn verteilte Querkraft $Q = p\,l$ belastet 414
3. Ein dünner Stab ist um eine Rolle geschlungen und durch Zugkräfte belastet 418

VIII. Beanspruchung durch Schubspannungen (Schiebungen).

Seite
§ 47. Schub und Drehung 421

IX. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen) und Schubspannungen (Schiebungen).

§ 48. Größte Anstrengung bei gleichzeitig vorhandener Dehnung (Normalspannung) und Schiebung (Schubspannung).
1. Begriff der zulässigen Anstrengung des Materials 424
2. Ermittlung der größten Anstrengung 428
§ 49. Zug (Druck) und Drehung 437
§ 50. Biegung und Drehung.
1. Kreisquerschnitt 439
2. Elliptischer Querschnitt.
a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kleinen Achse der Ellipse 440
b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur großen Achse der Ellipse 441
3. Rechteckiger Querschnitt.
a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks 442
b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur langen Seite des Rechtecks 443
c) Die Ebene des biegenden Kräftepaares hat keine der beiden unter a) und b) bezeichneten Lagen 443
§ 51. Zug (Druck) und Schub 444
§ 52. Biegung und Schub.
1. Anstrengung des Materials.
a) Kreisquerschnitt 447
b) Rechteckiger Querschnitt 455
c) I-Querschnitt 457
2. Formänderung.
a) Im allgemeinen 458
b) Durchbiegung mit Rücksicht auf die Schubkraft . . . 462
§ 53. Frage der Einspannung eines Stabes 473

Fünfter Abschnitt.

Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

I. Die Mittellinie ist eine einfach gekrümmte Kurve, ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte sowie der Richtungslinien der äußeren Kräfte.

Seite

§ 54. Dehnung. Spannung. Krümmungshalbmesser.
1. Anstrengung des Materials 486
2. Werte von $x = -\frac{1}{f}\int \frac{\eta}{r+\eta} df$ für verschiedene Querschnitte.
a) Rechteck 494
b) Kreis, Ellipse 495
c) Trapez 496
d) Dreieck 497
e) Zusammengesetzte Querschnitte 497
3. Krümmungshalbmesser 499
4. Änderung der Koordinaten der Mittellinie 501

§ 55. Fälle bestimmter Belastungen.
1. Offener Haken trägt eine Last Q 504
2. Hohlzylinder, welcher als Walze dient, ist auf die Längeneinheit durch den Druck $2Q$ belastet 508

§ 56. Versuchsergebnisse.
1. Versuche mit Hohlzylindern 516
2. Versuche und Darlegungen zur Frage der Spannungsverteilung über die Querschnitte gekrümmter stabförmiger Körper . . . 521

II. Die Mittellinie ist eine doppelt gekrümmte Kurve.

§ 57. Die gewundenen Drehungsfedern.
1. Die zylindrischen Schraubenfedern 540
2. Die Kegelfedern. 543

Sechster Abschnitt.

Gefäße.

§ 58. Hohlzylinder.
1. Innerer und äußerer Druck. 546
2. Innerer Überdruck 554
3. Äußerer Überdruck 560

§ 59. Hohlkugel
1. Innerer Überdruck 563
2. Äußerer Überdruck 564

Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen (Dehnungen).

Einleitung.

§ 1. Formänderung. Spannung.

Der gerade stabförmige Körper, Fig. 1, welchen wir uns als Kreiszylinder vorstellen wollen, besitze die Länge l und den Durchmesser d, also den Querschnitt $f = \frac{\pi}{4} d^2$. Derselbe werde jetzt — Fig. 2 — von zwei ziehenden Kräften PP ergriffen, welche gleichmäßig über die beiden Endquerschnitte verteilt angreifen, und deren Richtung mit der Stabachse zusammenfällt. Ihre Größe liege unterhalb der Grenze, bei welcher eine Aufhebung des Zusammenhanges des Stabes, ein Zerreißen des letzteren, eintreten würde; sie halten sich demnach an dem Stabe das Gleichgewicht.

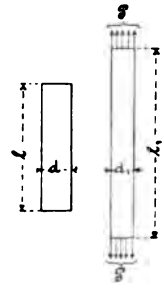


Fig. 1. Fig. 2.

Unter der Einwirkung dieser Kräfte

a) vergrößert sich die Länge des Stabes von l auf l_1, d. h. um $l_1 - l = \lambda$

und

b) vermindert sich der Durchmesser des Stabes von d auf d_1, d. h. um $d - d_1 = \delta$.

Es finden also gleichzeitig zwei Formänderungen statt: eine Ausdehnung in Richtung der Stabachse und eine Zusammenziehung (Kontraktion) senkrecht zu derselben. Die letztere erweist sich übrigens weit kleiner als die erstere (vergl. § 7).

Wirken die beiden Kräfte PP nicht ziehend, wie in Fig. 2 angenommen, sondern drückend auf den als kurz vorausgesetzten Körper, wie in Fig. 3 dargestellt ist, so besteht die eintretende Formänderung

a) in einer Verkürzung der Länge des Zylinders von l auf l_2, also um $\lambda = l - l_2$,

und

b) in einer Vergrößerung des Durchmessers des Zylinders von d auf d_2, also um $\delta = d_2 - d$.

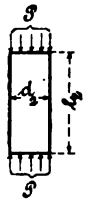


Fig. 3.

Es findet somit gleichzeitig eine Zusammendrückung in Richtung der Zylinderachse und eine Ausdehnung senkrecht zu derselben, eine Querdehnung, statt.

Der Vergleich dieser bei der Druckwirkung auftretenden Erscheinungen mit den bei der Zugwirkung sich einstellenden zeigt, daß die Umkehrung der Kraftrichtung auch die Formänderungen umkehrt. Wird die Richtung der ziehenden Kraft als positiv, diejenige der drückenden Kraft als negativ bezeichnet, so hat zur Folge

$+P$ eine positive Ausdehnung in Richtung der Stabachse und
- negative - senkrecht zur -
$-P$ eine negative Ausdehnung in Richtung der Stabachse und
- positive - senkrecht zur -

Wir denken uns in dem Stabe, an welchem sich die Kräfte PP das Gleichgewicht halten, einen Querschnitt. Die auf beiden Seiten desselben liegenden Stabteile werden infolge des Vorhandenseins dieser äußeren Kräfte mit gewissen, über den Querschnitt verteilten Kräften aufeinander einwirken. Diese inneren Kräfte, bezogen auf die Flächeneinheit, heißen Spannungen, und zwar Zugspannungen, Spannungen im engeren Sinne, positive Spannungen, wenn die äußeren Kräfte ziehend wirken (Fig. 2), oder Druckspannungen, Pressungen, negative Spannungen, wenn die äußeren Kräfte drückend tätig sind (Fig. 3).

Insoweit zum Ausdruck gebracht werden soll, daß diese inneren Kräfte senkrecht zum Querschnitt, d. h. senkrecht zu den Flächenelementen, in denen sie wirken, gerichtet sind, werden sie als Normalspannungen bezeichnet.

Unter den Voraussetzungen gleichmäßiger Verteilung der Kräfte PP über die beiden Endquerschnitte des Stabes und

durchaus gleichartiger Beschaffenheit des Stabmaterials wird auch die Spannung für die einzelnen Teile des in Betracht gezogenen Stabquerschnittes, d. h. für die einzelnen Flächenelemente desselben, gleich groß sein. Bezeichnen wir dieselbe mit σ, so erscheint sie bestimmt durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{P}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Streng genommen müßte hierin f denjenigen Querschnitt bedeuten, welchen der Stab tatsächlich besitzt, während er durch P belastet ist. Wie wir oben (S. 1 und 2) bei b) sahen, ändert sich unter Einwirkung der äußeren Kräfte nicht bloß die Länge, sondern auch der Durchmesser des Körpers und damit auch der Querschnitt. Unter Umständen kann diese Querschnittsänderung, welche abhängt von der verhältnismäßigen Größe der Belastung und der Art des Materials, von Bedeutung werden. Aus diesem Grunde ist es notwendig festzuhalten, daß die Gleichung 1 die Spannung σ bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt liefert, sofern, wie oben angenommen, f den Querschnitt des unbelasteten Stabes bezeichnet.

§ 2. Dehnung. Dehnungskoeffizient. Proportionalitätsgrenze. Fließgrenze.

Die absolute Größe λ der Längenänderung (vergl. § 1, a) hängt ab von der ursprünglichen Länge l des Stabes. Um sich für Zwecke der Rechnung von dieser Abhängigkeit zu befreien, pflegt man die auf die Längeneinheit bezogene Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

anzugeben. Diese verhältnismäßige (spezifische) Längenänderung ε wird dann kurz mit Dehnung bezeichnet, und zwar als positive oder negative, je nachdem es sich um Verlängerung (durch eine Zugkraft) oder um Verkürzung (durch eine Druckkraft) handelt.

Die Bestimmung der Dehnung durch die Gleichung 1 setzt für den Fall, daß die ursprüngliche Länge l nicht eine sehr kleine Größe ist, voraus: es sei die Dehnung an allen Stellen der Strecke l gleich groß.

Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen der Dehnung ε und der zugehörigen Spannung σ (vergl. § 1) pflegt angenommen zu werden, daß innerhalb gewisser Belastungsgrenzen Proportionalität zwischen ihnen bestehe, entsprechend der Gleichung

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

worin

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\lambda}{l}\,\frac{1}{\sigma} = \frac{\lambda}{l}\,\frac{f}{P} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

eine innerhalb der erwähnten Belastungsgrenzen konstante Erfahrungszahl bedeutet, nämlich diejenige Zahl, welche angibt, um welche Strecke ein Stab von der Länge 1 bei einer Belastung gleich der Krafteinheit (Kilogramm) auf die Flächeneinheit (Quadratzentimeter) seine Länge ändert, oder kurz: die Änderung der Längeneinheit, d. h. die Dehnung, für das Kilogramm Spannung. Diese Erfahrungszahl sei demgemäß als Dehnungskoeffizient bezeichnet.

Diese Begriffsbestimmung liefert die Dehnung unmittelbar als Produkt aus Spannung und Dehnungskoeffizient, und die Änderung der Länge des Stabes, welche ursprünglich l betrug,

$$\lambda = \alpha\,\sigma\,l,^{1})$$

---

[1]) Dieser Ausdruck entspricht ganz demjenigen, welcher sich für die Ausdehnung eines Stabes durch die Wärme oder auch für die Zusammenziehung infolge Abkühlung ergibt, wie folgende Betrachtung deutlich zeigt.

Ein Stab von der Länge l_a und der Temperatur t_a wird auf die Temperatur t_e gebracht. Hierbei dehnt sich derselbe aus um

$$\alpha_w\,(t_e - t_a)\,l_a,$$

sofern α_w den Längenausdehnungskoeffizienten durch die Wärme, d. h. die Zunahme der Längeneinheit für 1° Erwärmung bedeutet.

Ein Stab, welcher anfangs so belastet ist, daß in seinen Querschnitten die Spannung σ_a herrscht, besitzt in diesem Zustande die Länge l_a. Durch Vermehrung der Belastung steigt die Spannung auf σ_e. Hierbei dehnt sich der Stab aus um

$$\alpha\,(\sigma_e - \sigma_a)\,l_a,$$

worin α den oben erörterten Dehnungskoeffizienten bedeutet.

Wie ersichtlich, tritt einfach an die Stelle des Temperaturunterschiedes $t_e - t_a$ der Spannungsunterschied $\sigma_e - \sigma_a$ und an die Stelle des Längenausdehnungs-

sowie die Spannung als den Quotienten: Dehnung durch Dehnungskoeffizient, d. i.

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Der reziproke Wert von α wird als Elastizitätsmodul bezeichnet. Über die diesem Begriff gegebene Deutung vergleiche das in der Fußbemerkung S. 4 u. f. Gesagte.

---

koeffizienten durch die Wärme der Dehnungskoeffizient. Beide Erfahrungszahlen sind hierbei allerdings als unveränderlich vorausgesetzt, wenigstens innerhalb dieser Temperatur- beziehungsweise Spannungsunterschiede.

Es ist bis zum Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches in der technischen Literatur ganz allgemein üblich gewesen, nicht mit dem Dehnungskoeffizienten α, sondern mit dem reziproken Werte desselben, d. h. mit $\frac{1}{\alpha}$, zu rechnen und für diesen den Begriff des Elastizitätsmoduls einzuführen. Derselbe ist dann erklärt worden als diejenige Kraft, welche ein Prisma vom Querschnitt 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, falls dies ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze möglich wäre. (So z. B. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 1. Band, 5. Auflage, S. 386, u. a.; Reuleaux sagt in der vierten Auflage seines Konstrukteurs, S. 1: „Elastizitätsmodul ist diejenige Spannung, bei welcher ein prismatischer, in seiner Längenrichtung beanspruchter Körper um seine ganze Länge ausgedehnt oder zusammengepreßt wird [eine solche Formänderung als möglich vorausgesetzt].“) Dies liefert für das schmiedbare Eisen rund 2000000 kg. Man hat sich also diese Kraft von zwei Millionen Kilogramm auf ein schmiedeisernes Prisma von 1 qcm Querschnitt wirkend vorzustellen. In Wirklichkeit würde bei etwa 1500 kg schon die Proportionalitätsgrenze, innerhalb welcher überhaupt die Gleichungen 2 bis 4 für schmiedbares Eisen als gültig angenommen werden dürfen, überschritten und voraussichtlich bei 4000 kg der Stab bereits zerrissen sein! Wie man sich die Zusammendrückung eines Körpers um seine ganze Länge vorstellen soll, darf unerörtert bleiben.

Verfasser ist der Ansicht, daß eine solche, mit dem tatsächlichen Verhalten des Materials nicht im Einklang stehende Begriffsbestimmung höchst bedenklich erscheint und jedenfalls nicht ohne den dringendsten Zwang oder ohne durchschlagende Nützlichkeitsgründe als zulässig bezeichnet werden kann. Seines Erachtens muß der Grundbegriff der ganzen Elastizitäts- und Festigkeitslehre, d. i. nach dem bisherigen Standpunkt dieses Teiles der Mechanik die Erfahrungszahl, welche Dehnung und Spannung verbindet, so erklärt werden, wie es dem tatsächlichen Verhalten des Materials entspricht, damit dieser Grundbegriff und mit ihm die Hauptgesetze dieses Verhaltens in Fleisch und Blut übergehen. Das ist für den mitten in der Ausführung stehenden, zu raschen Entschlüssen veranlaßten Techniker eine Notwendigkeit. Die Bedeutung von α als Zunahme der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung ist eine so einfache und natürliche, daß, wenn nicht die Macht der Gewohnheit in Betracht käme,

Die Spannung, bis zu welcher hin die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen als vorhanden vorausgesetzt wird, führt den Namen Proportionalitätsgrenze. Je nachdem es sich hierbei um Zug- oder Druckspannungen handelt, kommt die Proportionalitätsgrenze gegenüber Zug bezw. Druck in Betracht. α pflegt innerhalb dieser beiden Spannungsgrenzen als gleichbleibend, also unabhängig von der Größe und dem Vorzeichen von σ vorausgesetzt zu werden. Inwieweit diese Voraussetzung zutreffend ist, darüber gibt das in § 4 enthaltene Versuchsmaterial Auskunft. Bemerkt sei jedoch schon hier, daß es nur eine Minderzahl von Stoffen ist, für welche innerhalb gewisser Belastungsgrenzen Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht, und daß demzufolge die große Mehrzahl der Körper auch keine Proportionalitätsgrenzen besitzt.

Behufs Gewinnung eines anschaulichen Bildes über das Gesetz, nach dem sich Dehnungen und Spannungen ändern, greifen wir zur bildlichen Darstellung.

---

es nicht erklärlich erscheinen würde, daß der unanschauliche Begriff des Elastizitätsmoduls — dieses bleibt er, auch wenn andere Erklärungen als die oben besprochene aufgestellt werden — nicht schon längst von der technischen Literatur über Bord geworfen ist.

Der Umstand, daß es an einzelnen Stellen für Rechnungszwecke bequemer erscheint, an Stelle von α mit $\frac{1}{\alpha}$ zu rechnen, wobei übrigens wieder die Macht der Gewohnheit, und zwar ganz erheblich, einwirkt, berechtigt noch lange nicht dazu, $\frac{1}{\alpha}$ zum Grundbegriff der Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu machen, deren Aufgabe doch schließlich darin besteht, das wirkliche Verhalten des Materials gegenüber der Einwirkung äußerer Kräfte klarzulegen, und nicht bloß der Rechnung, sondern namentlich auch der Anschauung möglichst zugänglich zu machen.

Weiter kommt in Betracht, daß die Zahl, welche Dehnungen und Spannungen verbindet, naturgemäß ein Maß für die Formänderung des Materials zu bilden hat, und zwar derart, daß sie, je nachgiebiger ein Stoff ist, um so größer sein muß. Nun ist aber der Elastizitätsmodul, d. h. $\frac{1}{\alpha}$, umgekehrt proportional der Größe der Längenänderung, so daß einem Material, welches eine größere Dehnung ergibt, dessen Nachgiebigkeit also bedeutender ist, ein kleinerer Elastizitätsmodul entspricht, und umgekehrt. Dies erweist sich oft recht unbequem, namentlich für den, der sich mit dem Material selbst zu beschäftigen hat. Der Dehnungskoeffizient α dagegen steht in geradem Verhältnisse zur Formänderung, ist also tatsächlich ein direktes Maß derselben.

Auf der Abszissenachse OX, welche senkrecht angenommen sein soll, werden die Belastungen P aufgetragen, auf der wagrechten Ordinatenachse OY die durch diese Belastungen veranlaßten Ausdehnungen λ. Um diejenigen Verhältnisse, welche hier zunächst klargestellt werden sollen, recht deutlich hervortreten zu lassen, werde ein Körper aus zähem Schmiedeisen (Flußeisen) zugrunde gelegt und der Maßstab für die Ausdehnungen verhältnismäßig sehr groß gewählt. Wir erhalten die in Fig. 1 dargestellte Schaulinie $OQABC$. Für den beliebigen Punkt Q ist $\overline{OQ_1} = \overline{Q_2Q}$ die Belastung P und $\overline{OQ_2} = \overline{Q_1Q}$ die zugehörige Verlängerung λ.

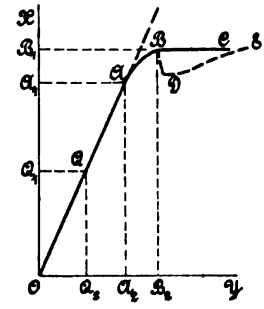


Fig. 1.

Wie ersichtlich, verläuft die Linie bis zum Punkte A als Gerade, entsprechend dem Umstande, daß von der Belastung $P = 0$ bis $P = \overline{OA_1}$ Proportionalität zwischen Belastungen (Spannungen) und Verlängerungen (Dehnungen) besteht. Bei höherer Belastung (über $P = \overline{OA_1}$ hinaus) beginnt die Verlängerung rascher zu wachsen: die Schaulinie löst sich tangential von der Geraden OQA nach der Ordinatenachse OY hin. Von B an verläuft sie (auf eine längere Strecke) fast parallel zu dieser, wie zunächst angenommen werden möge, entsprechend einem außerordentlich starken Wachstum der Verlängerungen bei sehr geringer Steigerung der Belastung: der Stab streckt sich. Der Eintritt des Streckens zeigt sich beispielsweise bei den Materialprüfungsmaschinen mit Waghebel durch Fallen desselben, bei den Maschinen mit Messung der Belastung mittelst Quecksilbersäule (Amsler-Laffon) durch Sinken der letzteren u. s. w. Der Stab streckt sich unter einer Belastung, die häufig kleiner zu sein pflegt als diejenige, bei welcher das Strecken begann. Verfolgt man den Verlauf des Linienzuges in solchen Fällen näher, so zeigt sich z. B. für zähes Flußeisen ein ziemlich plötzlicher Abfall bei B und darauffolgendes langsames Ansteigen, etwa wie in Fig. 1 durch die gestrichelte Linie BDE angedeutet ist. Häufig wird wiederholter Abfall und darauffolgendes Ansteigen, d. h. mehrfaches Auf- und Niederschwanken im Verlauf der Dehnungslinie während der Streckperiode beobachtet.

Die Linie der Verlängerungen weist hiernach zwei ausgezeich-

nete Stellen A und B auf. Bei A geht die Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen zu Ende: die der Belastung $P = \overline{OA_1} = \overline{A_2 A}$ entsprechende Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ ist demnach die Proportionalitätsgrenze. In B beginnt der Stab sich verhältnismäßig sehr stark zu strecken, gewissermaßen zu fließen: die Spannung, welche der zum Punkte B gehörigen Belastung $P = \overline{OB_1} = \overline{B_2 B}$ entspricht, wird deshalb als Streck- oder Fließgrenze bezeichnet.

Streckt sich der Stab unter einer Belastung, die erheblich kleiner ist, als diejenige, bei welcher das Strecken begann, wie in Fig. 1 durch die Linie BDE angedeutet wird, so kann eine obere und eine untere Streckgrenze unterschieden werden derart, daß die obere Streckgrenze aufgefaßt wird als diejenige Spannung, bei welcher das Strecken beginnt, und die untere Streckgrenze als der kleinste Wert der Spannung, auf den die Belastung während des Streckens sinkt, oder als die kleinste Spannung, unter welcher das Strecken noch vor sich geht.

Handelt es sich um Druckbelastung, so tritt an die Stelle des Streckens des Körpers ein Zusammenquetschen desselben. Man spricht dann von Fließ- oder Quetschgrenze und versteht darunter diejenige Druckspannung, bei welcher das Material verhältnismäßig rasch nachgibt, ohne daß Zerstörung eintritt.

Wie bereits erwähnt, besitzen nicht alle Stoffe Proportionalitätsgrenzen. Dasselbe ist auch hinsichtlich der Streck- und Quetsch- oder Fließgrenze zu bemerken.

Die Fließgrenze und die Proportionalitätsgrenze werden nicht selten als nahe beieinander liegend ermittelt, so z. B. bei weichem Stahl.

§ 3. Bruchbelastung. Zugfestigkeit. Querschnittsverminderung. Bruchdehnung. Arbeitsvermögen.

Wird die Belastung des Stabes, die wir uns im folgenden zunächst nur als Zug vorstellen, fortgesetzt gesteigert, so findet schließlich eine Trennung desselben, ein Zerreißen (Zerbrechen), statt.

Denken wir uns den in § 2 erwähnten Schmiedeisenstab in eine Materialprüfungsmaschine eingespannt, welche die Linie der

Verlängerungen selbsttätig aufzeichnet derart, daß die Belastungen die senkrechten Abszissen bilden, während die Verlängerungen λ die zugehörigen wagrechten Ordinaten liefern, und sodann die Belastung allmählich bis zum Zerreißen gesteigert, so erhalten wir die Schaulinie $OBCEF$[1]) in Fig. 1. Hierbei sind die Verlängerungen im Verhältnis viel kleiner als in Fig. 1, § 2 gewählt. Infolge dieses kleinen Maßstabes für die Werte von λ löst sich die Dehnungskurve erst später von der Achse OX (Achse der Belastungen).

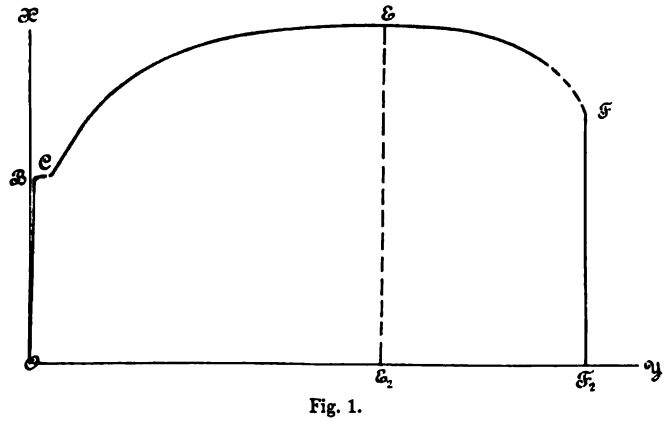


Fig. 1.

Sie pflegt alsdann eine Strecke nahezu wagrecht verlaufend angenommen zu werden[2]) und steigt hierauf langsam an bis zum Punkte E. Von der Verlängerung $\lambda = \overline{OE_2}$, welche die der

[1]) Zuverlässiger als durch eine solche mechanische Vorrichtung, die Selbstzeichner genannt wird, läßt sich die Dehnungslinie dadurch festlegen, daß für verschiedene Belastungen die zugehörigen Verlängerungen bestimmt und damit die erforderlichen Punkte für die Kurve erlangt werden. Nach Überschreitung der Streckgrenze verfährt man dabei zweckmäßig derart, daß jeweils die Belastung abgelesen wird, bei welcher eine angenommene Verlängerung eintritt. Nach einiger Übung läßt sich auf diese Weise die Dehnungslinie bis in die Nähe des Bruches mit ausreichender Genauigkeit feststellen. Eine gewisse Unsicherheit pflegt nur an den in Fig. 1 durch Strichelung hervorgehobenen Stellen, d. i. auf der Strecke BC (vergl. § 2, Fig. 1) und in der Nähe des Bruches zu bestehen. Doch läßt sich der Verlauf an der zuerst bezeichneten Stelle mit ausreichender Genauigkeit feststellen, wenn man den Selbstzeichner verwendet und für die in der Mitte des Stabes gelegene Meßstrecke desselben das soeben angegebene Verfahren benutzt. Die Dehnungslinien Fig. 13 und 14 in § 4 sind auf diese Weise gewonnen.

[2]) Auf die in § 2 angedeuteten Abweichungen, die zur Unterscheidung einer oberen und unteren Streckgrenze veranlassen, wird später eingegangen werden.

Messung unterworfene Stabstrecke unmittelbar bei der Belastung $P = \overline{E_2 E}$ ergibt, wird angenommen, daß sie sich gleichmäßig über die ganze Länge dieser Strecke verteilt.

Nachdem diese Verlängerung OE_2 eingetreten ist, beginnt der Stab an einer Stelle sich einzuschnüren, also hier seinen Querschnitt stärker zu vermindern, Fig. 2 (vergl. auch Fig. 8 auf Tafel I und Fig. 19 auf Taf. IV). Die Belastung P, welche von jetzt an zu weiterer Verlängerung erforderlich ist, nimmt ab, bis sich schließlich der Stab bei $\lambda = \overline{OF_2}$ trennt[1]). Die Belastung im Augenblicke des Zerreißens ist $\overline{F_2 F} < \overline{E_2 E}$.

Fig. 2.

Die größte zur Aufhebung des Zusammenhanges des Stabes erforderlich gewesene Kraft $\overline{E_2 E} = P_{max}$ wird als Bruchbelastung bezeichnet[2]). Die Spannung, welche dieser zum Zerreißen nötigen Belastung entspricht, heißt Zugfestigkeit. Dieselbe ist hiernach unter der Voraussetzung gleichmäßiger Lastverteilung über den Querschnitt

$$K_z = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Stabquerschnitt}}.$$

Hierbei erhebt sich die schon bei Gleichung 1, § 1 berührte Frage, mit welchem Querschnitt die Bruchbelastung zu teilen ist: Soll der ursprüngliche Querschnitt des Stabes, oder soll derjenige Querschnitt gewählt werden, den der Stab in dem Augenblicke besaß, in welchem die Bruchbelastung wirkte? Streng genommen wäre der letztere Querschnitt in die Rechnung einzuführen, da der Quotient durch gleichzeitig vorhandene Größen gebildet werden sollte. Dieser Querschnitt ist jedoch schwer zu ermitteln. Tatsächlich benutzt man den ersteren Querschnitt als Nenner und erhält in

---

[1]) Es ist noch nachzuweisen, ob der Größtwert der Belastung des Stabes genau mit dem Beginn der Einschnürung zusammenfällt. Für die Notwendigkeit eines solchen Nachweises spricht die Beobachtung, daß zuweilen bei zähem Material, wie z. B. weichem Stahl, Bronze, die Erscheinung mehr oder minder großer Einschnürung an mehreren Stellen des Stabes nacheinander auftritt; es bilden sich gewissermaßen Knoten, bis schließlich der Bruch an der zuletzt und am stärksten eingeschnürten Stelle erfolgt.

[2]) Liegt Veranlassung vor, diese Belastung von derjenigen im Augenblicke des Bruches, d. h. von $P = \overline{F_2 F}$ zu unterscheiden, so muß das ausdrücklich hervorgehoben werden. In der Regel wird nur $P_{max} = \overline{E_2 E}$ angeführt und als Bruchbelastung bezeichnet.

$$K_z = \frac{P_{max}}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt[1]). Da hiernach f zu groß eingeführt wird, so erscheint die durch Gleichung 1 bestimmte Zugfestigkeit zu klein, was im Sinne des Zweckes der anzustellenden Festigkeitsrechnungen zu liegen pflegt. Bei manchen Stoffen kann der Betrag dieses Zuklein bedeutend sein, bei anderen verschwindet er.

Die übliche Materialprüfungsmaschine mit Waghebel beispielsweise läßt den Eintritt der höchsten Belastung dadurch erkennen, daß nach Überschreitung derselben der Waghebel zu sinken beginnt, je nach dem Material mehr oder minder rasch.

Der größere Teil der Konstruktionsstoffe liefert Schaulinien, welche Wachstum der Spannungen bis zum Zerreißen aufweisen. Dann fallen die Punkte E und F (Fig. 1) zusammen. Vergl. hierüber z. B. § 4, Fig. 8, 18, 19, 20, und 21[2]).

Wird der Querschnitt des Stabes an der Bruchstelle (an der Stelle der Einschnürung, Fig. 2) mit f_b bezeichnet, so findet sich in

$$\psi = 100\,\frac{f - f_b}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

die Verminderung des Querschnittes an der Bruchstelle in Hundertteilen des ursprünglichen Querschnittes, die Bruchzusammenziehung oder Bruchkontraktion oder kurz die Zusammenziehung, Einschnürung oder Kontraktion genannt. Klarer und schärfer erscheint die Bezeichnung Querschnittsverminderung

---

[1]) Der Ermittlung der Zugfestigkeit den Wert $P_{max} = \overline{E_2 E}$ und den Querschnitt, welchen der Stab an der eingeschnürten (kontrahierten) Stelle (Fig. 2) besitzt, zugrunde zu legen, muß als unzulässig bezeichnet werden, wenn Bruchbelastung und Bruchquerschnitt nicht gleichzeitig, sondern nacheinander vorhanden sind.

[2]) Die scharfe Beachtung des Vorstehenden sowie der späteren Erörterungen über Festigkeit läßt deutlich erkennen, daß die durch den Versuch bestimmten Zugfestigkeiten abhängen müssen von den Umständen, unter denen der Versuch durchgeführt wurde, und von den Voraussetzungen, welche bei der Ermittlung gemacht worden sind. Dasselbe gilt auch für die später zu erörternde Druckfestigkeit. Es gibt keine tatsächlich bestimmte Zug- oder Druckfestigkeit, welche als vollständig losgelöst von diesen Umständen und Voraussetzungen angesehen werden darf.

des zerrissenen Stabes, da f_b an dem zerrissenen Stabe gemessen wird.

Bezeichnet l_b die Länge, welche das ursprünglich l lange Stabstück nach dem Zerreißen besitzt, wobei man sich vorstellt, der Bruch erfolge in der Mitte von l[1]), so wird in

$$\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

die Verlängerung der der Messung unterworfenen Stabstrecke in Hundertteilen der ursprünglichen Länge, die Dehnung des zerrissenen Stabes, die Bruchdehnung oder auch kurz die Dehnung erhalten[2]).

Die mechanische Arbeit, welche das Zerreißen des ursprünglich l langen Stabes, dessen Verlängerungen der Dehnungslinie $OBCEF$ zugrunde liegen, fordert, wird dargestellt durch die Größe der Fläche $OBCEFF_2$. Die mechanische Arbeit bis zum Eintritt der größten Belastung gemäß der Zugfestigkeit wird durch die Fläche $OBCEE_2$ gemessen. Nach Aufnahme dieser Arbeit ist die der Zugfestigkeit entsprechende Widerstandsfähigkeit des Stabes erschöpft; denn nach Überschreitung des Punktes E sinkt die Widerstandsfähigkeit, der Stab schnürt sich ein, und die mechanische Arbeit, wie sie durch die Fläche EFF_2E_2 bestimmt erscheint, wird in der Hauptsache auf die örtliche Formänderung an der Einschnürungsstelle verwendet, also vorzugsweise nur von demjenigen Material verbraucht, welches an der sich zusammenziehenden Stelle vorhanden ist[3]). Die mechanische Arbeit, welche die Dehnung des zylindrischen Stabes bis zum Eintritt der Bruchbelastung P_{max} für die Kubikeinheit der ursprünglichen Stabmasse fordert, wird als Arbeitsvermögen des Materials bezeichnet. Seine Größe ergibt sich zu

$$A = \frac{\text{Fläche } OBCEE_2}{fl} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

[1]) Über das Vorgehen, wenn dieses nicht der Fall ist, vergl. Fußbemerkung S. 107.

[2]) Da l_b nach dem Zerreißen des Stabes gemessen wird, so enthält es nur die bleibende Verlängerung in sich, wird also kleiner sein müssen als die Verlängerung, welche die Dehnungslinie Fig. 1, gültig für die gesamten Verlängerungen, liefert.

[3]) Von dem Ausnahmefall, daß sich der Stab an mehreren Stellen nacheinander einschnürt, darf abgesehen werden.

Kilogrammeter für das Kubikzentimeter Material, sofern die Belastungen P in kg, die Verlängerungen λ in m aufgetragen, der Querschnitt f in qcm und die Stablänge l in cm eingeführt werden.

Angaben von Zahlenwerten für Zugfestigkeit, Querschnittsverminderung, Bruchdehnung, Arbeitsvermögen u. s. w., welche die für den Konstrukteur vorzugsweise in Betracht kommenden Materialien liefern, finden sich in des Verfassers Maschinenelementen im ersten Abschnitt unter „E. Koeffizienten der Elastizität und Festigkeit“ (9. Aufl., S. 43 bis 111).

§ 4. Längenänderungen verschiedener Stoffe. Gesamte, bleibende und federnde Längenänderungen. Elastizitätsgrenze.

1. Versuche mit Gußeisen.

Gußeisenkörper I.

(Druck.)

Wir nehmen einen aus zähem, grauem Gußeisen, wie es zu Maschinenteilen Verwendung findet, hergestellten sowie abgedrehten Zylinder und unterwerfen ihn in einer senkrechten Prüfungsmaschine der Druckprobe.

Die vorher stattgehabte Messung ergibt:

Durchmesser des Zylinders	$d = 8{,}00$ cm
Querschnitt - -	$f = \frac{\pi}{4} 8^2 = 50{,}27$ qcm
Länge - -	62,15 cm
Länge der mittleren Strecke, für welche die Zusammendrückung bestimmt werden soll, d. i. die Meßlänge	$l = 50{,}00$ cm[1])

Der neue, noch keiner Belastung unterworfen gewesene Zylinder wird abwechselnd in Zeiträumen von 1,5 Minuten zu-

[1]) Die Meßlänge ist mindestens um einen Betrag etwa gleich d kleiner zu wählen als die Stablänge, um die Unregelmäßigkeiten auszuscheiden, welche in der Nähe der Druckflächen auftreten (vergl. § 13, § 14).

nächst mit der Kraft $P = 10000$ kg belastet und bis auf $P = 0$ entlastet[1]). Hierbei ergeben sich aus den Beobachtungen die nachstehend zusammengestellten Zahlen.

Temperatur unveränderlich 16,3° C.

Belastung in kg		Länge der Stabstrecke in cm	Zusammendrückungen in $^1/_{1200}$ cm		
P	$\sigma = \frac{P}{f}$		gesamte λ	bleibende λ'	sich wieder verlierende $\lambda - \lambda'$
1	2	3	4	5	6
0	0	l	—	—	—
10000	198,9	$l - \frac{13,86}{1200}$	13,86		
				0,75	13,11
0	0	$l - \frac{0,75}{1200}$			
10000	198,9	$l - \frac{13,94}{1200}$	13,94		
				0,89	13,05
0	0	$l - \frac{0,89}{1200}$			
10000	198,9	$l - \frac{14,00}{1200}$	14,00		
				1,00	13,00
0	0	$l - \frac{1,00}{1200}$			
10000	198,9	$l - \frac{14,03}{1200}$	14,03		
				1,04	12,99
0	0	$l - \frac{1,04}{1200}$			
10000	198,9	$l - \frac{14,03}{1200}$	14,03		
				1,04	12,99
0	0	$l - \frac{1,04}{1200}$			

[1]) Eine vollständige Entlastung des in der Prüfungsmaschine senkrecht stehenden Zylinders ist, streng genommen, nicht möglich, da er durch das eigene Gewicht sowie durch das in Betracht kommende Gewicht der Meßvorrichtung belastet wird. Diese Belastung beträgt im vorliegenden Falle für den mittleren,

Wie hieraus ersichtlich, erfährt der Zylinder durch die erstmalige Belastung mit $P = 10000$ kg auf die Erstreckung von 50 cm eine Zusammendrückung von $\lambda = \frac{13{,}86}{1200}$ cm. Nach der hieran sich schließenden Entlastung zeigt sich noch eine Verkürzung um $\lambda' = \frac{0{,}75}{1200}$ cm. Der Zylinder hat also infolge der einmaligen Belastung eine bleibende Zusammendrückung um diesen Betrag erlitten. Die sich wieder verlierende, d. h. federnde Zusammendrückung beträgt hiernach $\frac{13{,}86 - 0{,}75}{1200} = \frac{13{,}11}{1200}$ cm.

Die erste Wiederholung des Belastungswechsels mit $P = 10000$ kg ergibt die gesamte Zusammendrückung zu $\frac{13{,}94}{1200}$ cm, die bleibende zu $\frac{0{,}89}{1200}$ cm und die federnde zu $\frac{13{,}94 - 0{,}89}{1200} = \frac{13{,}05}{1200}$ cm. Hiernach ist gewachsen:

die gesamte Zusammendrückung um $\frac{13{,}94 - 13{,}86}{1200} = \frac{0{,}08}{1200}$ cm,

- bleibende - - $\frac{0{,}89 - 0{,}75}{1200} = \frac{0{,}14}{1200}$ -

dagegen hat abgenommen:

die federnde Zusammendrückung um $\frac{13{,}11 - 13{,}05}{1200} = \frac{0{,}06}{1200}$ cm.

Die fernere Wiederholung des Wechsels zwischen Belastung mit $P = 10000$ kg und Entlastung führt schließlich zu dem Ergebnis, daß sich nach viermaliger Belastung und Entlastung die gesamten, bleibenden und federnden Zusammendrückungen nicht mehr oder — mit Rücksicht auf den Genauigkeitsgrad unserer Messungen — doch nur noch unerheblich ändern. Ihre Endwerte betragen

$$\lambda = \frac{14{,}03}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda' = \frac{1{,}04}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda - \lambda' = \frac{12{,}99}{1200} \text{ cm}.$$

d. h. in der halben Höhe liegenden Querschnitt rund 17 kg, entsprechend $\frac{17}{50{,}27} = 0{,}34$ kg/qcm. Sie wurde hier vernachlässigt; bei späteren Versuchen wird sie Berücksichtigung erfahren.

Wir unterwerfen jetzt den Zylinder einem Belastungswechsel zwischen $P = 20000$ kg, entsprechend

$$\sigma = \frac{P}{f} = \frac{20000}{50{,}27} = 397{,}9 \text{ kg/qcm}$$

und $P = 0$ mit dem Erfolg, daß der erste Wechsel

$$\lambda = \frac{30{,}42}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda' = \frac{3{,}06}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda - \lambda' = \frac{27{,}36}{1200} \text{ cm}$$

ergibt, und daß der elfte Wechsel zu den Endwerten

$$\lambda = \frac{31{,}20}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda' = \frac{3{,}95}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda - \lambda' = \frac{27{,}25}{1200} \text{ cm}$$

führt. Die Temperatur im Versuchsraum steigt während des 12 maligen Belastungswechsels von 16,3 auf 16,4° C., also um $^1/_{10}{}^0$ C.

Der Belastungswechsel zwischen $P = 30000$ kg, entsprechend

$$\sigma = \frac{30000}{50{,}27} = 596{,}8 \text{ kg/qcm}$$

und $P = 0$ liefert zu Anfang die Zahlen

$$\lambda = \frac{48{,}66}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda' = \frac{6{,}18}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda - \lambda' = \frac{42{,}48}{1200} \text{ cm},$$

nach zwölfmaliger Wiederholung, welche noch immer eine geringe Neigung zum Wachsen der gesamten Zusammendrückungen erkennen läßt, die Werte

$$\lambda = \frac{49{,}50}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda' = \frac{7{,}49}{1200} \text{ cm}, \qquad \lambda - \lambda' = \frac{42{,}01}{1200} \text{ cm}.$$

Temperatur bleibt während des ganzen Versuchs unveränderlich 16,4° C.

Aus dem Vorstehenden erkennen wir folgendes.

Es sind dreierlei Längenänderungen zu unterscheiden: die gesamte, die bleibende und die federnde Längenänderung.

Werden für den untersuchten Gußeisenzylinder die Endwerte ins Auge gefaßt, so beträgt die bleibende Längenänderung

bei $\sigma = 198{,}9$ kg/qcm $\frac{1{,}04}{14{,}03} 100 = 7{,}4\,\%$ der Gesamtlängenänderung

- $\sigma = 397{,}9$ - $\frac{3{,}95}{31{,}20} 100 = 12{,}7$ - - -

- $\sigma = 596{,}8$ - $\frac{7{,}49}{49{,}50} 100 = 15{,}1$ - - -

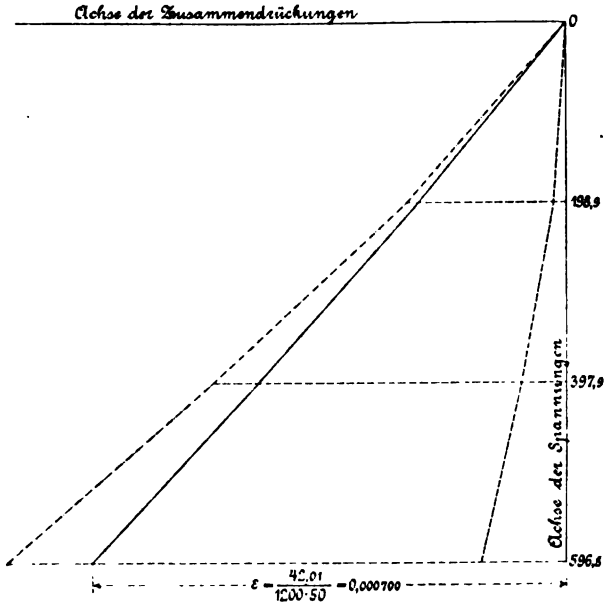


Fig. 1.

Je größer die Belastung des Stabes, um so bedeutender fällt die bleibende Längenänderung aus; sie beginnt bei dem untersuchten Gußeisen schon für sehr kleine Belastungen.

Die federnden Längenänderungen bleiben um so mehr hinter den gesamten zurück, je stärker der Körper belastet wird. Wir sehen, daß die Änderungen, welche die Zylinderlänge infolge der Belastung erfahren hat, um so vollständiger verschwinden, je weniger groß sie waren.

Jedem Körper wohnt die Eigenschaft inne, unter der Einwirkung äußerer Kräfte eine Änderung seiner Gestalt zu erfahren

und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder minder vollständig wieder zu verlieren. Insoweit er die erlittene Formänderung wieder verliert, d. h. zurückfedert, wird er als elastisch bezeichnet. Ist die Rückkehr in die ursprüngliche Form eine vollständige, so spricht man von „vollkommen elastisch". Bei den vorstehend besprochenen Versuchen ist die federnde Längenänderung diejenige, welche hiernach als die elastische gelten kann.

Stellen wir die für den untersuchten Gußeisenzylinder gewonnenen Ergebnisse in Fig. 1, S. 17, bildlich dar derart, daß zu den Belastungen oder Spannungen als senkrechten Abszissen (nach abwärts gehend, da es sich um Druckspannungen handelt,) die jeweils erhaltenen Endwerte der Zusammendrückungen als wagrechte Ordinaten aufgetragen werden, so erhalten wir den strichpunktierten (— · — · —) Linienzug als Linie der gesamten Zusammendrückungen, den gestrichelten (— — — —) als Linie der bleibenden und den ausgezogenen als Linie der federnden Zusammendrückungen. Deutlich erhellt aus dieser Darstellung, daß die Zusammendrückungen, sowohl die gesamten als auch die federnden — jedenfalls innerhalb der Spannungsgrenze, bis zu welcher sich die Untersuchung erstreckt hat — stärker wachsen als die Belastungen, daß also bei dem untersuchten Gußeisen Proportionalität zwischen beiden nicht besteht. Ebenso scharf zeigt dies die folgende Zusammenstellung, welche in den Spalten 3, 5 und 7 die Unterschiede der Zusammendrückungen für das Fortschreiten der Belastung um je 10000 kg angibt.

Belastungsstufe kg/qcm	Zusammendrückungen auf 50 cm in $^1/_{1200}$ cm					
	gesamte	Unterschied	bleibende	Unterschied	federnde	Unterschied
1	2	3	4	5	6	7
0	0		0		0	
		14,03		1,04		12,99
0 und 198,9	14,03		1,04		12,99	
		17,17		2,91		14,26
0 - 397,9	31,20		3,95		27,25	
		18,30		3,54		14,76
0 - 596,8	49,50		7,49		42,01	

Berechnet man den durch Gleichung 3, § 2 bestimmten Dehnungskoeffizienten α unter Zugrundelegung der federnden Zusammendrückungen[1]) für die 3 Belastungsstufen in der üblichen Weise, so findet sich:

für die Belastungsstufe 0 und 10000 kg

$$\alpha = \frac{12{,}99}{1200 \,.\, 50} \frac{1}{10000 : 50{,}27} = \sim \frac{1}{918\,800}\,^{2}),$$

für die Belastungsstufe 10000 und 20000 kg

$$\alpha = \frac{27{,}25 - 12{,}99}{1200 \,.\, 50} \frac{1}{(20000 - 10000) : 50{,}27} = \sim \frac{1}{837\,000}\,^{2}),$$

für die Belastungsstufe 20000 und 30000 kg

$$\alpha = \frac{42{,}01 - 27{,}25}{1200 \,.\, 50} \frac{1}{(30000 - 20000) : 50{,}27} = \sim \frac{1}{808\,600}\,^{2}),$$

---

[1]) Sofern im späteren nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, sollen der Bestimmung des Zusammenhanges zwischen Dehnungen und Spannungen immer die federnden (elastischen) Dehnungen zugrunde gelegt werden.

In Sonderfällen kann Veranlassung vorliegen, neben dem so bestimmten Dehnungskoeffizienten auch noch denjenigen für die gesamten Dehnungen oder die Dehnungsreste zu verwenden; dann wird allerdings eine Unterscheidung notwendig: etwa Dehnungskoeffizient der Federungen, Dehnungskoeffizient der gesamten Dehnungen und Dehnungskoeffizient der Dehnungsreste oder der bleibenden Dehnungen.

[2]) Wie ersichtlich, kommt dieses Verfahren darauf hinaus, daß die Kurve der Dehnungen $OP_1P_2P_3$, Fig. 2, durch gerade Strecken ersetzt wird, welche Sehnen derselben bilden. Beispielsweise ist für die Stufe der Spannungen σ_1 und σ_2, denen die Dehnungen ε_1 und ε_2 entsprechen,

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Der so ermittelte Dehnungskoeffizient α ist dann gleich der Tangente des Winkels, unter welchem die betreffende Sehne gegen die σ-Achse geneigt erscheint. Je kleiner man die Strecken, d. h. je niedriger man die Höhe der betreffenden Spannungsstufe wählt, um so genauer erhält man α für diese Strecke. Im Grenzfall wird $\alpha = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}$.

Mit weit weniger Annäherung an die Wirklichkeit wird α in Fällen starker Abweichung von der Proportionalität zwischen σ und ε für die höheren Spannungs-

d. i. ausgesprochen wachsend mit höher liegender Spannungsstufe, d. h. mit zunehmender Spannung.

Hiernach ist festzustellen, daß durch Gleichung 2, § 2, d. h. durch $\varepsilon = \alpha\,\sigma$, worin α als Konstante gilt, der Zusammenhang zwischen den Dehnungen ε und den Spannungen σ für das untersuchte Material nicht zum Ausdruck gebracht wird.

Legt man das allgemeinere Gesetz (vergl. S. 81 u. f.)

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

zugrunde und wählt man für das geprüfte Gußeisen

$$\alpha = \frac{1}{1\,320\,000}, \quad m = 1{,}0685,$$

setzt also

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,320\,000}\,\sigma^{1{,}0685} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

stufen bestimmt, wenn man jeweils auf die Anfangsbelastung (hier 0) zurückgeht. Dies wäre beispielsweise für die dritte Belastungsstufe

$$\alpha = \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3} = \frac{42{,}01}{1200 \cdot 50} \quad \frac{1}{596{,}8} = \frac{1}{852\,400},$$

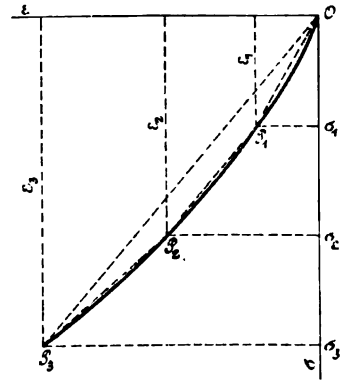


Fig. 2.

entsprechend der Tangente des Neigungswinkels des Fahrstrahls OP_3 gegen die σ-Achse. Die so bestimmten Werte des Dehnungskoeffizienten geben dann kein richtiges Bild über die Veränderlichkeit von α.

so zeigt folgende Zusammenstellung:

Spannungsstufe in kg/qcm	Federung auf 50 cm in $^1/_{1200}$ cm	
	beobachtet	berechnet nach Gl. 2
0 und 198,9	12,99	12,99
0 - 397,9	27,25	27,25
0 - 596,8	42,01	42,03

eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem, was beobachtet wurde, und dem, was die Rechnung liefert.

Die Linie der bleibenden Zusammendrückungen in Fig. 1 löst sich schon bei kleinen Spannungen von der senkrechten Abszissenachse, um sich nach der Achse der Zusammendrückungen zu krümmen. Das vorliegende Gußeisen, in dem Zustande, in welchem es sich befindet, erweist sich demnach selbst für diese kleinen Spannungen nicht als vollkommen elastisch.

Die Linie der bleibenden Zusammendrückungen kann insofern von praktischer Wichtigkeit erscheinen, als sie Auskunft darüber gibt, welche bleibende Zusammendrückung bei einer bestimmten Inanspruchnahme des Körpers zu erwarten ist. Zu diesem Zwecke ließe sich in ganz gleicher Weise, wie dies oben für die federnden Zusammendrückungen durch Gleichung 2 geschehen ist, eine Beziehung zwischen Spannung und bleibender Zusammendrückung feststellen.

In der Regel muß von den Konstruktionen gefordert werden, daß bleibende Formänderungen so gut wie nicht auftreten oder wenigstens eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Dementsprechend kann man in der Linie der bleibenden Zusammendrückungen (vergl. Fig. 1) einen Punkt, den wir Z nennen wollen, annehmen, bis zu welchem hin die bleibenden Zusammendrückungen als verschwindend oder doch genügend klein erscheinen; man erhält dadurch in dem zugehörigen Höhenabstand einen Spannungsgrenzwert, unterhalb dessen die bleibenden Zusammendrückungen vernachlässigbar erscheinen. Diese Spannung kann in Übereinstimmung mit bisheriger Auffassung als Elastizitätsgrenze bezeichnet werden.

Wie klar ersichtlich, ist der Punkt Z nicht durch die Natur des Materials allein bestimmt. Diese setzt nur seinen geometrischen Ort — die Linie der bleibenden Zusammendrückungen — fest; seine Lage auf dieser Linie erscheint, sofern die bleibenden Zusammendrückungen nicht verschwindend klein sind, zu einem bedeutenden Teile von dem persönlichen Ermessen desjenigen abhängig, der über die höchstens noch für zulässig erachtete Größe der bleibenden Zusammendrückung zu entscheiden hat. Daß hierbei auch der besondere Zweck des Gegenstandes, um den es sich handelt, sowie die gewählte Meßlänge der Probestäbe und der Genauigkeitsgrad der verwendeten Meßinstrumente Einfluß nehmend auftreten können, ist selbstverständlich[1]).

Ganz das gleiche, was hier zunächst hinsichtlich Zusammendrückungen gesagt worden ist, gilt auch in bezug auf Ausdehnungen, weshalb in den folgenden Bemerkungen ganz allgemein von Dehnungen (positive und negative) gesprochen werden soll.

Die Vermengung der Elastizitätsgrenze mit der Proportionalitätsgrenze, indem man ausspricht: die Elastizitätsgrenze ist diejenige Spannung, bis zu welcher die Dehnungen nach dem Entlasten vollständig oder doch nahezu ganz wieder verschwinden, d. h. sich also das Material vollkommen oder doch nahezu vollkommen elastisch verhält, und ferner, daß innerhalb der Elastizitätsgrenze Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bestehe, erscheint hiernach mindestens im allgemeinen unzulässig. Sie läuft selbst in den meisten derjenigen Fälle, in welchen Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht, darauf hinaus, daß durch das mehr oder minder willkürliche Festlegen des oben genannten Punktes Z auf der Linie der bleibenden Dehnungen oder Dehnungsreste gleichzeitig der Linie der Federungen oder auch der Gesamtdehnungen, falls man diese zur Grundlage nehmen will, vorgeschrieben wird, auf welche Strecke sie mit einer Geraden zusammenzufallen hat, oder daß dem Punkte Z der Dehnungsrest-Linie dieselbe Abszisse aufgezwungen wird, welche der Endpunkt der geraden Strecke in der Kurve der Federungen bezw. der Gesamtdehnungen besitzt.

---

[1]) In neuerer Zeit bezeichnen einzelne Werke, wie z. B. die Firma Fried. Krupp als Elastizitätsgrenze diejenige Spannung, bei welcher die bleibende Dehnung den Betrag von 0,03 % der Meßlänge des Probestabes erreicht.

Gußeisenkörper II.

(Druck.)

Material: graues, zähes Roheisen, wie es zu Maschinenteilen Verwendung findet, in Form eines Hohlzylinders, der innen sorgfältig ausgebohrt und außen abgedreht ist.

Äußerer Durchmesser	20,50 cm
Innerer Durchmesser	18,54 -
Mittlere Wandstärke	0,98 -
Querschnitt	$\frac{\pi}{4}(20{,}5^2 - 18{,}54^2) = 60{,}1$ qcm
Länge	100,00 cm
Meßlänge	75,00 -

Der Zylinder, welcher bereits vorher mehrfach Druckversuchen bis reichlich 1000 kg/qcm Belastung unterworfen worden war, wurde in einer senkrechten Prüfungsmaschine der Druckprobe unterzogen. Die Belastung und Entlastung wurde dabei — ganz wie beim Gußeisenkörper I — jeweils so oft wiederholt, bis die gesamten, bleibenden und federnden Zusammendrückungen sich nicht mehr änderten. Die Endergebnisse der 6 Versuchsreihen sind im folgenden zusammengestellt.

Spannungsstufe kg/qcm	Zusammendrückungen auf 75 cm Länge in $^1/_{600}$ cm		
	gesamte	bleibende	federnde
0 und 166	7,72	0,12	7,60
0 - 333	16,07	0,19	15,88
0 - 499	24,79	0,19	24,60
0 - 666	33,65	0,23	33,42
0 - 832	42,61	0,27	42,34
0 - 998	51,67	0,36	51,31

Hiernach betragen die Unterschiede der federnden Zusammendrückungen

für	den	Spannungsunterschied	0	und	166	kg/qcm	7,60
-	-	-	166	-	333	-	8,28
-	-	-	333	-	499	-	8,72
-	-	-	499	-	666	-	8,82
-	-	-	666	-	832	-	8,92
-	-	-	832	-	998	-	8,97

zeigen also — ganz in Übereinstimmung mit dem für den Gußeisenkörper I Gefundenen — namentlich zu Anfang ausgeprägt stärkere Zunahme als die Spannungen.

Die bleibenden Zusammendrückungen sind hier weit kleiner, was eine Folge davon ist, daß der Zylinder bereits vorher mehrfach stark belastet worden war.

Werden zur Prüfung der Brauchbarkeit der durch Gleichung 1 ausgesprochenen Gesetzmäßigkeit die mittelst der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Werte

$$\alpha = \frac{1}{1\,381\,700}, \qquad m = 1{,}0663$$

in die Rechnung eingeführt, wird also

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,381\,700}\,\sigma^{1{,}0663} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

gesetzt, so findet sich die folgende Zusammenstellung:

Spannung σ	Federung auf 75 cm in $^1/_{600}$ cm		
	beobachtet	berechnet nach Gl. 3	Unterschied
166 kg/qcm	7,60	7,59	— 0,01 d. s. 0,13%
333 -	15,88	15,94	+ 0,06 - 0,38 -
499 -	24,60	24,54	— 0,06 - 0,24 -
666 -	33,42	33,38	— 0,04 - 0,12 -
832 -	42,34	42,32	— 0,02 - 0,05 -
998 -	51,31	51,38	+ 0,07 - 0,14 -

Die Übereinstimmung der Werte in der zweiten und dritten Spalte muß ebenfalls als eine sehr gute bezeichnet werden.

In Fig. 3 sind nach dem durch Fig. 1 gegebenen Vorgange zu den Spannungen als senkrechten Abszissen die Federungen als

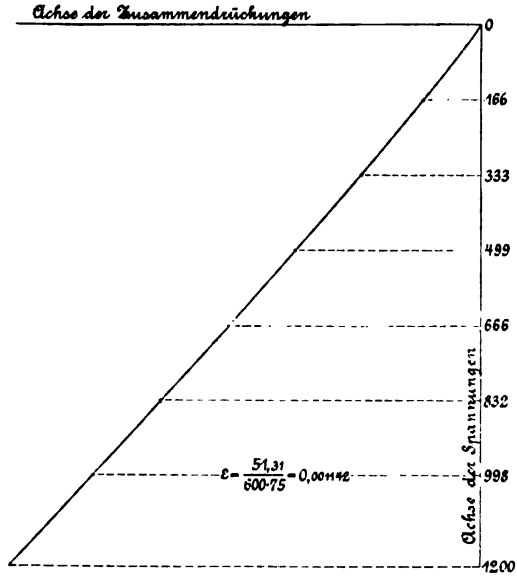


Fig. 3.

wagrechte Ordinaten aufgetragen und so die durch Kreuze hervorgehobenen Punkte erhalten worden. Die ausgezogene Kurve ist die durch Gleichung 3 bestimmte Linie. Wie ersichtlich, treffen die durch Beobachtung erhaltenen Punkte fast ganz genau auf diese Linie.

Gußeisenkörper III.

Material, wie unter I und II bezeichnet, durch Bearbeitung am prismatischen, der Messung unterworfenen Teile von der Gußhaut befreit.

Querschnitt des mittleren prismatischen Teiles 6,99 . 7,00 =	48,9 qcm
Länge - - - -	54,5 cm
Meßlänge	50,0 -
Gewicht	29,55 kg

Belastung und Entlastung wurden — ganz wie im Fall I und II — so oft gewechselt, bis die gesamten, bleibenden und federnden Dehnungen sich nicht mehr änderten.

Der vorher noch nicht belastet gewesene Körper wurde zunächst in einer senkrechten Maschine auf

Zug

beansprucht und dabei jeweils vollständig von der Zugkraft der Maschine entlastet, so daß sein Querschnitt in der Mitte nur noch belastet war durch das halbe Eigengewicht und durch die in Betracht kommenden Teile der Meßvorrichtung.

Diese Belastung des mittleren Querschnittes durch das Eigengewicht und durch den Anteil des Gewichts der Meßvorrichtung betrug rund 21 kg, entsprechend

$$\frac{21}{48{,}9} = 0{,}43 \text{ kg/qcm}.$$

1. Versuchsreihe.

Temperatur nahezu unveränderlich 19,2° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnungen auf 50 cm in $^1/_{600}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
21 und 1000	0,43 und 20,45	0,575	0,00	0,575
21 - 5000	0,43 - 102,25	3,405	0,105	3,30
21 - 10000	0,43 - 204,50	7,55	0,565	6,985
21 - 15000	0,43 - 306,75	12,405	1,385	11,02
21 - 20000	0,43 - 409,0	18,255	2,82	15,435

Der Versuch wird wiederholt.

2. Versuchsreihe.

Temperatur nahezu unveränderlich 19,1° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnungen auf 50 cm in $^1/_{600}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
21 und 500	0,43 und 10,22	0,245	0,00	0,245
21 - 1000	0,43 - 20,45	0,59	0,00	0,59
21 - 5000	0,43 - 102,25	3,37	0,01	3,36
21 - 10000	0,43 - 204,5	7,105	0,02	7,085
21 - 15000	0,43 - 306,75	11,14	0,035	11,105
21 - 20000	0,43 - 409,0	15,465	0,10	15,365

Hiernach ergibt die zweite Versuchsreihe eine ganz bedeutende Herabminderung der bleibenden Dehnungen, eine Folge des Umstandes, daß der Körper bereits einmal den Belastungen ausgesetzt gewesen ist. Ungefähr den Beträgen entsprechend, um welche die bleibenden Dehnungen zurückgegangen sind, erscheinen die gesamten Dehnungen kleiner. Die federnden Dehnungen haben sich nur wenig geändert, wie folgende Zusammenstellung erkennen läßt:

1. Versuch	0,575	3,30	6,985	11,02	15,435
2. Versuch	0,59	3,36	7,085	11,105	15,365
Unterschied	+ 0,015	+ 0,06	+ 0,100	+ 0,085	— 0,070
in %	2,6	1,8	1,4	0,8	0,45.

Bis auf das letzte Zahlenpaar zeigt sich eine kleine Zunahme der Federung. Bei Beurteilung dieser Ausnahme muß im Auge behalten werden, daß das Material bei dem zweiten Versuch bereits allen Belastungen bis 20000 kg (409 kg/qcm) vorher unterworfen gewesen war, infolgedessen, wie schon bemerkt, seine Neigung zu bleibenden Formänderungen vermindert worden ist. Sein Zustand erscheint deshalb nicht mehr als der gleiche wie bei der ersten Versuchsreihe. Erwartet darf werden, daß der Unterschied in den Federungen verhältnismäßig um so kleiner ausfällt, je

mehr sich die Beanspruchung der Endbelastung nähert, die bereits vorher wirksam gewesen war. Das zeigen aber auch die Zahlen, welche den Unterschied in Hundertteilen angeben.

Ferner darf bei Beurteilung des Unterschiedes nicht übersehen werden, daß die Beobachtung nur bis zur Feststellung der Zahlen der zweiten Dezimalreihe reicht, daß also nur bis 0,01 abgelesen werden kann, und daß die hierbei auftretenden Unsicherheiten, sofern noch der Grad der Genauigkeit, mit welcher die belastende Kraft bestimmt werden kann, Berücksichtigung findet, bei kleinen Belastungen 1 % recht erheblich überschreiten können.

Werden für die Koeffizienten α und m der Gleichung 1 solche Werte eingeführt, daß

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,338\,000}\,\sigma^{1{,}083} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

und sodann die aus Gleichung 4 berechneten Längenänderungen mit den arithmetischen Mitteln aus den federnden Dehnungen der beiden Versuchsreihen in Vergleich gestellt, so ergibt sich:

Spannungsstufe in kg/qcm	Versuchsmittelwert	Berechnet nach Gl. 4	Unterschied
0,43 und 10,22	0,245	0,269	+ 0,024
0,43 - 20,45	0,58	0,580	0,000
0,43 - 102,25	3,33	3,357	+ 0,027
0,43 - 204,5	7,035	7,122	+ 0,087
0,43 - 306,75	11,06	11,054	— 0,006
0,43 - 409,0	15,40	15,097	— 0,303

Die Übereinstimmung zwischen den Versuchsmittelwerten und den berechneten Größen befriedigt hier, namentlich bei der untersten und der obersten Belastungsstufe, nicht ganz.

Der Körper wird hierauf in einer senkrechten Prüfungsmaschine auf

Druck

beansprucht und darauf jeweils ganz vom Druck der Maschine entlastet, so daß als Belastung des mittleren Querschnittes sein

halbes Eigengewicht und das Gewicht des oberen Teiles der Meßvorrichtung verbleibt, zusammen 24 kg, entsprechend

$$\frac{24}{48{,}9} = 0{,}49 \text{ kg/qcm}.$$

Die Ergebnisse, welche die zunächst durchgeführten zwei Versuchsreihen lieferten, sind im folgenden zusammengestellt.

Belastungsstufe in kg		3. Versuchsreihe. Temperatur nahezu unveränderlich 19,3° C. Zusammendrückungen auf 50 cm in $^1/_{600}$ cm			4. Versuchsreihe. Temperatur nahezu unveränderlich 19,2° C. Zusammendrückungen auf 50 cm in $^1/_{600}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde	gesamte	bleibende	federnde
24 u. 3024	0,49 u. 61,84	—	—	—	2,05	0,00	2,05
24 u. 5024	0,49 u. 102,74	3,75	0,285	3,465	3,45	0,00	3,45
24 u. 10024	0,49 u. 204,99	8,11	1,095	7,015	7,02	0,00	7,02
24 u. 15024	0,49 u. 307,24	12,75	2,02	10,73	10,75	0,00	10,75
24 u. 20024	0,49 u. 409,49	17,555	3,005	14,55	14,48	0,00	14,48
24 u. 25024	0,49 u. 511,74	22,335	4,01	18,325	18,34	0,09	18,25

Die 3. Versuchsreihe zeigt sehr bedeutende bleibende Zusammendrückungen, was zu erwarten stand, nachdem der Körper vorher Zugbelastungen ausgesetzt worden war. Während der darauf folgenden Belastungen der 4. Versuchsreihe wurden bleibende Zusammendrückungen nur noch bei der höchsten Belastung beobachtet. Die federnden Zusammendrückungen stimmen gut überein, wie die folgende Zusammenstellung erkennen läßt.

3. Versuchsreihe	3,465	7,015	10,73	14,55	18,325
4. -	3,45	7,02	10,75	14,48	18,25
Unterschied	— 0,015	+ 0,015	+ 0,02	— 0,07	— 0,075
in %	0,4	0,2	0,2	0,5	0,4

Werden für die Zahlen α und m der Gleichung 1 die Werte

$$\alpha = \frac{1}{1\,043\,000} \quad \text{und} \quad m = 1{,}035$$

eingeführt, also

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,043\,000}\,\sigma^{1{,}035} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

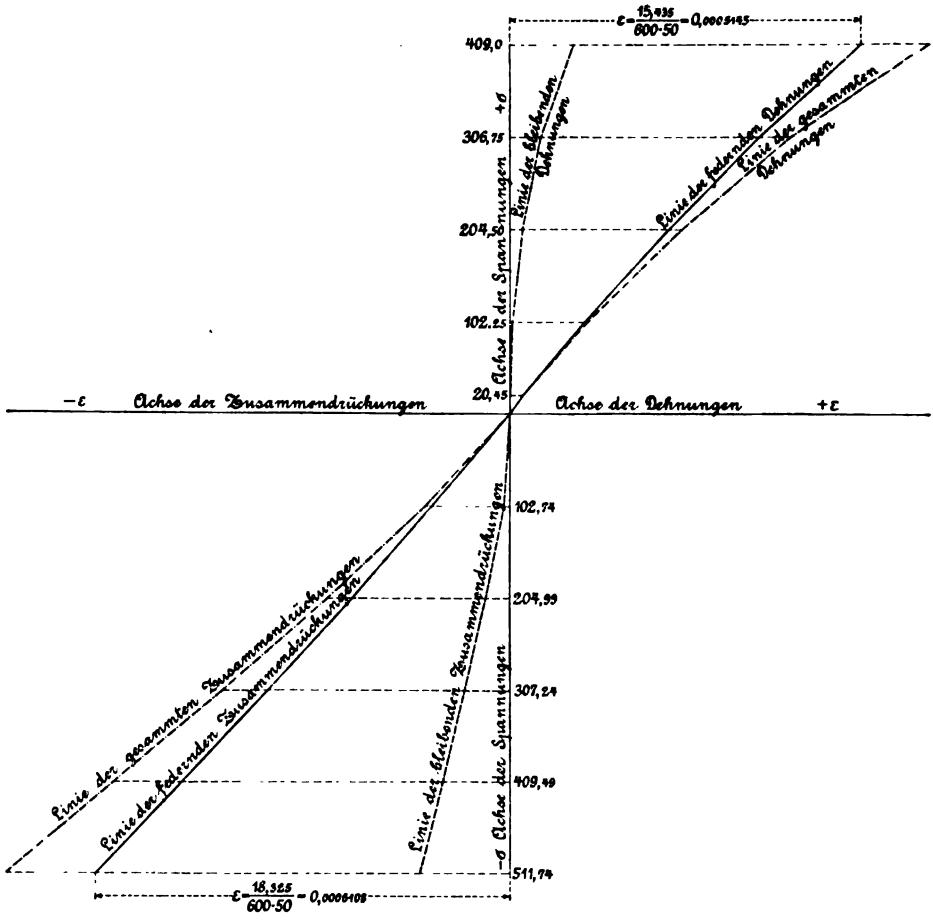


Fig. 4.

gesetzt und sodann die hiermit berechneten Zusammendrückungen mit den arithmetischen Mitteln aus den federnden Zusammendrückungen der beiden Versuchsreihen in Vergleich gebracht, so findet sich:

Spannungsstufe in kg/qcm	Versuchsmittelwert	Berechnet nach Gl. 5	Unterschied
0,49 und 61,84	2,05	2,04	— 0,01
0,49 - 102,74	3,46	3,46	0,00
0,49 - 204,99	7,02	7,09	+ 0,07
0,49 - 307,24	10,74	10,78	+ 0,04
0,49 - 409,49	14,515	14,52	+ 0,005
0,49 - 511,74	18,288	18,297	+ 0,009

Die Übereinstimmung zwischen den Versuchsmittelwerten und den berechneten Größen muß als eine gute bezeichnet werden.

In Fig. 4, S. 30 sind nach dem durch Fig. 1 gegebenen Vorgange für den ersten Zug- und für den ersten Druckversuch (Versuchsreihe 1 und 3) die Linienzüge der gesamten, bleibenden und federnden Dehnungen eingetragen: Zugspannungen nach oben, positive Dehnungen nach rechts und Druckspannungen nach unten, negative Dehnungen nach links. Fig. 5 gibt die gleiche Darstellung für den zweiten Zug- und für den zweiten Druckversuch (Versuchsreihe 2 und 4).

Fassen wir den ausgezogenen Linienzug von Fig. 4 ins Auge, so zeigt sich, daß die Linie der Federungen auf der Zugseite zu Anfang, d. h. in der Nähe des Koordinatenanfangs, also für kleinere Spannungen, etwas steiler verläuft als auf der Druckseite. Für größere Spannungen kehrt sich das Verhältnis um. Zu dem gleichen Ergebnis führt eine scharfe Betrachtung von Fig. 5.

Das gleiche lehren auch die Gleichungen

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,338\,000}\,\sigma^{1{,}083}, \text{ gültig für Zugbelastung} \quad 4)$$

und

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,043\,000}\,\sigma^{1{,}035}, \quad \text{- - Druckbelastung} \quad 5)$$

Aus ihnen folgt, daß die Federung für die Spannung 1 beträgt

gegenüber Zug $\frac{1}{1\,338\,000}$,

gegenüber Druck $\frac{1}{1\,043\,000}$,

also im letzten Falle erheblich mehr als im ersten.

Für Spannungen größer als 1 wird der größere Exponent 1,083 auf rasches Wachstum der durch Zugkräfte veranlaßten Federungen hinwirken. Aus

$$\frac{1}{1\,338\,000}\,\sigma^{1{,}083} = \frac{1}{1\,043\,000}\,\sigma^{1{,}035}$$

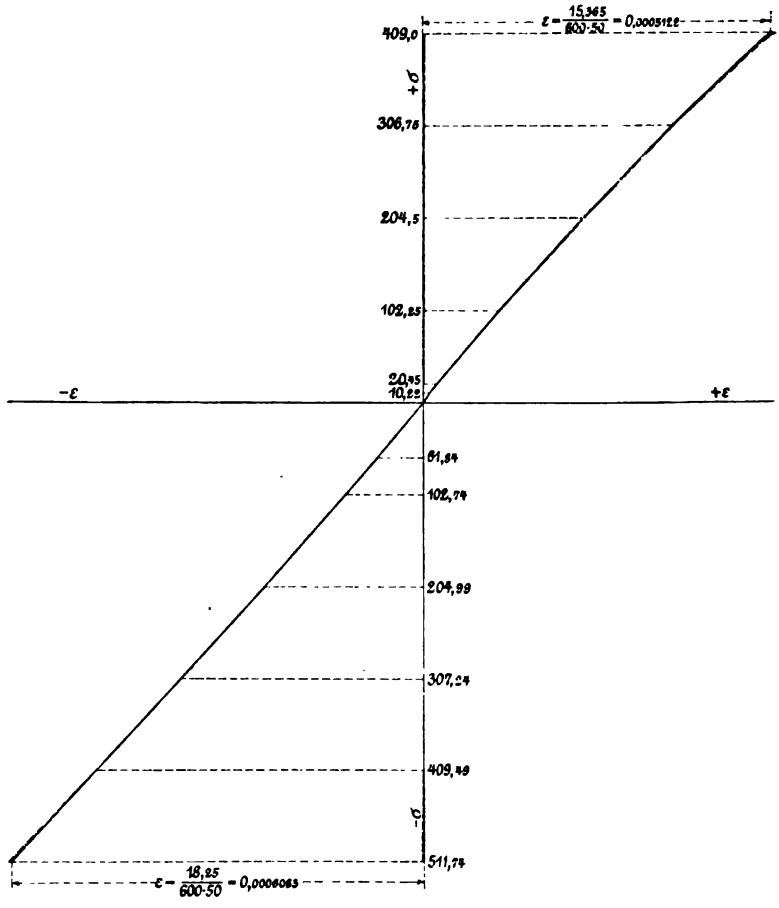


Fig. 5.

ergibt sich die Spannung

$$\sigma = 179{,}4\ \mathrm{kg/qcm},$$

nach deren Überschreitung die Federungen gegenüber Zugkräften größer werden als diejenigen gegenüber Druckbelastungen.

Die gemachte Feststellung, betreffend den anfänglich steileren Verlauf der Linie der Federungen gegenüber Zugkräften, widerspricht dem, was man bisher angenommen hatte. Sie widerspricht auch den Werten der Koeffizienten α und m, welche Verfasser früher für einen der Zugprobe unterworfenen Gußeisenstab in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 250, Gl. 9, sowie in der 6. Auflage seiner Maschinenelemente, S. 687, veröffentlicht hat. Eine dahin gehende Untersuchung hat dazu geführt, daß hinsichtlich dieses Gußeisenstabes sich ein Irrtum eingeschlichen hat, so daß dieser Widerspruch entfällt. Es muß zunächst dahingestellt bleiben, ob die bezeichnete Feststellung allgemeine Gültigkeit für Gußeisen besitzt oder nur für den untersuchten Körper gilt[1]). Durch spätere Versuche hat Verfasser Anhalt dafür, daß in der Mehrzahl der Fälle bei Gußeisen ein anfänglich steilerer Verlauf der Zug-Dehnungslinie nicht vorhanden ist, daß vielmehr für kleine Spannungen die Zug-Dehnungslinie fast genau so verläuft wie die Druck-Dehnungslinie. Die sich ergebenden Abweichungen dürften — jedenfalls zu einem Teile — auf den schon früher vom Verfasser festgestellten Umstand zurückzuführen sein, daß das gegenseitige Verhältnis zwischen Zug- und Druckelastizität bei Gußeisen stark beeinflußt wird davon, ob und in welchem Maße der untersuchte Körper vorher belastet worden war. In dieser Hinsicht seien noch die folgenden Versuchsergebnisse mitgeteilt.

Der zu den Versuchsreihen 1 bis 4 verwendete

Gußeisenkörper III

wurde einem Druck von $P = 90000$ kg, d. i. 1841 kg/qcm, 15 Minuten lang ausgesetzt und sodann den aus folgender Zusammenstellung ersichtlichen Belastungswechseln unterworfen. Da

[1]) Um über diesen Punkt sowie über einige andere Verhältnisse Klarheit zu schaffen, hat Verfasser Herrn Dr. ing. Otto Berner, damals Assistenten der Materialprüfungsanstalt an der Techn. Hochschule Stuttgart, Anregung gegeben, Elastizitätsversuche mit Gußeisen und Flußeisen derart durchzuführen, daß ein und derselbe Körper der Zug- und Druckprobe unterworfen wird, wie in § 8 näher angegeben ist. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in der 1903 erschienenen Schrift von Berner: „Untersuchungen über den Einfluß der Art und des Wechsels der Belastung auf die elastischen und bleibenden Formänderungen“ veröffentlicht worden. Hinsichtlich der Klarstellungen, welche die Schrift bringt, muß auf diese verwiesen werden.

bei der Höhe der Belastung die Skala des Instrumentes für eine Meßlänge des Körpers von 50 cm nicht mehr ausreichte, so wurde eine kürzere Meßlänge und zwar $l = 15$ cm — in der Mitte der früheren liegend — gewählt.

Temperatur schwankt zwischen 19,3 und 19,2° C.

Belastungsstufe in kg						Zusammendrückungen auf 15 cm in $^1/_{600}$ cm		
gesamte			kg/qcm			gesamte	bleibende	federnde
24	und	5024	0,49	und	102,74	0,96	0,00	0,96
24	-	10024	0,49	-	204,99	2,00	0,00	2,00
24	-	20024	0,49	-	409,49	4,15	0,00	4,15
24	-	30024	0,49	-	613,99	6,375	0,04	6,335
24	-	40024	0,49	-	818,49	8,61	0,065	8,545
24	-	50024	0,49	-	1022,99	10,92	0,10	10,82
24	-	60024	0,49	-	1227,48	13,265	0,14	13,125
24	-	70024	0,49	-	1431,98	15,66	0,21	15,45

Werden für die Koeffizienten α und m der Gleichung 1 solche Werte eingeführt, daß

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,217\,000}\,\sigma^{1,052} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

und werden sodann die hieraus berechneten Zusammendrückungen mit den beobachteten verglichen, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

Spannungsstufe in kg/qcm			Versuchswert	Berechnet nach Gl. 6	Unterschied
0,49	und	102,74	0,960	0,963	+ 0,003
0,49	-	204,99	2,00	1,995	— 0,005
0,49	-	409,49	4,15	4,137	— 0,013
0,49	-	613,99	6,335	6,336	+ 0,001
0,49	-	818,49	8,545	8,575	+ 0,030
0,49	-	1022,99	10,82	10,814	— 0,006
0,49	-	1227,48	13,125	13,136	+ 0,011
0,49	-	1431,98	15,45	15,449	— 0,001

Auch hier ist die Übereinstimmung der beobachteten und der auf Grund der Gleichung 6 berechneten Zusammendrückungen eine sehr gute.

Gleichung 5 verglichen mit Gleichung 6 lehrt, daß durch vorhergegangene starke Druckbelastung α von $\frac{1}{1043000}$ auf $\frac{1}{1217000}$ vermindert, m dagegen von 1,035 auf 1,052 vergrößert wird. Hierdurch wird die Federung gegenüber Druck (Gleichung 5 und 6) der Federung gegenüber Zug (Gleichung 4) genähert.

Gußeisenkörper IV.

Material von dem gleichen Guß, wie Körper III bearbeitet.

Querschnitt des mittleren prismatischen Teiles . . . . . 6,99 . 7,00 = 48,9 qcm
Gewicht . . . . . 29,81 kg

Zug.

Nach vorhergegangener Belastung mit 40000 kg entsprechend 818 kg/qcm, was bei Gußeisen für Zug als Überlastung bezeichnet werden muß, wurde der Körper den aus folgender Zusammenstellung ersichtlichen Belastungswechseln unterworfen.

Temperatur schwankt zwischen 19,5 und 19,6° C.

Belastungsstufe in kg		Federnde Ausdehnungen auf 50 cm in $^1/_{600}$ cm		
gesamte	kg/qcm	beobachtet	berechnet nach Gl. 7	Unterschied
21 und 500	0,43 und 10,22	0,33	0,326	— 0,004
21 - 1000	0,43 - 20,45	0,695	0,711	+ 0,016
21 - 2000	0,43 - 40,90	1,53	1,536	+ 0,006
21 - 3000	0,43 - 61,35	2,41	2,405	— 0,005
21 - 4000	0,43 - 81,80	3,295	3,304	+ 0,009
21 - 5000	0,43 - 102,25	4,185	4,226	+ 0,041
21 - 10000	0,43 - 204,50	8,96	9,072	+ 0,112
21 - 20000	0,43 - 409,00	19,49	19,457	— 0,033

Die Übereinstimmung der beobachteten Federungen mit den auf Grund der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,150\,000}\,\sigma^{1,1} \quad \ldots\ldots\ 7)$$

berechneten muß als eine befriedigende bezeichnet werden.

Der Vergleich der Zahlenwerte in Gleichung 7 mit denjenigen in Gleichung 4 zeigt, daß sich für den vorher überlasteten Körper sowohl α als auch m größer ergeben haben.

Druck.

Nach vorhergegangener Belastung durch 90000 kg, entsprechend 1841 kg/qcm.

Temperatur schwankt zwischen 19,3 und 19,2° C.

Belastungsstufe in kg		Federnde Zusammendrückungen auf 15 cm in $^1/_{600}$ cm		
gesamte	kg/qcm	beobachtet	berechnet nach Gl. 8	Unterschied
24 und 5024	0,49 und 102,74	1,012	1,024	+ 0,012
24 - 10024	0,49 - 204,99	2,122	2,115	— 0,007
24 - 20024	0,49 - 409,49	4,445	4,373	— 0,072
24 - 30024	0,49 - 613,99	6,80	6,687	— 0,113
24 - 40024	0,49 - 818,49	9,11	9,039	— 0,071
24 - 50024	0,49 - 1022,99	11,47	11,420	— 0,050
24 - 60024	0,49 - 1227,48	13,845	13,824	— 0,021
24 - 70024	0,49 - 1431,98	16,245	16,247	+ 0,002

Eine Prüfung der dritten und vierten Spalte zeigt auch hier, daß die aus

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,124\,000}\,\sigma^{1,048} \quad \ldots\ldots\ 8)$$

berechneten Werte befriedigend mit den beobachteten übereinstimmen.

Der Vergleich von Gleichung 7 mit Gleichung 8 bestätigt sodann die oben gemachte Feststellung, daß die Linie der Federungen auf der Zugseite in der Nähe des Koordinatenanfanges etwas steiler verläuft als auf der Druckseite.

Doch ist der Unterschied hier weit geringer als im Falle des Gußeisenkörpers III (s. Gl. 4 und 5). Es steht dies damit in Übereinstimmung, daß auch bei letzterem durch vorherige starke Belastung der Unterschied vermindert wurde (s. Gl. 5 und 6).

Zusammenstellung der für die besprochenen 4 Gußeisenkörper erhaltenen Elastizitätsgleichungen:

Für **Zug,**

wenn vorher nicht belastet

(Körper III) $$\varepsilon = \frac{1}{1\,338\,000}\,\sigma^{1{,}083} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

wenn vorher stark belastet

(Körper IV) $$\varepsilon = \frac{1}{1\,150\,000}\,\sigma^{1{,}1} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Für **Druck,**

wenn vorher nicht belastet

(Körper I) $$\varepsilon = \frac{1}{1\,320\,000}\,\sigma^{1{,}0685} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

wenn vorher noch nicht durch Druck belastet

(Körper III) $$\varepsilon = \frac{1}{1\,043\,000}\,\sigma^{1{,}035} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

wenn vorher stark durch Druck belastet

(Körper III) $$\varepsilon = \frac{1}{1\,217\,000}\,\sigma^{1{,}052} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

(Körper IV) $$\varepsilon = \frac{1}{1\,124\,000}\,\sigma^{1{,}048} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Wie bereits oben bemerkt, muß es zunächst noch dahingestellt bleiben, inwieweit die Ermittlungen, betr. das Verhältnis zwischen Zug- und Druckelastizität, allgemeine Gültigkeit haben, oder ob sie nur für die untersuchten Gußeisenkörper Geltung besitzen.

Bei Beurteilung der für α und m der Gleichung 1 gewonnenen Zahlenwerte ist überdies im Auge zu behalten, daß sie sich unter der Voraussetzung ergeben, das Material sei auf der

Meßlänge l von gleicher Beschaffenheit und gleich dicht, es seien also bei prismatischer Form des Versuchskörpers vom Querschnitt f sowohl die Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ als auch die Dehnung $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ an allen Stellen der Strecke l gleich groß. Daß diese Voraussetzung, namentlich bei gegossenen Körpern von größerem Querschnitt, welche Hohlstellen im Inneren besitzen können und auch hinsichtlich der Dichte Veränderlichkeit zu zeigen pflegen derart, daß dieselbe von außen nach innen abnimmt, im allgemeinen nicht — jedenfalls nicht streng — erfüllt sein wird, liegt bei der Natur solcher Gußstücke auf der Hand.

Im allgemeinen ist festzuhalten, daß der Dehnungskoeffizient auch mit der Beschaffenheit des Gußeisens ganz erheblich schwankt, und zwar viel stärker als bei dem schmiedbaren Eisen und Stahl. In neuerer Zeit durchgeführte Versuche mit Gußeisen von hoher Festigkeit (hochwertiges Gußeisen), ferner mit Gußeisen, welches für Hartguß bestimmt, und mit solchem, welches durch ganze oder teilweise Abschreckung in Hartguß übergeführt worden war, gewähren einen lehrreichen Einblick nach dieser Richtung hin. So fand sich beispielsweise für das hochwertige Gußeisen (durchschnittliche Zugfestigkeit bis rund 2400 kg/qcm, durchschnittliche Biegungsfestigkeit unbearbeiteter Quadratstäbe bis rund 4400 kg/qcm) bei der Zugprobe der Dehnungskoeffizient der Federung

Spannungsstufe	Dehnungskoeffizient
160,1 und 480,3 kg/qcm	$\frac{1}{1\,143\,000}$
480,3 - 800,5 -	$\frac{1}{970\,300}$
800,5 - 1120,7 -	$\frac{1}{835\,300}$
1120,7 - 1440,9 -	$\frac{1}{687\,100}$
1440,9 - 1761,1 -	$\frac{1}{545\,200}$

Das zu Hartguß bestimmte Gußeisen zeigt kleinere Werte, während das Gußeisen, wie es für gewöhnlich zu gutem Maschinenguß Verwendung findet, erheblich größere Werte und besonders

zähes Gußeisen noch größere Werte besitzt. Fig. 6, welche die Linienzüge der gesamten Dehnungen, und Fig. 7, welche diejenigen der federnden Dehnungen, je in $^1/_{1000}$ cm für 15 cm Meßlänge gültig, enthält, lassen dies deutlich an der mehr oder minder großen Steilheit des Verlaufs erkennen.

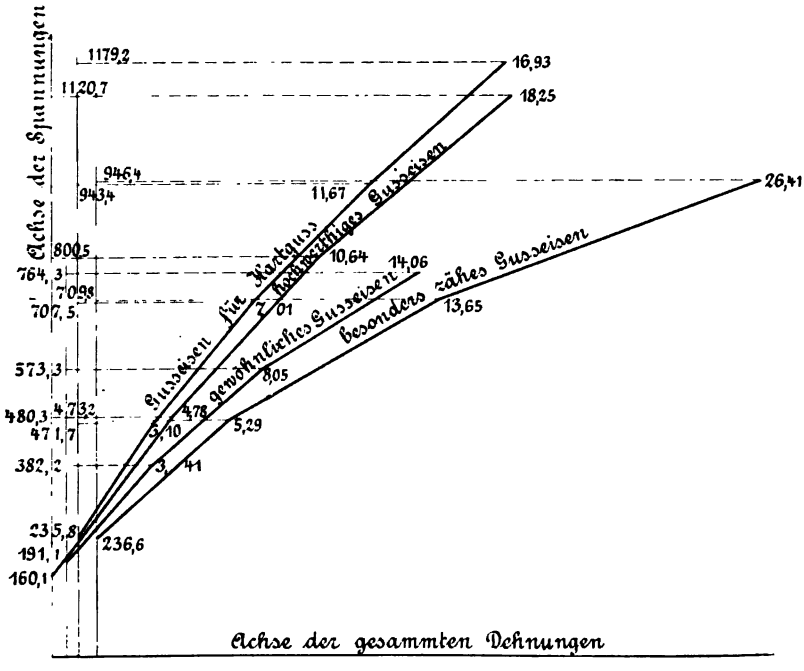


Fig. 6.

Der Hartguß ergab bei der Zugprobe weit kleinere und weniger veränderliche Dehnungskoeffizienten, z. B.

Spannungsstufe				Dehnungskoeffizient
13,3	und	133,0	kg/qcm	$\frac{1}{1\,870\,000}$
133,0	-	266,1	-	$\frac{1}{1\,775\,000}$
266,1	-	532,2	-	$\frac{1}{1\,750\,000}$
532,2	-	798,3	-	$\frac{1}{1\,710\,000}$

Hiernach hat das Abschrecken des Gußeisens einen sehr großen Einfluß auf die Größe des Dehnungskoeffizienten[1]).

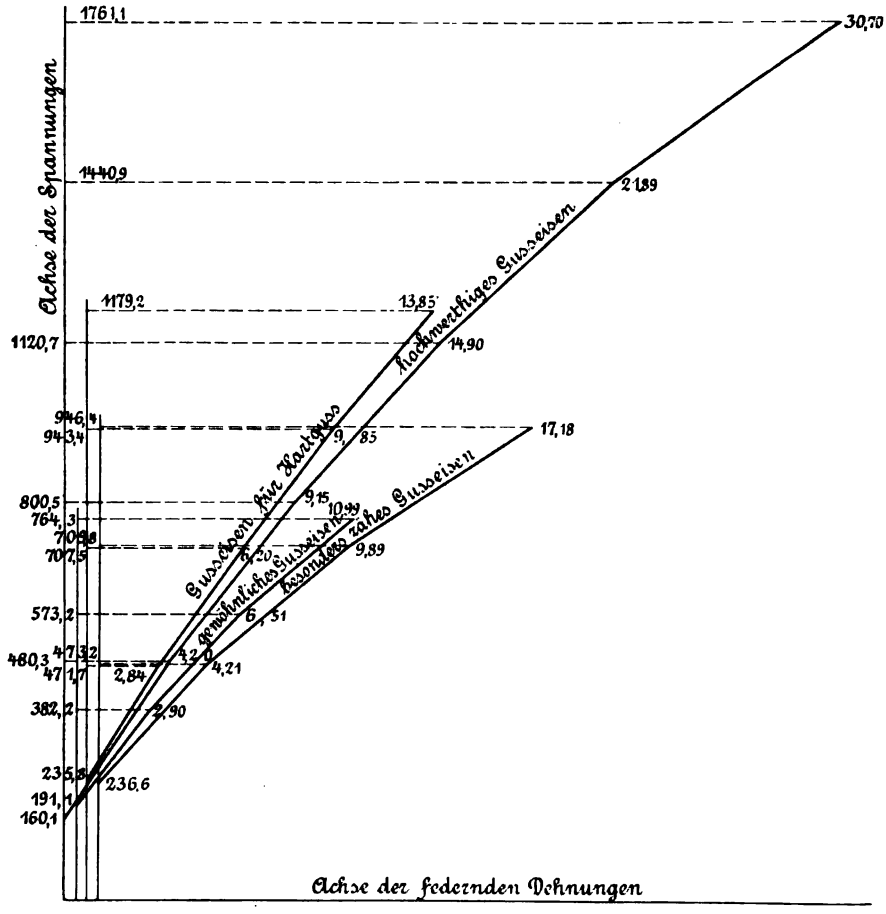


Fig. 7.

[1]) Für schmiedbaren Stahl dagegen sind bis jetzt nur unerhebliche Unterschiede des Dehnungskoeffizienten festgestellt worden, wenn er im gehärteten und ungehärteten Zustand untersucht wird. Stribeck ermittelte für Gußstahl, wie er von den deutschen Waffen- und Munitionsfabriken in Berlin zu Stahlkugeln für Lager verwendet wird, durch Druckversuche mit 48 mm hohen Zylindern (Meßlänge 32 mm):

1. $\alpha = \frac{1}{2\,127\,000}$, Zylinder ungehärtet,
2. $\alpha = \frac{1}{2\,128\,000}$, - in Öl gehärtet.

Hinsichtlich weiterer Einzelheiten, namentlich über die Elastizitätsverhältnisse der nur einseitig abgeschreckten Stäbe, muß auf des Verfassers Arbeiten in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 857 u. f. (Hartguß) und 1900, S. 409 u. f. (hochwertiges Gußeisen) verwiesen werden[1]).

Für die Dehnungslinie bis zum Bruch ergibt sich bei Gußeisen, wie es für gewöhnlich zu gutem Maschinenguß verwendet wird, die Kurve $O\,G$ in Fig. 8[2]). Für andere Gußeisensorten ergeben sich Linien von dem gleichen Verlaufe. Das Arbeitsvermögen (§ 3) wird demnach bei Gußeisen durch eine Fläche von der Gestalt $O\,G\,G_2$ gemessen. Ihre Größe — etwa 0,08 kgm/ccm für das in den Fig. 6 und 7 als gewöhnliches Gußeisen bezeichnete Material und etwa 0,14 kgm/ccm für das daselbst genannte hochwertige Gußeisen — beträgt nur einen sehr kleinen Bruchteil von der Fläche, welche z. B. das Arbeitsvermögen des Flußeisens (Fig. 10) liefert (Fig. 10 und 8 sind in demselben Maßstab gezeichnet).

Fig. 8.

Querschnittsverminderung und Bruchdehnung sind selbst bei zähem Gußeisen so gering, daß für gewöhnlich eine Bestimmung unterbleibt.

2. *Versuche mit Flußeisen.*

Rundstab I.

Wir unterwerfen den aus zähem Flußeisen hergestellten Stab in einer liegenden Prüfungsmaschine der Zugprobe.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles	2,007 cm
Querschnitt - - - -	3,16 qcm
Meßlänge	15,00 cm.

3. $\alpha = \frac{1}{2\,102\,000}$, Zylinder in Wasser gehärtet.

Dagegen ergab sich die Proportionalitätsgrenze, welche im Falle Ziff. 1 zwischen 5500 und 6000 kg/qcm lag, im Falle Ziff. 3 bei etwa 9000 kg/qcm. In ähnlichem Maße zeigte sich die Elastizitätsgrenze nach oben verschoben (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 73 u. f.).

[1]) Diese Arbeiten finden sich auch in Heft 1 der vom Vereine deutscher Ingenieure herausgegebenen Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin 1901.

[2]) In dieser Darstellung ist genau bestimmt die Höhe $G_2\,G$ und der Verlauf der Linie $O\,G$, soweit sie ausgezogen ist. Vor Eintritt des Bruches müssen die

Der neue, noch keiner Belastung unterworfen gewesene Stab wird zunächst mit $P = 1000$ kg und sodann abwechselnd mit $P = 3000$ kg belastet und bis auf $P = 1000$ kg entlastet[1]). Hieran schließt sich der Belastungswechsel $P = 1000$ und 5000 kg sowie $P = 1000$ und 6000 kg. In jedem Falle wurden Belastung und Entlastung so lange gewechselt, bis sich die gesamten, die bleibenden und die federnden Verlängerungen nicht mehr änderten. Dazu ist auch hier schon zu Anfang mehrmaliger Belastungswechsel erforderlich.

Die Ablesungen der Dehnungen erfolgen in Zwischenräumen von 3 Minuten.

Temperatur schwankt zwischen 17,6 und 17,8° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
1000 und 3000 kg	316,5 und 949,4	4,61	0,17	4,44
1000 - 5000 -	316,5 - 1582,3	9,21	0,22	8,99
1000 - 6000 -	316,5 - 1898,7	11,90	0,63	11,27

Wie ersichtlich, wachsen die federnden Dehnungen etwas rascher als die Spannungen, denn es beträgt

für die erste Stufe von 2000 kg die Federung 4,44
- - zweite - - 2000 - - - $8{,}99 - 4{,}44 = 4{,}55$
- - dritte - - 1000 - - - $11{,}27 - 8{,}99 = 2{,}28$.

Instrumente zum Messen der Verlängerungen abgenommen werden, damit sie durch den Bruch nicht beschädigt werden; infolgedessen kann die Bestimmung der Verlängerungen in der Nähe des Bruches nicht mehr genau erfolgen, was durch Strichelung in Fig. 8 angedeutet ist.

[1]) Wenn ein Stab in liegender Maschine der Prüfung unterworfen wird, und man entlastet ihn vollständig, d. h. bis die in der Einspannvorrichtung gehaltenen Stabköpfe sich zu lösen beginnen, so liegt die Gefahr vor, daß die Anzeigen der Meßeinrichtung (hier Spiegelapparat, vergl. Fig. 4, § 8, S. 105, 110 u. f.) ungenau werden. Das läßt sich dadurch vermeiden, daß man mit der Entlastung nicht bis Null zurückgeht, sondern einen erheblichen Betrag darüber bleibt. Hierfür wurde im vorliegenden Falle $P = 1000$ kg gewählt, entsprechend $\sigma = \frac{1000}{3{,}16} = 316{,}5$ kg/qcm.

Beim Entlasten ist die Vorsicht zu gebrauchen, daß man jeweils etwas unter die Anfangsbelastung, d. i. hier 1000 kg, zurückgeht und alsdann vorwärtsschreitend auf dieselbe einstellt.

In Fig. 9 sind die Ausdehnungen nach dem in Fig. 1 u. f. gegebenen Vorgange eingetragen, und zwar von $\sigma = 316{,}5$ kg/qcm an gerechnet (vergl. Fußbemerkung S. 42).

Unter der Belastung von 6850 kg sinkt der Waghebel der Maschine auf seine Unterlage; beim Nachspannen verschwindet die Skala in den beiden Spiegeln der Meßvorrichtung: die Fließ- oder Streckgrenze (§ 2) ist erreicht. Sie liegt demgemäß bei

$$\sigma = \frac{6850}{3{,}16} = 2168 \text{ kg/qcm}^1).$$

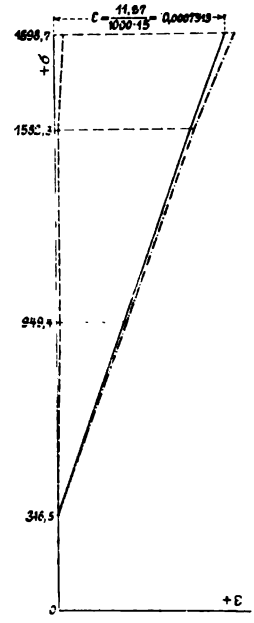


Fig. 9.

Nach dieser Feststellung wird der Stab entlastet und hierauf der Versuch, wie vorher durchgeführt, wiederholt. Dabei ergibt sich

für den Belastungswechsel	1000/3000	1000/5000	1000/6000 kg
die Federung	4,50	9,01	11,28
somit Unterschied . . .	4,51	2,27	

also die Federung nur wenig wachsend mit der Spannung.

Mit der Federung 4,50 für die erste Belastungsstufe der zweiten Versuchsreihe findet sich der durch Gleichung 3, § 2 bestimmte Dehnungskoeffizient zu

$$\alpha = \frac{4{,}5}{1000 \,.\, 15\,(949{,}4 - 316{,}5)} = \frac{1}{2\,109\,700}.$$

Bei erneuter Steigerung der Belastung über 6000 kg hinaus ist die Streckgrenze — durch Sinken des Waghebels auf seine Unterlage — jetzt bei $P = 6500$ kg zu beobachten, entsprechend

$$\sigma = \frac{6500}{3{,}16} = 2057 \text{ kg/qcm}.$$

---

[1]) Auf die Ermittlung auch der unteren Streckgrenze (vergl. § 2) wird S. 49 und 50 eingegangen werden.

Nachdem durch Nachspannen eine Verlängerung der Meßstrecke $l = 15$ cm um 0,14 cm erfolgt ist, beginnt der Waghebel wieder zu steigen und einzuspielen, hierdurch anzeigend, daß die inneren Kräfte, mit welchen der Stab der Verlängerung widersteht, die Größe von 2057 kg/qcm wieder erreicht haben und zu überschreiten anfangen. Bei Fortsetzung des Nachspannens steigt die Belastung stetig, bis sie mit $P_{max} = 11\,840$ kg ihren Größtwert

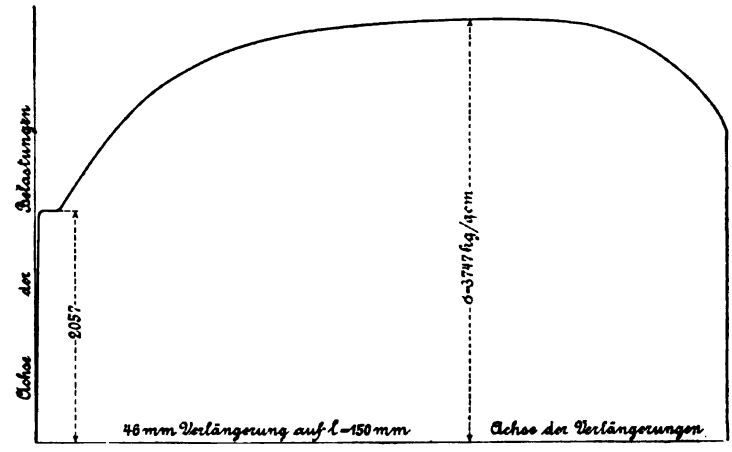


Fig. 10.

erreicht (vergl. § 3, Fig. 1). Alsdann sinkt der Waghebel — nachdem er vorher einige Zeit hindurch eingespielt hatte —, der Stab beginnt sich einzuschnüren (vergl. § 3), und schließlich erfolgt der Bruch an der stark eingeschnürten Stelle unter rund $P = 8700$ kg[1]) Belastung, entsprechend $\sigma = \frac{8700}{3{,}16} = 2753$ kg/qcm.

In Fig. 10 ist der Verlauf der Linie der gesamten Dehnungen, wie sie sich für den untersuchten Flußeisenstab bei dem zweiten Versuch ergab, unter Zugrundelegung der Meßlänge von ursprünglich 15 cm, eingetragen. Derselbe ist nicht unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die Belastung gesteigert, d. h. von der Raschheit, mit welcher der Stab gedehnt wird.

[1]) Eine genaue Feststellung dieser Belastung begegnet Schwierigkeiten. (Vergl. Fußbemerkung 1 S. 9.)

Die Zugfestigkeit beträgt

$$K_z = \frac{11\,840}{3{,}16} = 3747 \text{ kg/qcm.}$$

Die Messung des mittleren Durchmessers des Bruchquerschnittes liefert 1,23 cm, entsprechend $f_b = \frac{\pi}{4} 1{,}23^2 = 1{,}19$ qcm (vergl. § 3); somit ist nach Gleichung 2, § 3 die Querschnittsverminderung

$$\psi = 100 \frac{3{,}16 - 1{,}19}{3{,}16} = 62{,}3\,\%.$$

Nach dem Bruche zeigt das mittlere, ursprünglich 20 cm lange Stabstück 25,48 cm Länge; infolgedessen ergibt sich nach Gleichung 3, § 3 die Bruchdehnung zu

$$\varphi = 100 \frac{25{,}48 - 20{,}0}{20{,}0} = 27{,}4\,\%.$$

Das nach Maßgabe der Gleichung 4, § 3 bestimmte Arbeitsvermögen beträgt $A = 6{,}76$ kgm/ccm.

Rundstab II.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles 2,495 cm
Querschnitt - - - - 4,89 qcm
Meßlänge . . . . . 10,00 cm.

Der Stab, welcher aus ausgeglühtem Material besteht und vorher noch keiner Prüfung unterworfen ist, wird in derselben Weise wie Rundstab I geprüft und liefert folgende Ergebnisse:

Versuchsreihe 1.

Temperatur schwankt zwischen 17,0 und 17,2° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
1000 und 3000 kg	204,5 und 613,5	2,99	0,05	2,94
1000 - 5000 -	204,5 - 1022,5	5,98	0,11	5,87
1000 - 7000 -	204,5 - 1431,5	8,95	0,16	8,79
1000 - 9000 -	204,5 - 1840,5	11,92	0,21	11,71

Die Wiederholung des Versuchs liefert:

Versuchsreihe 2.

Temperatur schwankt zwischen 17,2 und 17,4° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
1000 und 3000 kg	204,5 und 613,5	2,93	0,00	2,93
1000 - 5000 -	204,5 - 1022,5	5,89	0,02	5,87
1000 - 7000 -	204,5 - 1431,5	8,85	0,06	8,79
1000 - 9000 -	204,5 - 1840,5	11,80	0,09	11,71

Hiernach betragen die gesamten Ausdehnungen:

1. Versuchsreihe	2,99	5,98	8,95	11,92
Unterschied	2,99	2,99	2,97	2,97
2. Versuchsreihe	2,93	5,89	8,85	11,80
Unterschied	2,93	2,96	2,96	2,95

Die federnden Ausdehnungen:

1. Versuchsreihe	2,94	5,87	8,79	11,71
Unterschied	2,94	2,93	2,92	2,92
2. Versuchsreihe	2,93	5,87	8,79	11,71
Unterschied	2,93	2,94	2,92	2,92

Mit Rücksicht auf den Grad der Genauigkeit, mit welcher bei den Prüfungsmaschinen die Einstellung auf eine bestimmte Belastung erfolgen, und mit welcher sodann die Dehnung selbst ermittelt werden kann, sowie in Anbetracht des Einflusses der nicht ganz fernzuhaltenden kleinen Temperaturänderungen[1]) — hier um

[1]) Bei dem verwendeten Meßinstrument, dessen in Betracht kommende Teile wegen der geringen Querschnittsabmessungen den Temperaturänderungen rascher folgen als der verhältnismäßig dicke Versuchsstab (vergl. Fig. 4, S. 105), äußert sich der Einfluß der kleinen Temperaturzunahme in einer solchen Weise, daß eine kleine Abnahme der beobachteten Dehnungen zu erwarten steht. Tatsächlich zeigt sich auch eine solche Abnahme. Vergl. auch das in § 8, S. 113 Gesagte.

0,2° C. — während einer Versuchsreihe, darf die Unveränderlichkeit der Federungen bis $\sigma = \frac{9000}{4,89} = 1840,5$ kg/qcm als wirklich vorhanden angesehen werden. Fig. 11, welche mit den bei der ersten Versuchsreihe gewonnenen Ausdehnungen hergestellt wurde, bestätigt dies.

Mit der Federung 2,93 folgt nach Gleichung 3, § 2:

$$\alpha = \frac{2,93}{1000 \,.\, 15\,(613,5 - 204,5)} = \frac{1}{2094000}.$$

Die bleibenden Dehnungen ergeben sich für die zweite Versuchsreihe weit geringer als bei der ersten, was zu erwarten war.

Bei Steigerung der Belastung über $P = 9000$ kg hinaus zeigt sich plötzliches Sinken des Waghebels der Maschine bei $P = 10500$ kg; die obere Streckgrenze wurde somit bei

$$\frac{10500}{4,89} = 2147 \text{ kg/qcm}$$

erreicht.

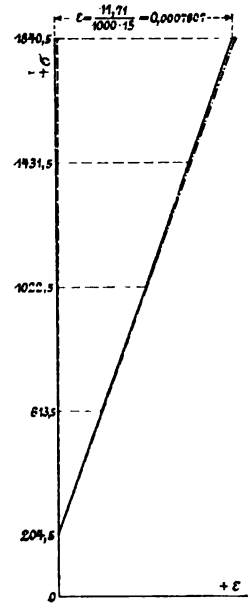


Fig. 11.

Um die Kraft festzustellen, welcher der sich streckende Stab unmittelbar nach Sinken des Waghebels das Gleichgewicht hält, wird die Wage stetig entlastet, bis wieder Einspielen stattfindet[1]). Dies tritt ein bei $P = 9900$, d. i. für $\sigma = \frac{9900}{4,89} = 2025$ kg/qcm. Bei längerer Fortsetzung des Nachspannens beginnt die Widerstandsfähigkeit des Stabes zu steigen, wie dies Fig. 12, welche auch den Belastungsabfall von 10500 kg auf 9900 kg zeigt, erkennen läßt. Nach Erreichung der Belastung von 11000 kg, d. i. $\frac{11000}{4,89} = 2249$ kg/qcm, fällt der Waghebel zum zweiten Male plötzlich, und zwar auf $P = 9800$ kg, entsprechend $\frac{9800}{4,89} = 2004$ kg/qcm. Bei dem nun

[1]) Im Falle der Fig. 10 geschah diese Feststellung nicht.

folgenden Nachspannen steigt die Belastung ziemlich rasch, wie Fig. 12 deutlich angibt.

P_{max} tritt bei 17 050 kg ein, entsprechend der Zugfestigkeit $K_z = \frac{17\,050}{4{,}89} = 3487$ kg/qcm.

Die Belastung hält sich ziemlich lange auf dieser Höhe, wie ebenfalls aus Fig. 12 zu ersehen ist. Die letzte Belastung, welche

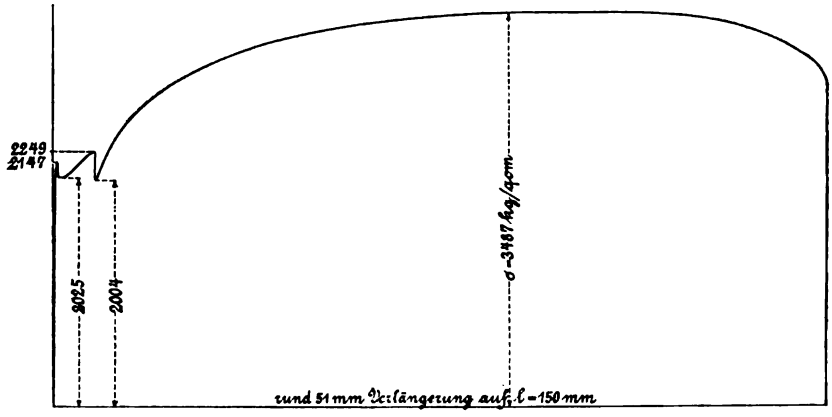


Fig. 12.

unmittelbar vor dem Bruche und nach weitgehender Einschnürung des Bruchquerschnittes beobachtet werden konnte, beträgt $P = 13\,500$ kg, d. i. 2761 kg/qcm.

Da $f_b = \frac{\pi}{4}\,1{,}54^2 = 1{,}86$ qcm, so liefert Gleichung 2, § 3 die Querschnittsverminderung

$$\psi = 100\,\frac{4{,}89 - 1{,}86}{4{,}89} = 62\,\%$$

und wegen $l_b = 323{,}7$ bei 250 mm ursprünglicher Länge findet sich nach Gleichung 3, § 3 die Bruchdehnung

$$\varphi = 100\,\frac{323{,}7 - 250}{250} = 29{,}5\,\%.$$

Rundstab III.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles	2,60 cm
Querschnitt - - - -	5,31 qcm
Meßlänge	26,00 cm.

Der Stab, welcher aus ausgeglühtem Material besteht, wird der Prüfung insbesondere behufs Ermittelung der oberen und unteren Streckgrenze (§ 2) unterworfen; weiter sollen festgestellt werden: Zugfestigkeit, Bruchdehnung und Querschnittsverminderung.

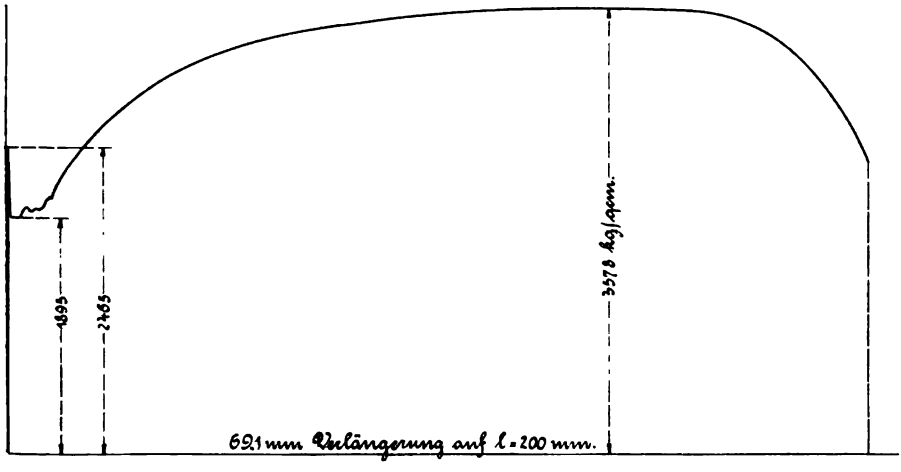


Fig. 13.

Zu dem bezeichneten Zweck werde ein Selbstzeichner verwendet, d. h. eine Vorrichtung angeordnet, welche die Dehnungslinie selbsttätig aufzeichnet[1]).

[1]) Die Einrichtung ist derart, daß der in senkrechter Richtung sich bewegende Schreibstift von dem Laufgewicht der Wage, dessen Stellung die Größe der Belastung bestimmt, betätigt wird, während die um eine senkrechte Achse sich drehende Papiertrommel ihre Bewegung von dem fortschreitenden Einspannkopf der Prüfungsmaschine erhält. Es werden also nicht bloß — wie zu wünschen ist — die Dehnungen des mittleren zylindrischen Teiles des Versuchsstabes auf die Papiertrommel übertragen, sondern auch die übrigen Formänderungen, die sich unter der jeweiligen Belastung einstellen, insoweit sie die Lage des unteren Einspannkopfes der stehenden Maschine beeinflussen. Die Darstellung

Der Versuch liefert die in Fig. 13 dargestellte Dehnungslinie mit den eingetragenen Spannungen. Die Dehnungen sind zurückgeführt auf die in der Mitte des Stabes gelegene Meßstrecke von ursprünglich 20 cm Länge (vergl. Fußbemerkung 1, S. 9).

Wir erkennen: Beginn des Streckens bei 2465 kg/qcm Belastung, sofortiges Fallen der letzteren auf 1895 kg/qcm, Fortsetzung des Streckens unter dieser Belastung, später geringes Aufsteigen und folgendes Schwanken der Belastung, bis sich schließlich wieder stetiges und ausgeprägtes Wachstum der letzteren einstellt, das bis zur Überwindung der Zugfestigkeit von 3578 kg/qcm andauert.

Somit ergibt sich

die obere Streckgrenze zu . . .	σ_o	= 2465 kg/qcm
- untere - - . . .	σ_u	= 1895 -
- Zugfestigkeit - . . .	K_z	= 3578 -

Die Querschnittsverminderung und die Bruchdehnung werden auf dem bereits für Rundstab I und II angegebenen Weg ermittelt zu

$$\psi = 71{,}0\,\% \qquad \varphi = 31{,}9\,\%.$$

---

der Dehnungen ist somit keine reine und auf die Meßlänge des Stabes beschränkte, ganz abgesehen von den etwaigen Unvollkommenheiten der Übertragung der Bewegung von dem Einspannkopf auf die Papiertrommel.

In bezug auf die Darstellung der Belastungen ist zu beachten, daß das Laufgewicht, von dem aus der Schreibstift seine Bewegung erhält, jeweils von Hand so eingestellt werden muß, daß die Wage einspielt. Bei rasch vor sich gehender Änderung der Kraft, die eben durch Verstellung des Laufgewichts gemessen werden soll, kann die Einstellung des letzteren mit einiger Schwierigkeit verknüpft sein. Aus diesem Grunde werden in solchen Fällen Ungenauigkeiten hinsichtlich der Darstellung der Belastungsänderungen nicht zu vermeiden sein. Bei vorhandener Übung und bei sorgfältigem Verfahren desjenigen, der den Versuch durchzuführen hat, pflegen diese Ungenauigkeiten übrigens nicht bedeutend zu sein.

Ist hiernach die Darstellung des Verlaufs der Dehnungslinie während der Streckperiode durch den Selbstzeichner nicht vollständig genau, so gewährt sie doch ein anschauliches Bild von dem eigenartigen Verhalten des Materials unter den Verhältnissen, bei denen die Streckung vor sich geht.

Die Zurückführung auf die Meßlänge des Stabes, also die Ausscheidung der außerhalb dieser Strecke auftretenden Formänderungen, erfolgt nach Maßgabe des in der Fußbemerkung 1 S. 9 angegebenen Verfahrens.

Rundstab IV.

Abmessungen und Untersuchung des Stabes IV genau wie bei Rundstab III; beide sind derselben Stange Flußeisen entnommen.

Der Versuch liefert die Größen:

$$\sigma_o = 2407 \text{ kg/qcm},$$
$$\sigma_u = 2075 \text{ -}$$
$$K_z = 3667 \text{ -}$$
$$\psi = 69{,}7\,\%,$$
$$\varphi = 33{,}8 \text{ -}$$

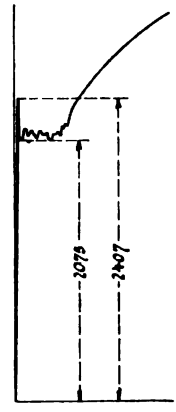


Fig. 14.

und die Dehnungslinie Fig. 14, deren Vergleich mit Fig. 13 erkennen läßt, daß sich das Material aus einer und derselben Stange innerhalb der Periode des Streckens oder Fließens nicht gleich verhält. Die Unterschiede sind oft noch weit erheblicher.

3. Versuche mit Flußstahl.

Rundstab.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles	2,00 cm
Querschnitt - - - -	3,14 qcm
Meßlänge	15,00 cm.

Der Stab wird in einer liegenden Prüfungsmaschine der Zugprobe unterworfen, jeweils unter Wechsel zwischen Belastung und Entlastung, so oft, bis sich die gesamten, bleibenden und federnden Dehnungen nicht mehr ändern.

Die Ablesungen der Längenänderungen erfolgen in Zeiträumen von 3 Minuten.

Temperatur schwankt zwischen 16,4 und 16,5° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm				
gesamte	kg/qcm	gesamte	Unterschied	bleibende	federnde	Unterschied
			4,47			4,47
1000 und 3000	318,5 und 955,4	4,47		0,00	4,47	
			4,72			4,47
1000 - 5000	318,5 - 1592,4	9,19		0,25	8,94	
			4,54			4,49
1000 - 7000	318,5 - 2229,3	13,73		0,30	13,43	
			4,76			4,49
1000 - 9000	318,5 - 2866,2	18,49		0,57	17,92	
			4,79			4,48
1000 - 11000	318,5 - 3503,2	23,28		0,88	22,40	
			4,60			4,48
1000 - 13000	318,5 - 4140,1	27,88		1,00	26,88	
			2,31			2,24
1000 - 14000	318,5 - 4458,6	30,19		1,07	29,12	
			3,55			
1000 - 15000	318,5 - 4777,1	33,74				

Nachdem $P = 15000$ kg eingestellt ist, sinkt der Waghebel plötzlich, so daß die Streckgrenze bei

$$\sigma = \frac{15000}{3{,}14} = 4777 \text{ kg/qcm}$$

erreicht ist.

Bei Fortsetzung des Nachspannens beginnt die Belastung wieder zu steigen und erlangt mit $P_{max} = 22720$ kg ihren Größtwert; alsdann sinkt der Waghebel, der Stab beginnt sich einzuschnüren, und schließlich erfolgt der Bruch.

Wie die letzte Spalte der Zusammenstellung der Ausdehnung zeigt, wachsen die Federungen bis $P = 14000$ kg unter Berücksichtigung des tatsächlich erreichbaren Genauigkeitsgrades recht befriedigend in gleichem Verhältnis wie die Spannungen[1]). Fig. 15, welche nach dem Vorgange von Fig. 1 u. f. die Schaulinien der gesamten, bleibenden und federnden Dehnungen enthält, zeigt den geradlinigen Verlauf der Federungen. Wir haben demgemäß Proportionalität jedenfalls bis zur Spannung

$$\sigma = \frac{14000}{3{,}14} = \sim 4459 \text{ kg/qcm.}$$

[1]) Die gesamten Ausdehnungen tun dies weniger.

Da auf der folgenden Belastungsstufe $P = 15000$ kg die Erscheinung des Fließens eintrat, so ist anzunehmen, daß die Proportionalität sich nur unerheblich über $P = 14000$ kg hinaus erstreckt haben wird, weshalb die Proportionalitätsgrenze als nur wenig oberhalb 4459 kg/qcm liegend angenommen werden kann[1]).

Der Dehnungskoeffizient berechnet sich mit $\frac{4{,}48}{1000}$ cm Federung auf 15 cm bei 2000 kg Belastungsunterschied nach Gleichung 3, § 2 zu

$$\alpha = \frac{4{,}48 \,.\, 3{,}14}{1000 \,.\, 15 \,.\, 2000} = \sim \frac{1}{2\,133\,000}.$$

Die Streckgrenze ist bei

$$\frac{15000}{3{,}14} = \sim 4777 \text{ kg/qcm}$$

anzunehmen.

Die Zugfestigkeit beträgt

$$K_z = \frac{22720}{3{,}14} = \sim 7236 \text{ kg/qcm}.$$

Die durch Gleichung 2, § 3 bestimmte Querschnittsverminderung ergibt sich, da

$$f_b = \frac{\pi}{4} 1{,}51^2 = 1{,}79 \text{ qcm},$$

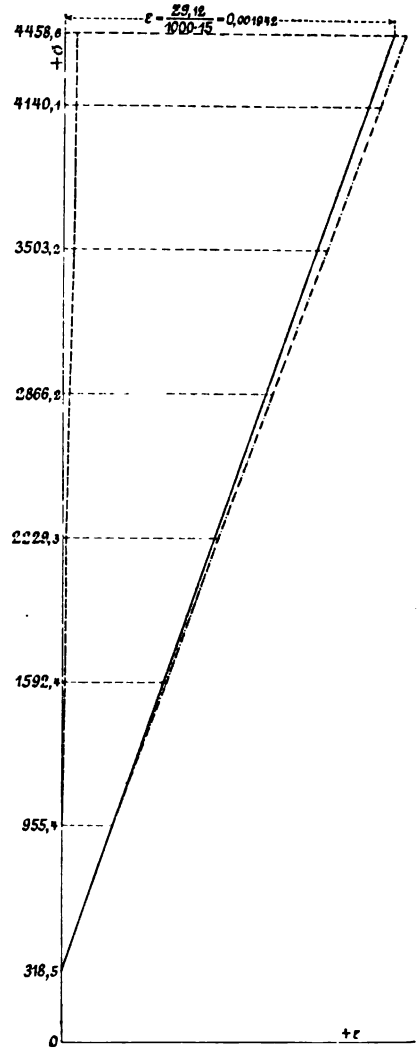


Fig. 15.

[1]) Scharf tritt hier die Unzulässigkeit hervor, die Begriffe der Proportionalitäts- und Elastizitätsgrenze (vergl. S. 21 und 22) miteinander zu vermengen. Die erstere liegt hier nahe bei 4459 kg, während die letztere, aufgefaßt als die-

zu

$$\psi = 100\,\frac{3{,}14 - 1{,}79}{3{,}14} = 43\,\%$$

und die Bruchdehnung nach Gleichung 3, § 3 mit $l_b = 238$ auf 200 mm ursprüngliche Länge zu

$$\varphi = 100\,\frac{238 - 200}{200} = 19\,\%.$$

Über die Ergebnisse der Untersuchung von Stahlguß hat Verfasser in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1898, S. 694 u. f. berichtet.

4. Versuche mit Kupfer.

Rundstab I.

Material: weiches Kupfer.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles . . . 2,502 cm

Querschnitt - - - - $\frac{\pi}{4}\,2{,}502^2 = 4{,}92$ qcm

Meßlänge . . . . . 10,00 cm.

Die Prüfung erfolgte zunächst ganz wie unter Ziff. 3 bemerkt, und wurde sodann wiederholt. Die Ergebnisse sind im folgenden zusammengestellt.

Belastungsstufe in kg		1. Versuchsreihe Temperatur 16,8 bis 17,1° C.			2. Versuchsreihe Temperatur 17,4 bis 17,5° C.		
		Ausdehnung auf 10 cm in $^1/_{1000}$ cm			Ausdehnung auf 10 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte λ	bleibende λ'	federnde $\lambda - \lambda'$	gesamte λ	bleibende λ'	federnde $\lambda - \lambda'$
750 und 1500	152,4 und 304,9	1,41	0,11	1,30	1,32	0,00	1,32
750 - 2250	152,4 - 457,3	3,18	0,53	2,65	2,68	0,00	2,68
750 - 3000	152,4 - 609,8	5,38	1,33	4,05	4,11	0,04	4,07
750 - 3750	152,4 - 762,2	8,05	2,52	5,53	5,68	0,15	5,53

jenige Spannung, bis zu welcher die bleibenden Formänderungen Null oder doch verschwindend klein sind, weit tiefer liegt (vergl. die Werte in der Spalte der bleibenden Ausdehnungen).

In Fig. 16 sind die Schaulinien, welche sich hiernach für die gesamten, die bleibenden und die federnden Dehnungen aus der 1. Versuchsreihe ergeben, dargestellt.

Wie ersichtlich, stellen sich bei der ersten Versuchsreihe bleibende Dehnungen außerordentlich früh und überhaupt von be-

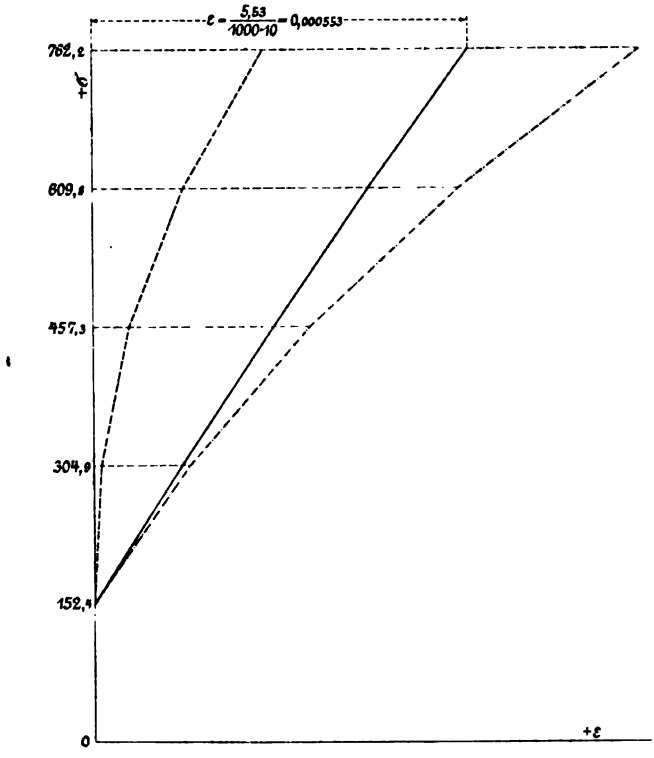


Fig. 16.

deutender Größe ein. Bei der zweiten Versuchsreihe dagegen treten die bleibenden Dehnungen ganz in den Hintergrund, eine Folge davon, daß der Stab schon einmal den Belastungswechseln ausgesetzt gewesen ist.

Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht nicht; denn es betragen die Unterschiede

	der gesamten Ausdehnungen				der federnden Ausdehnungen			
bei der 1. Versuchsreihe	1,41	1,77	2,20	2,67	1,30	1,35	1,40	1,48
- - 2. -	1,32	1,36	1,43	1,57	1,32	1,36	1,39	1,46,

d. h. ausgeprägt wachsend mit den Spannungen.

Wird den Federungen die durch Gleichung 1 ausgesprochene Gesetzmäßigkeit zugrunde gelegt, und werden dabei die Koeffizienten α und m so gewählt, daß für die erste Versuchsreihe

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,195\,000}\,\sigma^{1{,}098} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

und für die zweite Versuchsreihe

$$\varepsilon = \frac{1}{1\,865\,000}\,\sigma^{1{,}074} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

so zeigt folgende Zusammenstellung:

Spannungsstufe in kg/qcm	Federungen auf 10 cm in $^1/_{1000}$ cm			
	1. Versuchsreihe		2. Versuchsreihe	
	beobachtet	berechnet nach Gl. 9	beobachtet	berechnet nach Gl. 10
152,4 und 304,9	1,30	1,30	1,32	1,32
152,4 - 457,3	2,65	2,66	2,68	2,69
152,4 - 609,8	4,05	4,07	4,07	4,09
152,4 - 762,2	5,53	5,52	5,53	5,52

eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung.

Der Unterschied in den Zahlenwerten der Koeffizienten α und m der Gleichungen 9 und 10 läßt den Einfluß der vorhergegangenen Belastung auf die Federung deutlich erkennen.

Über die Anzahl der Spannungswechsel, welche jeweils erforderlich waren, um festzustellen, daß sich die gesamten, die bleibenden und die federnden Dehnungen nicht mehr ändern, gibt die folgende Zusammenstellung Auskunft. Ebenso darüber, wie sich die Ausdehnungen bei dem erstmaligen Wechsel (Anfangswerte) von denjenigen bei dem letzten Wechsel (Endwerte) unterscheiden.

Spannungsstufe in kg/qcm	Zahl der Spannungswechsel	Anfangswerte			Endwerte		
		λ	λ'	$\lambda - \lambda'$	λ	λ'	$\lambda - \lambda'$
	1. Versuchsreihe						
152,4/304,9	2	1,41	0,11	1,30	1,41	0,11	1,30
152,4/457,3	5	3,10	0,47	2,63	3,18	0,53	2,65
152,4/609,8	7	5,13	1,16	3,97	5,38	1,33	4,05
152,4/762,2	7	7,60	2,15	5,45	8,05	2,52	5,53
	2. Versuchsreihe						
152,4/304,9	2	1,32	0,00	1,32	1,32	0,00	1,32
152,4/457,3	2	2,68	0,00	2,68	2,68	0,00	2,68
152,4/609,8	4	4,13	0,03	4,10	4,11	0,04	4,07
152,4/762,2	4	5,60	0,07	5,53	5,68	0,15	5,53

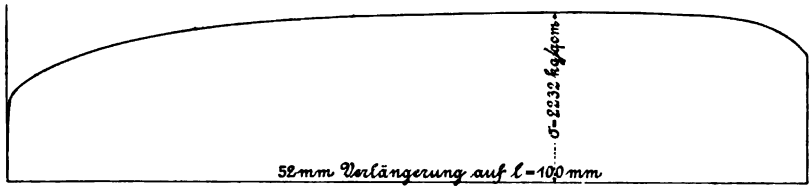


Fig. 17.

Die weitere Untersuchung des Stabes führte zur Erlangung der Dehnungslinie Fig. 17 sowie zur Feststellung:

der Zugfestigkeit

$$K_z = \frac{10980}{4{,}92} = 2232 \text{ kg/qcm},$$

der Querschnittsverminderung

$$\psi = 100\,\frac{4{,}92 - 1{,}89}{4{,}92} = 61{,}6\,\%,$$

da

$$f_b = \frac{\pi}{4}\,1{,}55^2 = 1{,}89 \text{ qcm},$$

und der Bruchdehnung auf 200 mm

$$\varphi = 100\,\frac{292{,}2 - 200}{200} = 46{,}1\,\%.$$

Die unmittelbar vor dem Bruch beobachtete Belastung betrug rund 8200 kg, entsprechend

$$\sigma = \frac{8200}{4{,}92} = 1667 \text{ kg/qcm}.$$

Eine Streckgrenze in dem Sinne, wie in § 2 erklärt, und wie wir sie bei Flußeisen und bei Flußstahl kennen lernten, besitzt hiernach das Kupfer nicht.

Das Arbeitsvermögen gemäß Gl. 4, § 3, ergibt sich zu $A = 7{,}11$ kgm/ccm.

Rundstab II.

Material: weiches Kupfer, jedoch von anderer Herkunft als Stab I, bereits einmal bis $\sigma = 964{,}4$ kg/qcm beansprucht gewesen.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles 1,99 cm
Querschnitt - - - - 3,11 qcm
Meßlänge . . . . . 10,00 cm.

Die Untersuchung führt ganz wie beim Rundstab I zu dem Ergebnis, daß die federnden Ausdehnungen rascher wachsen als die Spannungen, entsprechend

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,084\,000}\,\sigma^{1{,}093} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Nachdem für den Rundstab I ausführliche Besprechung stattgefunden hat, wird es genügen, die folgende Zusammenstellung anzuführen.

Spannungsstufe kg/qcm	Federnde Ausdehnung in $^1/_{1000}$ cm	
	beobachtet	berechnet nach Gl. 11
160,75 und 321,5	1,40	1,40
160,75 - 482,25	2,89	2,87
160,75 - 643,0	4,39	4,39
160,75 - 803,75	5,95	5,94
160,75 - 964,6	7,53	7,53

Die Übereinstimmung zwischen dem, was beobachtet wurde, und dem, was Gleichung 11 liefert, muß als eine sehr gute bezeichnet werden.

5. Versuche mit Bronze.

Rundstab I.

Material: gegossene Bronze, vorher noch nicht belastet.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles 2,20 cm
Querschnitt - - - - 3,80 qcm
Meßlänge . . . . . 15,00 cm.

Die Prüfung wurde in der gleichen Weise, wie unter Ziff. 3 angegeben, durchgeführt mit den aus folgender Zusammenstellung ersichtlichen Zahlenergebnissen.

Temperatur schwankt zwischen 15,4 und 15,6° C.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
750 und 1500	197,4 und 394,7	3,31	0,07	3,24
750 - 2250	197,4 - 592,1	6,61	0,09	6,52
750 - 3000	197,4 - 789,5	10,33	0,48	9,85

Hiernach wachsen die Federungen rascher als die Belastungen. Wird

$$\varepsilon = \frac{1}{733\,800}\,\sigma^{1,028} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

gesetzt, so ergeben sich die Federungen

nach Gleichung 12	3,24	6,53	9,85
gegenüber den beobachteten Werten	3,24	6,52	9,85,

also in guter Übereinstimmung.

Die Wiederholung des Versuchs liefert:

Belastungsstufe in kg		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
750 und 1500	197,4 und 394,7	3,30	0,01	3,29
750 - 2250	197,4 - 592,1	6,60	0,01	6,59
750 - 3000	197,4 - 789,5	9,89	0,03	9,86

Somit betragen die Unterschiede

in den gesamten Ausdehnungen	3,30	3,30	3,29
- - federnden -	3,29	3,30	3,27

d. i. in Berücksichtigung aller Verhältnisse nahezu so gut wie Unveränderlichkeit. Hiernach zeigt der Bronzestab, für welchen die erste Versuchsreihe die Gleichung 12 lieferte, im Falle vorhergegangener Belastung Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen. Mit der Federung 3,29 für das Material in dem Zustande, in welchem es sich während der zweiten Versuchsreihe befindet, bestimmt sich der Dehnungskoeffizient nach Gleichung 3, § 2 zu

$$\alpha = \frac{3{,}29}{15\,000 \,.\, 197{,}4} = \sim \frac{1}{900\,000}.$$

Wird die Belastung weiter gesteigert, so stellt sich schließlich der Bruch bei 7500 kg ein, entsprechend der Zugfestigkeit

$$K_z = \frac{7500}{3{,}80} = 1974 \text{ kg/qcm}.$$

Die Querschnittsverminderung nach Gleichung 2, § 3 ergibt sich, da

$$f_b = \frac{\pi}{4} 2{,}08^2 = 3{,}40 \text{ qcm},$$

zu

$$\psi = 100 \frac{3{,}80 - 3{,}40}{3{,}80} = 10{,}5\,\%$$

und die Bruchdehnung auf 20 cm nach Gleichung 3, § 3, zu

$$\varphi = 100 \frac{212{,}0 - 200}{200} = 6\,\%.$$

Über den Verlauf der Linie der gesamten Dehnungen gibt Fig. 18 Auskunft.

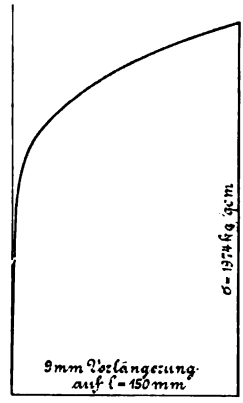


Fig. 18.

Wie ersichtlich, besitzt die untersuchte Bronze gleich dem untersuchten Kupfer keine Streckgrenze.

Rundstab II.

Material ganz wie bei Stab I.

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles .	1,99 cm
Querschnitt - - - - .	3,11 qcm
Meßlänge	15,00 cm.

Prüfung wie Stab I, jedoch ohne Wiederholung des Versuchs.

Belastungsstufe in kg		Ausdehnungen auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
750 und 1500	241,2 und 482,3	3,98	0,02	3,96
750 - 2250	241,2 - 723,5	8,99	0,93	8,06
750 - 3000	241,2 - 964,6	17,81	5,63	12,18

Hiernach wachsen die Dehnungen, ganz wie in Versuchsreihe 1 des Stabes I, rascher als die Spannungen.

Ferner ergibt sich

$$K_z = \frac{6500}{3{,}11} = 2090 \text{ kg/qcm},$$

$$\psi = 100\,\frac{3{,}11 - \frac{\pi}{4}\,1{,}91^2}{3{,}11} = 100\,\frac{3{,}11 - 2{,}87}{3{,}11} = 7{,}7\,\%,$$

$$\varphi = 100\,\frac{216{,}2 - 200}{200} = 8{,}1\,\%.$$

Eine große Zahl von weiteren Untersuchungen des Verfassers über Bronze sowohl bei gewöhnlicher Temperatur als auch bei höheren Temperaturen finden sich veröffentlicht in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 354, 1900, S. 1745 u. f., 1901, S. 1477 u. f.[1]).

6. Versuche mit Messing.

Rundstab (Messingguß).

Durchmesser des mittleren zylindrischen Teiles . 2,20 cm
Querschnitt - - - - . 3,80 qcm.

Prüfung genau wie bei Bronzestab I (Ziff. 5).

Belastungsstufe in kg		1. Versuchsreihe Temperatur 15,4—15,6°			2. Versuchsreihe Temperatur 14,8—15,1°		
		Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm			Ausdehnung auf 15 cm in $^1/_{1000}$ cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde	gesamte	bleibende	federnde
500 u. 1000	131,6 u. 263,2	2,57	0,21	2,36	2,44	0,00	2,44
500 u. 1500	131,6 u. 394,7	5,34	0,54	4,80	4,91	0,00	4,91
500 u. 2000	131,6 u. 526,3	8,61	1,24	7,37	7,39	0,02	7,37

[1]) Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin 1901, Heft 1, 1902, Heft 4.

Wie ersichtlich, wachsen bei der ersten Versuchsreihe (Stab war vorher noch nicht belastet gewesen) die Dehnungen rascher als die Spannungen, denn es betragen die Unterschiede

der gesamten Dehnungen			der federnden Dehnungen		
2,57	2,77	3,27	2,36	2,44	2,57

Den Federungen der ersten Versuchsreihe entspricht die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{947\,000}\,\sigma^{1{,}085} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Sie liefert die Federungen	2,36	4,82	7,36
während die Beobachtung ergab	2,36	4,80	7,37

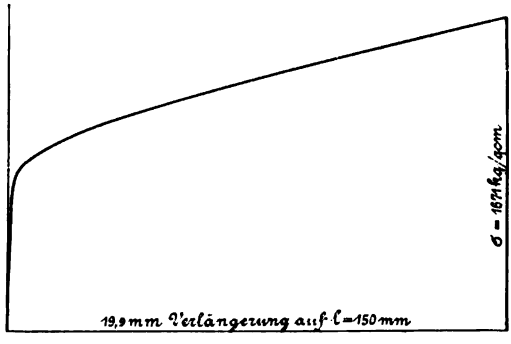


Fig. 19.

Die zweite Versuchsreihe (der Stab war vorher durch die Belastungen der ersten Versuchsreihe in Anspruch genommen gewesen) liefert die Unterschiede

der gesamten Dehnungen			der federnden Dehnungen		
2,44	2,47	2,48	2,44	2,47	2,46

also nahezu Unveränderlichkeit. Diese Ergebnisse stehen in Übereinstimmung mit dem, was für Bronze festzustellen war.

Der Dehnungskoeffizient für das Material in dem Zustand, in welchem sich dasselbe während der Durchführung der zweiten Versuchsreihe befand, ergibt sich bei Zugrundelegung der Federung von 2,46 nach Gleichung 3, § 2 zu

$$\alpha = \frac{2{,}46}{15000 \,.\, 131{,}6} = \sim \frac{1}{802000}.$$

Die weitere Fortsetzung der Belastungen bis zum Bruche ergibt für den Verlauf der Linie der gesamten Dehnungen Fig. 19 und

$$K_z = \frac{6350}{3{,}80} = 1671 \text{ kg/qcm},$$

$$\psi = 100\,\frac{3{,}80 - \frac{\pi}{4}\,2{,}00^2}{3{,}80} = 100\,\frac{3{,}80 - 3{,}14}{3{,}80} = 17{,}4\,\%,$$

$$\varphi = 100\,\frac{226 - 200}{200} = 13\,\%.$$

Eine Streckgrenze ist nicht vorhanden.

7. Versuche mit Leder.

Für einen früher schon vielfach belasteten Riemen von 6,44 qcm Querschnitt ergaben Zugversuche folgendes. Einstellung erfolgte von 3 zu 3 Minuten.

Spannungsstufe in kg/qcm	Federnde Dehnung in mm
3,88 und 11,65	5,5
3,88 - 19,4	10,0
3,88 - 27,2	14,0

Hiernach nehmen die Dehnungen mit wachsender Spannung ab.

Unter Zugrundelegung einer ursprünglichen Meßlänge des Riemens von 780,7 mm entsprechen diese Ergebnisse der Beziehung

$$\varepsilon = \frac{1}{415}\,\sigma^{0{,}7}, \quad \ldots\ldots\ 14)$$

worin die Zahlenwerte abgerundet worden sind.

Gleichung 14 liefert für die Ausdehnungen

5,6	mm	gegen	5,5	mm	beobachtet
10,1	-	-	10,0	-	-
14,1	-	-	14,0	-	-

Diese Übereinstimmung ist mit Rücksicht auf die vorgenommene Abrundung der Zahlenwerte in Gleichung 14 sowie in

Anbetracht des bedeutenden Einflusses, den die Zeit auf die Formänderungen des Leders äußert, und auf den an anderer Stelle eingegangen werden soll, recht befriedigend.

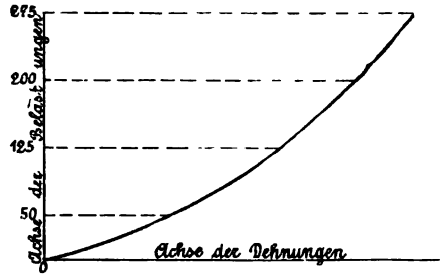


Fig. 20.

In Fig. 20 ist die Linie der gesamten Dehnungen für einen anderen, vorher stark gespannt gewesenen Riemen dargestellt; sie kehrt der Achse der Belastungen ihre hohle Seite zu, krümmt sich demnach entgegengesetzt, wie die Linie der Dehnungen bei Gußeisen, Kupfer, Bronze, Messing u. s. w.[1]).

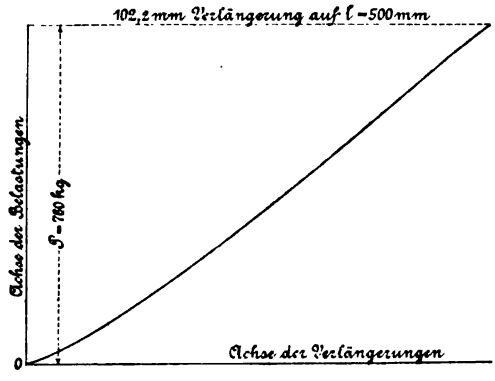


Fig. 21.

Fig. 21 zeigt die Linie der gesamten Verlängerungen für einen neuen Riemen von ursprünglich 49,6 mm Breite und 6,5 mm mittlerer Stärke, entsprechend $f = 4{,}96 \,.\, 0{,}65 = 3{,}224$ qcm, auf

[1]) Kautschuk verhält sich gegenüber Zugbelastung umgekehrt wie Leder (vergl. S. 131 Fußbemerkung); die Dehnungen wachsen weit stärker als die Spannungen.

500 mm ursprünglicher Länge. Die Belastungen wurden anfangs je um 25 kg gesteigert, später je um 50 kg. Nach 35 Minuten erfolgte der Bruch unter 760 kg Belastung, wobei unmittelbar vorher die Länge der Meßstrecke des gesamten Riemens zu 602,2 mm gemessen worden war. Unmittelbar nach dem Zerreißen zeigte die Meßstrecke, durch Aneinanderstoßen der Bruchflächen hergestellt, 520 mm, 40 Stunden später 516,8 mm, 10 Tage darauf 515,6 mm und 23 Tage später 515 mm Länge.

Bei Beurteilung der Spannungen darf die weitgehende Verminderung des Querschnittes mit steigender Belastung nicht außer acht gelassen werden. So beträgt beispielsweise bei $P = 400$ kg die Breite 47,5 mm und die Stärke 6,0 mm, also $f = 4{,}75 \,.\, 0{,}60 = 2{,}85$ qcm gegen ursprünglich 3,224 qcm. Mit dem ursprünglichen Querschnitt ergibt sich somit die Spannung

$$\sigma = \frac{400}{3{,}224} = 124 \text{ kg/qcm},$$

dagegen mit dem Querschnitt, der tatsächlich unter der Belastung $P = 400$ kg vorhanden war,

$$\sigma = \frac{400}{2{,}85} = 140 \text{ kg/qcm}.$$

Bei $P = 600$ kg war $f = 4{,}66 \,.\, 0{,}59 = 2{,}75$ qcm
$P = 700$ - - $f = 4{,}59 \,.\, 0{,}59 = 2{,}70$ -

Da das Reißen des Riemens unerwartet bei $P = 760$ kg eintrat, so war $f = 2{,}70$ qcm der letzte der bestimmten Querschnitte des gespannten Riemens.

Je nachdem nun dieser Wert $f = 2{,}70$ qcm oder der ursprüngliche Querschnitt $f = 3{,}224$ qcm zur Ermittlung der Zugfestigkeit in Rechnung gestellt wird, ergibt sich diese zu

$$\frac{760}{2{,}70} = 281 \text{ kg/qcm},$$

bezw.

$$\frac{760}{3{,}224} = 236 \text{ kg/qcm}.$$

Über die Elastizität des Leders an den verschiedenen Stellen einer und derselben Haut berichtet Verfasser in der

Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1902, S. 1446 und 1447 oder auch in den „Mitteilungen über Forschungsarbeiten" Heft 5.

Ähnlich wie Lederriemen verhalten sich Hanfseile u. dergl.[1]).

8. Versuche mit Körpern aus reinem Zement, Zementmörtel, Beton.

Die zahlreichen, vom Verfasser mit solchen Körpern durchgeführten Druckversuche, hinsichtlich welcher auf die früheren Veröffentlichungen verwiesen werden muß[2]), ergeben ausnahmslos, daß die Zusammendrückungen rascher wachsen als die Spannungen.

Die erlangten Versuchsergebnisse liefern innerhalb der für die ausführende Technik in Betracht kommenden Spannungsgrenzen beispielsweise die aus dem Folgenden ersichtlichen Beziehungen, in denen die Zahlenwerte abgerundet sind.

Körper aus reinem Zement.

$$\varepsilon = \frac{1}{250000}\,\sigma^{1,09} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Körper aus Zementmörtel.

1 Zement, $1^1/_2$ Donausand: $\varepsilon = \frac{1}{356000}\,\sigma^{1,11}$ . . 16)[3])

1 - 3 - $\varepsilon = \frac{1}{315000}\,\sigma^{1,15}$ . . 17)[3])

1 - $4^1/_2$ - $\varepsilon = \frac{1}{230000}\,\sigma^{1,17}$ . . 18)[3])

---

[1]) Siehe hierüber die Ergebnisse der vom Verfasser durchgeführten Versuche in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1887, S. 221 u. f., S. 241 u. f., S. 891 und 892, oder auch „Abhandlungen und Berichte" 1897, S. 5 u. f., S. 59 u. f.

[2]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1895, S. 489 u. f., 1896, S. 1381 u. f., 1897, S. 248 u. f.; oder „Abhandlungen und Berichte" 1897, S. 230 u. f., S. 268 u. f., S. 289 u. f.

[3]) Es ist von Interesse zu beachten, wie ausgeprägt sich der Einfluß des Sandzusatzes auf die Größe der Exponenten m und die Größe von α äußert. Darin liegt überhaupt ein Vorteil der Beziehung 1, daß ihre beiden

Körper aus Beton.

1 Zement, $2^1/_2$ Donausand, 5 Donaukies:

$$\varepsilon = \frac{1}{298000}\,\sigma^{1,145} \quad \ldots\ldots \quad 19)$$

1 Zement, $2^1/_2$ Eggingersand, 5 Kalksteinschotter:

$$\varepsilon = \frac{1}{457000}\,\sigma^{1,157} \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

1 Zement, 5 Donausand, 6 Donaukies:

$$\varepsilon = \frac{1}{280000}\,\sigma^{1,137} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

1 Zement, 3 Donausand, 6 Kalksteinschotter:

$$\varepsilon = \frac{1}{380000}\,\sigma^{1,161} \quad \ldots\ldots \quad 22)$$

1 Zement, 5 Donausand, 10 Donaukies:

$$\varepsilon = \frac{1}{217000}\,\sigma^{1,157} \quad \ldots\ldots \quad 23)$$

1 Zement, 5 Eggingersand, 10 Kalksteinschotter:

$$\varepsilon = \frac{1}{367000}\,\sigma^{1,207} \quad \ldots\ldots \quad 24)$$

Koeffizienten α und m sehr empfindlich sind gegenüber Verschiedenheiten in der Zusammensetzung des Materials (Gußeisen, Kupfer, Bronze, Messing, Zementmörtel, Beton, Granit u. s. w.) sowie gegenüber den Verschiedenheiten des Zustandes, in welchem es sich jeweils in dem untersuchten Körper befindet (z. B. ob vorher ausgeglüht, ob kalt bearbeitet, oder vorher belastet u. s. w.). Es erscheint wahrscheinlich, daß durch genaue Feststellungen in dieser Richtung in manche Materialien Einblicke erlangt werden können, die bisher auf physikalischem Wege sich nicht gewinnen ließen.

9. Versuche mit Granit.

Die vom Verfasser durchgeführten Versuche liefern

bei Zug Dehnungslinien, wie z. B. in Fig. 22 dargestellt
- Druck - - - - - - 23 -

Hiernach kehrt die Linie der gesamten und der federnden Zusammendrückungen (Fig. 23) der Achse der Spannungen zunächst ihre erhabene Seite und später ihre hohle Seite zu, d. h. zu Anfang

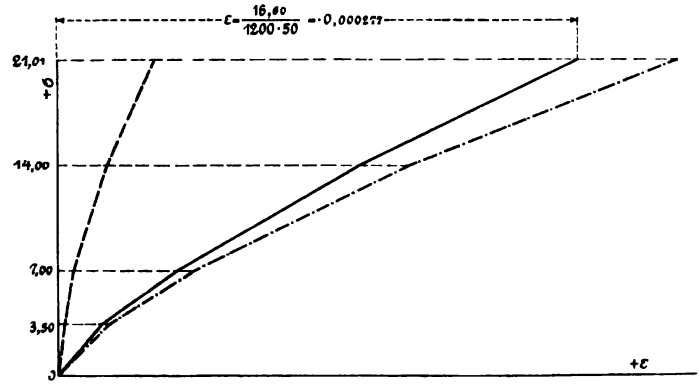


Fig. 22.

wachsen die Zusammendrückungen rascher als die Spannungen und später langsamer. Die Linienzüge besitzen demnach Wendepunkte; diese liegen oberhalb der für die ausführende Technik in Betracht kommenden Spannungsgrenze, die gegenüber Druck bei etwa 40 kg/qcm angenommen werden darf. Innerhalb dieser Grenzen fand sich, wenn die Zahlen abgerundet werden:

für Granitkörper I (Druck) $\varepsilon = \frac{1}{250\,000}\,\sigma^{1,132}$. 25)

- - II - $\varepsilon = \frac{1}{340\,000}\,\sigma^{1,109}$. 26)

- - III (Zug) $\varepsilon = \frac{1}{235\,000}\,\sigma^{1,374}$. 27)

Mit welcher Genauigkeit diese Beziehungen die beobachteten Federungen wiedergeben, darüber gibt die in der Fußbemerkung angeführte Stelle Auskunft, auf die auch hinsichtlich der weiteren Einzelheiten verwiesen werden darf[1]).

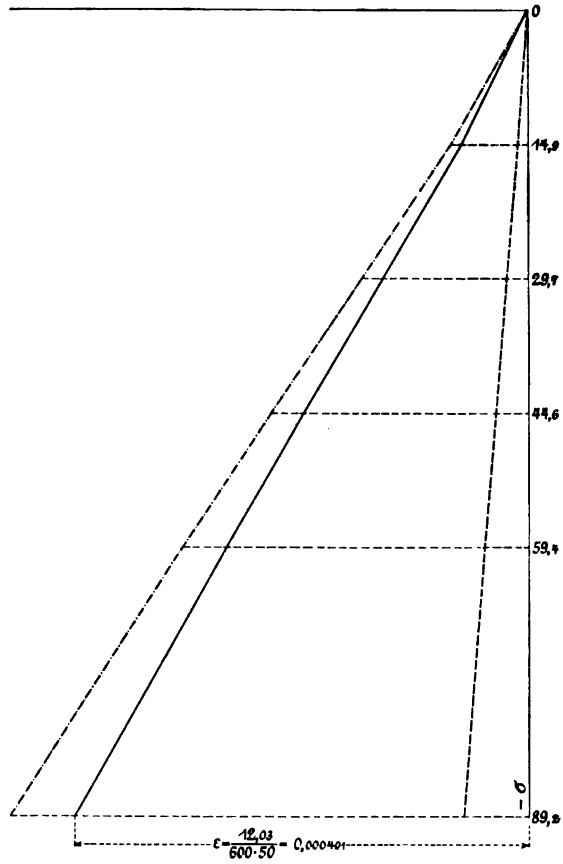


Fig. 23.

Übrigens ergeben sich nach Versuchen des Verfassers selbst für Granit aus einem und demselben Bruch die Federungen recht verschieden[2]).

[1]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 241 u. f. oder auch des Verfassers „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 281 u. f.

[2]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1903, S. 1445 u. f. oder auch „Mitteilungen über Forschungsarbeiten“, Heft 17, S. 78 und 79.

10. Versuche mit Marmor.

Querschnitt des mittleren prismatischen Teiles 9,115 . 9,13 = 83,2 qcm
Länge - - - - 54 cm
Meßlänge . . . . . 50 cm
Gesamtlänge des Körpers . . . . . 74,5 cm
Gewicht des Körpers . . . . . 17,715 kg.

Der Körper wird zunächst in einer stehenden Prüfungsmaschine auf Druck beansprucht und dabei jeweils vollständig von der Druckkraft der Maschine entlastet, so daß als Belastung des mittleren Querschnitts sein halbes Eigengewicht und das Gewicht des oberen Teiles der Meßvorrichtung verbleiben, zusammen rund 18 kg, entsprechend $\frac{18}{83{,}2} = 0{,}22$ kg/qcm.

Hieran schließt sich Beanspruchung auf Zug in einer zweiten stehenden Maschine, ganz wie dies bei dem Gußeisenkörper III (S. 25 u. f.) beschrieben worden ist. Die Belastung des mittleren Querschnitts durch das halbe Eigengewicht und durch den Anteil des Gewichts der Meßvorrichtung beträgt hierbei rund 15 kg, d. i. $\frac{15}{83{,}2} = 0{,}19$ kg/qcm.

Der Zugversuch wird wiederholt.

Darauf folgt abermals Druckbelastung u. s. w., wie dies aus den folgenden Zusammenstellungen der Versuchsergebnisse erhellt.

1. Versuchsreihe.

Druck.

Der Körper war vorher mit rund 6000 kg belastet, entsprechend 72,1 kg/qcm.

Temperatur 20,0 bis 20,1° C.

Belastungsstufen in kg		Zusammendrückungen in $^1/_{600}$ cm auf 50 cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
18 und 2018	0,22 und 24,25	4,10	0,25	3,85
18 - 4018	0,22 - 48,29	7,265	0,315	6,95
18 - 6018	0,22 - 72,33	10,035	0,33	9,705

Die Unterschiede der Federungen sind

3,85 3,10 2,755,

sie nehmen also ausgeprägt ab mit wachsender Spannung. Der Marmor verhält sich hiernach umgekehrt wie z. B. das Gußeisen.

2. Versuchsreihe.

Zug.

Der Körper wurde kurze Zeit mit rund 2000 kg belastet, entsprechend 24 kg/qcm.

Temperatur 20,0° C.

Belastungsstufen in kg		Dehnungen in $^1/_{600}$ cm auf 50 cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
15 und 300	0,19 und 3,61	0,82	0,085	0,735
15 - 600	0,19 - 7,21	1,935	0,115	1,820
15 - 900	0,19 - 10,82	3,365	0,18	3,185
15 - 1200	0,19 - 14,42	4,96	0,215	4,745

Eine Wiederholung des Versuchs — 3. Versuchsreihe — ergab nahezu die gleichen federnden Dehnungen.

Die Unterschiede der Federungen

0,735 1,085 1,365 1,560

zeigen deutlich Zunahme der Dehnungen mit wachsender Spannung.

4. Versuchsreihe.

Druck.

Temperatur 20,0 bis 20,1° C.

Belastungsstufen in kg		Zusammendrückungen in $^1/_{600}$ cm auf 50 cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
18 und 2018	0,22 und 24,25	7,77	3,295	4,475
18 - 4018	0,22 - 48,29	11,63	3,795	7,835
18 - 6018	0,22 - 72,33	14,54	4,125	10,415

Die großen bleibenden Zusammendrückungen sind die Folge des Vorhergehens von Zugbelastung. Auch die federnden Zusammendrückungen zeigen größere Werte als Versuchsreihe 1. Doch hat sich daran, daß sie langsamer als die Spannungen wachsen, nichts geändert. Denn es betragen die Unterschiede

4,475 3,360 2,580.

Dieselben unterscheiden sich hier noch bedeutender von einander als bei der Versuchsreihe 1.

5. Versuchsreihe.

Druck.

Temperatur 20,1° C.

Belastungsstufen in kg		Zusammendrückungen in $^1/_{600}$ cm auf 50 cm		
gesamte	kg/qcm	gesamte	bleibende	federnde
18 und 2018	0,22 und 24,25	4,185	0,025	4,16
18 - 4018	0,22 - 48,29	7,54	0,05	7,49
18 - 6018	0,22 - 72,33	10,30	0,09	10,21

Die bleibenden Zusammendrückungen ergeben sich jetzt klein; die federnden haben sich ebenfalls etwas verändert, sie sind aber noch etwas größer als bei der 1. Versuchsreihe. Von Interesse ist zu beachten, daß sich die Federung der obersten Stufe derjenigen genähert hat, welche bei der 1. Versuchsreihe erhalten wurde; dort waren die Unterschiede

3,85 3,10 2,755,

hier betragen sie

4,16 3,33 2,72.

Eine Wiederholung des Versuchs — 6. Versuchsreihe — ergab die gleichen federnden Zusammendrückungen.

In Fig. 24 sind die federnden Dehnungen der 2. Versuchsreihe (Zug) und die federnden Zusammendrückungen der 5. Versuchsreihe in der mehrfach erörterten Weise eingetragen und die so erhaltenen Punkte verbunden. Der so erlangte Linienzug hat

die Eigentümlichkeit, daß er der Achse der Spannungen auf der Zugseite seine erhabene, dagegen auf der Druckseite seine hohle

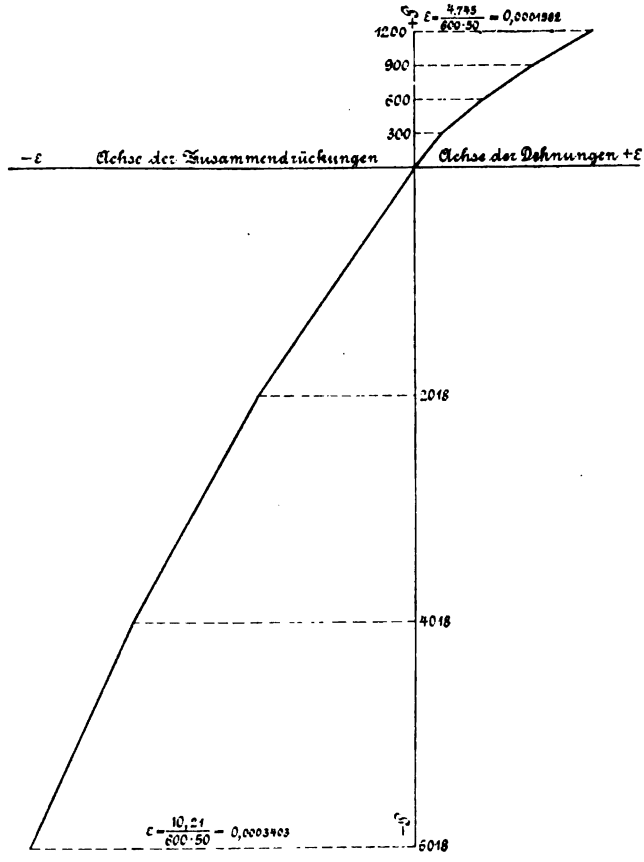


Fig. 24.

Seite zukehrt. Für $\sigma = 0$ darf nach dem Verlauf der beiden Kurvenzweige mit Annäherung eine gemeinschaftliche Tangente angenommen werden.

Werte des Dehnungskoeffizienten α,

unter Zugrundelegung der Federungen berechnet für die einzelnen Belastungsstufen. (Vergl. S. 19, insbesondere auch die Fußbemerkung daselbst.)

Druck.

Spannungsstufe in kg/qcm	1. Versuchsreihe			4. Versuchsreihe	5. (6) Versuchsreihe
0,22 und 24,25	$\frac{3,85}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{24,25 - 0,22}$	$= \frac{1}{187\,200}$	$\frac{1}{161\,100}$	$\frac{1}{173\,300}$
24,25 - 48,29	$\frac{6,95 - 3,85}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{48,29 - 24,25}$	$= \frac{1}{232\,600}$	$\frac{1}{214\,600}$	$\frac{1}{216\,600}$
48,29 - 72,33	$\frac{9,705 - 6,95}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{72,33 - 48,29}$	$= \frac{1}{261\,800}$	$\frac{1}{279\,500}$	$\frac{1}{265\,100}$

Zug.

Spannungsstufe in kg/qcm	2. (3.) Versuchsreihe		
0,19 und 3,61	$\frac{0,735}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{3,61 - 0,19}$	$= \frac{1}{139\,600}$
3,61 - 7,21	$\frac{1,82 - 0,735}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{7,21 - 3,61}$	$= \frac{1}{99\,500}$
7,21 - 10,82	$\frac{3,185 - 1,82}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{10,82 - 7,21}$	$= \frac{1}{79\,300}$
10,82 - 14,42	$\frac{4,745 - 3,185}{600 \cdot 50}$	$\frac{1}{14,42 - 10,82}$	$= \frac{1}{69\,200}$

11. Versuche mit Sandstein.

Die vom Verfasser durchgeführten Versuche ergaben für Sandstein im ursprünglichen Zustande ausnahmslos, daß die Dehnungen weit rascher wachsen als die Spannungen. Da grundsätzlich Neues hierbei nicht auftritt, so darf auf die dahingehenden Veröffentlichungen des Verfassers verwiesen werden: Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 1402; 1900, S. 1169 u. f.[1]).

§ 5. Gesetz der Längenänderungen. Vollkommenheit und Größe der Elastizität. Gesetz der elastischen Dehnung. Einfluß der Zeit. Elastische Nachwirkung.

1. Gesetz der Längenänderungen.

Wie wir in § 4 sahen, sind bei einem in Richtung seiner Achse durch Zug oder Druck beanspruchten Körper dreierlei Änderungen der Länge desselben zu unterscheiden:

1. die gesamte Längenänderung λ,
2. - bleibende - λ',
3. - federnde - $\lambda - \lambda' = \lambda''$.

Ein Blick auf Fig. 1, § 4, in welcher die Linien der gesamten (— · — · —), der bleibenden (— — — —) und der federnden Längenänderungen (—) eingetragen sind, lehrt, daß zur Feststellung des Zusammenhanges zwischen diesen drei Arten von Längenänderungen und den zugehörigen Spannungen im allgemeinen drei Funktionen erforderlich sind:

$$\lambda = f_1(\sigma), \qquad \lambda' = f_2(\sigma), \qquad \lambda'' = f_3(\sigma)$$

Die erste Funktion bestimmt die Linie der gesamten, die zweite diejenige der bleibenden und die dritte diejenige der federnden Längenänderungen.

[1]) Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1901, Heft 1 und aus neuester Zeit 1904, Heft 20.

Früher pflegte man nur die erste dieser Funktionen zu bestimmen und sie zur Grundlage der Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu machen. Daß dies unter Umständen zu recht groben Fehlern führen mußte, liegt auf der Hand. Deshalb ging Verfasser dazu über, λ' und damit auch $\lambda'' = \lambda - \lambda'$ in der Weise zu bestimmen, wie dies in § 4 mehrfach besprochen worden ist (vergl. z. B. daselbst Ziff. 1, Gußeisenkörper I): man wechselt für jede Spannungsstufe Belastung und Entlastung so oft, bis die gesamten, bleibenden und federnden Dehnungen sich nicht mehr ändern, und erhält so für die betreffende Spannungsstufe in λ'' die Federung, d. h. die eigentliche elastische Dehnung, welche der Körper unter den Verhältnissen, unter denen die Untersuchung stattfindet, aufweist[1]). Es erscheint deshalb richtiger, die Funktion $f_3(\sigma)$ als das

[1]) Die Bestimmung von Maßzahlen für die Federung, d. h. für die Elastizität, welche bei mehr oder minder rasch aufeinanderfolgenden Spannungsänderungen vorhanden ist, wurde vom Verfasser bereits in den Jahren 1885 und 1886 aufgenommen. Seines Wissens waren dies die ersten derartigen Versuche. Als Material wurden zunächst diejenigen Stoffe gewählt, für welche das Bedürfnis nach dem bezeichneten Elastizitätskoeffizienten am dringendsten war: Lederriemen, Hanf- und Drahtseile. Über einen Teil dieser Versuche ist in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1887, S. 221 bis 225, S. 241 bis 245, S. 891 und 892, (oder auch „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 5 u. f., S. 59 und 60) berichtet. Daselbst findet sich u. a. angegeben, daß in manchen Fällen die Federung nicht viel mehr als die Hälfte der gesamten Dehnung beträgt, übrigens in hohem Maße eine Funktion der Spannung ist (mit Zunahme der letzteren abnimmt) und daß sie auch von der Zeit abhängt. Bis dahin war ganz allgemein mit einem konstanten Dehnungskoeffizienten oder Elastizitätsmodul gerechnet worden. Die genannten Versuche wiesen beispielsweise nach, daß der Dehnungskoeffizient der Federung, d. i. die Federung der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung, betrug:

für einen neuen Lederriemen

$\frac{1}{1250}$ bei der Spannungsstufe $\sigma_1 = 7{,}5$ und $\sigma_2 = 18{,}75$ kg/qcm

$\frac{1}{1890}$ - - - $\sigma_2 = 18{,}75$ und $\sigma_3 = 30{,}0$ -

für einen gebrauchten Lederriemen

$\frac{1}{2680}$ bei der Spannungsstufe $\sigma_1 = 7{,}2$ und $\sigma_2 = 21{,}6$ kg/qcm

$\frac{1}{3600}$ - - - $\sigma_2 = 21{,}6$ - $\sigma_3 = 36{,}0$ -

$\frac{1}{4130}$ - - - $\sigma_3 = 36{,}0$ - $\sigma_4 = 50{,}4$ -

Elastizitätsgesetz anzusehen und sie zur Grundlage der Elastizitätslehre zu nehmen.

Die zweite Funktion $f_2(\sigma)$, welche die Linie der bleibenden Längenänderungen oder kurz der Dehnungsreste bestimmt, kann zur Beurteilung des Materials an sich oder auch des Zustandes herangezogen werden, in dem sich das letztere in dem untersuchten Körper befindet. Insofern die Linie der Dehnungsreste Auskunft

---

Dabei erfolgten die Wechsel in der Belastung durchschnittlich während der Zeit von 1,5 Minuten, welche zur Vornahme der Messungen erforderlich wurde.

Leder, das vorher nicht gestreckt war (Ledertreibriemen werden vor der Verwendung kräftig gestreckt), lieferte unter Umständen für die gesamte, d. h. bleibende und federnde, Dehnung Werte, welche den Dehnungskoeffizienten von rund $\frac{1}{100}$ ergaben.

Später hat Martens das gleiche Verfahren aufgenommen (vergl. Mitteilungen aus den königl. technischen Versuchsanstalten 1888, II, S. 2, sowie 1904, S. 202).

Einige Zeit darauf hat sich auch Hartig auf den Standpunkt des Verfassers gestellt und ist dafür eingetreten, daß die federnde Dehnung bestimmt werde. Doch muß dem von Hartig im Zivilingenieur 1893, S. 126 Bemerkten gegenüber hervorgehoben werden, daß es im allgemeinen nicht ausreichend ist, der Bestimmung des Elastizitätsgesetzes nur einen einmaligen Spannungswechsel unmittelbar vorhergehen zu lassen. Für manche Materialien, z. B. Stahl, von großer Festigkeit ist es innerhalb der Belastungsgrenzen, für welche der Dehnungskoeffizient bestimmt zu werden pflegt, meist überhaupt nicht nötig, diesen vorbereitenden Spannungswechsel auszuführen; für Materialien dagegen wie Gußeisen (vergl. z. B. § 4, Ziffer 1), zähes (ausgeglühtes) Flußeisen, Kupfer, Bronze, Messing, Beton u. s. w., also ganz abgesehen von Stoffen wie Leder u. dergl., erweist sich der einmalige Wechsel meist als durchaus ungenügend.

Das Verfahren, die — für die Untersuchungen oft recht unerwünschten und Zeitaufwand verursachenden — bleibenden Dehnungen dadurch zu beseitigen, daß man den Versuchskörper von vornherein weit über die Spannung hinaus belastet, mit welcher das Material später im Gebrauchsstück beansprucht wird, d. h. daß man ihn vorher überlastet, läuft — je nach der Höhe der vorherigen Belastung — unter Umständen auf eine Mißhandlung des Materials hinaus. Jedenfalls wird dasselbe hierdurch oft in einen Zustand versetzt, der von dem mehr oder weniger verschieden ist, in welchem sich das normal behandelte Material in den eigentlichen Gebrauchsstücken befindet, während doch die Untersuchung des Materiales zu dem Zwecke zu erfolgen pflegt, sein Verhalten in den Gebrauchsstücken möglichst richtig beurteilen zu können. Ziemlich häufig erwidert das überlastet gewesene Material diese Behandlung durch elastische Nachwirkung (§ 5, Ziff. 4), indem es sich dem ursprünglichen Zustand wieder nähert, also den verläßt, für welchen die ermittelten Zahlen gelten.

Die Zahlenwerte in den Gleichungen 4 bis 8, S. 37, lassen deutlich den Einfluß der vorhergegangenen Belastungen bei Gußeisen erkennen, noch empfindlicher pflegen Steine, insbesondere aber Leder zu sein. Man erhält für solche

darüber erteilt, welche bleibende Dehnung bei einer gewissen Belastung des Körpers zu erwarten steht, kann sie überdies noch weitere Bedeutung erlangen, worauf bereits S. 21 hingewiesen worden ist[1]).

2. *Maß der Vollkommenheit und der Größe der Elastizität.*

Wie bereits S. 17 bemerkt, wohnt jedem Körper die Eigenschaft inne, unter der Einwirkung äußerer Kräfte eine Änderung der Gestalt zu erfahren und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder minder vollständig wieder zu verlieren. Insoweit er die erlittene Formänderung wieder verliert, d. h. insoweit sein Material zurückfedert, wird er als elastisch bezeichnet. Ist die Rückkehr in die ursprüngliche Form eine vollständige, so spricht man von „vollkommen elastisch".

Hieraus erhellt, daß der Grad der Vollkommenheit der Elastizität eines Körpers oder kurz der Elastizitätsgrad desselben zum Ausdruck gebracht werden kann durch den Quotienten:

$$\mu = \frac{\text{federnde Dehnung}}{\text{gesamte Dehnung}},$$

wenn nur die Längenänderung eines auf Zug oder Druck beanspruchten Körpers ins Auge gefaßt wird. Hiernach würde bei-

---

Stoffe nach vorhergegangenen starken Belastungen Federungen, die sich außerordentlich stark von denjenigen unterscheiden können, die das gleiche Material im ursprünglichen Zustande lieferte.

Vergl. auch Fußbemerkung 3, S. 67, sowie diejenige S. 89.

Der gemachte Einwand gegen das Verfahren entfällt natürlich in den Fällen, in welchen das Material auch in den Gebrauchsstücken vorher überlastet wird, was z. B. zu dem Zwecke geschehen kann, bleibende Formänderungen später von ihnen fernzuhalten.

[1]) Die Erkenntnis der Gesetze der bleibenden Formänderungen bildet vorwiegend eine Aufgabe der mechanischen Technologie. Erst in neuerer Zeit ist derselben die ihr gebührende Wertschätzung zuteil geworden (Tresca, dem wohl die ersten Erkenntnisse hinsichtlich des Fließens fester Körper zu verdanken sind, Kick: Gesetz der proportionalen Widerstände und seine Anwendungen 1885, sowie die späteren Veröffentlichungen Kicks, Rejtö: die innere Reibung der festen Körper, 1897, sowie die späteren Arbeiten dieses Forschers (s. „Baumaterialienkunde" 1900 u. folgende Jahrgänge), Ludwik (Technische Blätter 1903 und 1904) u. s. w.).

spielsweise der in § 4 unter Ziff. 1 besprochene Gußeisenkörper III auf der mit $P = 20\,000$ kg schließenden Belastungsstufe folgende Elastizitätsgrade aufweisen:

bei der ersten Versuchsreihe

$$\frac{15{,}435}{18{,}255} = \sim 0{,}845,$$

bei der zweiten

$$\frac{15{,}365}{15{,}465} = \sim 0{,}996,$$

bei der dritten

$$\frac{18{,}325}{22{,}335} = \sim 0{,}826,$$

bei der vierten

$$\frac{18{,}25}{18{,}34} = \sim 0{,}995.$$

Der in § 4 unter Ziff. 4 behandelte Kupferrundstab weist auf der obersten Belastungsstufe einen Elastizitätsgrad auf

bei der ersten Versuchsreihe von

$$\frac{5{,}53}{8{,}05} = \sim 0{,}687,$$

bei der zweiten

$$\frac{5{,}53}{5{,}68} = \sim 0{,}974.$$

Je niedriger die Spannung liegt, mit welcher die Belastungsstufe abschließt, umsomehr pflegt unter sonst gleichen Verhältnissen sich μ der Einheit zu nähern. Die Spannung, bis zu welcher hin $\mu = 1$ ist oder sich doch nur sehr wenig von 1 unterscheidet, kann nach Maßgabe des S. 21 und 22 Gesagten als Elastizitätsgrenze bezeichnet werden.

Dieses Maß der Vollkommenheit der Elastizität eines Körpers ist zu unterscheiden von dem Maß der Größe der Elastizität, als welches die Federung der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung oder allgemein für das Kilogramm Spannungsunterschied angesehen werden kann. So wird beispielsweise von

dem unter § 4, Ziff. 7, zuerst besprochenen Riemen sowie von den beiden in der Fußbemerkung S. 77 angeführten Riemen zu sagen sein, daß die Größe ihrer Elastizität oder kurz ihre Elastizität mit wachsender Spannung abnimmt. Damit wird eben ausgesprochen, daß die Federung, d. i. die Größe der Elastizität für das Kilogramm Spannung (Spannungsunterschied) um so kleiner ausfällt, je höher die Spannungsstufe (vergl. S. 19, Fußbemerkung 2) liegt, d. h. in der Sprache des gewöhnlichen Lebens, je stärker der Riemen angespannt ist. In gleicher Weise wird man von einem Gußeisenkörper (vergl. z. B. § 4, Ziff. 1, Gußeisenkörper II, S. 23 u. f.), einem Kupferstab (vergl. z. B. § 4, Ziff. 4, Rundstab I und II, S. 54 u. f.), einem Betonkörper u. s. w. sagen, daß die Größe seiner Elastizität, kurz seine Elastizität mit wachsender Spannung zunimmt. Bei Besprechung der Elastizität von Körpern aus Zementmörtel mit verschiedenem Sandzusatz, wie solche in § 4, Ziff. 8 angeführt sind, wird man festzustellen haben, daß die Elastizität mit (über $1\frac{1}{2}$ Teile hinaus) wachsendem Sandzusatz unter sonst gleichen Verhältnissen zunimmt, daß beispielsweise Zementmörtel mit 3 Teilen Sandzusatz mehr Elastizität zeigt als solcher mit 1,5 Teilen Sand. Ebenso wird man beispielsweise den Kautschuk als sehr elastisch, Bausteine als weniger elastisch bezeichnen. Von der Größe der Elastizität eines Körpers zu sprechen, liegt im praktischen Leben vielfach Bedürfnis vor, wie bereits angedeutet worden ist und wie sich auch ergibt, wenn man der Fälle gedenkt, in denen der Ingenieur bei der Auswahl von Material darauf bedacht sein muß, daß es ausreichende Elastizität besitzt.

3. *Allgemeineres Gesetz der elastischen Dehnung.*

Wie bereits in § 2 bemerkt, pflegt hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen der Dehnung ε, die stillschweigend als vollkommen elastisch vorausgesetzt wird, und der zugehörigen Spannung σ angenommen zu werden, daß innerhalb eines gewissen Spannungsgebietes, das nach oben durch die positive Spannung σ' und nach unten durch die negative Spannung σ'' begrenzt werden möge, Proportionalität zwischen ε und σ bestehe entsprechend der Gleichung

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\ (\S\ 2)$$

Hierin wird dann α als eine innerhalb dieser beiden Grenzspannungen σ' (Proportionalitätsgrenze gegenüber Zug) und σ'' (Proportionalitätsgrenze gegenüber Druck) gleichbleibende, somit von der Größe und dem Vorzeichen von σ oder ε unabhängige Erfahrungszahl angesehen.

Diese angenommene Gesetzmäßigkeit zwischen ε und σ, bekannt unter dem Namen „Hookesches Gesetz", wurde bis vor kurzer Zeit noch in weiten Kreisen als allgemein gültig angesehen[1]). Das in § 4 niedergelegte Erfahrungsmaterial, welches noch bedeutend hätte vermehrt werden können, wäre nicht Nötigung vorhanden, Beschränkung zu üben, beweist deutlich, daß für die Mehrzahl der Stoffe Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen nicht besteht, und daß somit das Hookesche Gesetz in der Tat nur für eine Minderzahl von Baustoffen des Ingenieurwesens, zu denen allerdings die hervorrragend wichtigen Materialien: Schmiedeisen und Stahl gehören, als zutreffend angenommen werden kann; aber im allgemeinen auch nur mit Annäherung. Denn selbst bei Schmiedeisen und Stahl führt eine scharfe Prüfung nicht selten zu dem Ergebnis, daß die Dehnungslinie von $\sigma = 0$ an eine Kurve, wenn auch eine sehr flache, ist.

---

[1]) Daß dies selbst in den Kreisen der Physiker bis vor kurzem der Fall gewesen zu sein scheint, erhellt aus einer Arbeit von Thompson in Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie 1891, S. 555 u. f.: „Über das Gesetz der elastischen Dehnung". Er sagt daselbst: „Meines Wissens hat bis jetzt jeder für selbstverständlich gehalten, daß das alte Gesetz gültig sei, und es ist nie versucht worden, dasselbe einer Kritik zu unterziehen." Daß dies nicht ganz zutreffend, daß vielmehr bereits im Jahre 1891 die Erkenntnis in der Tat erheblich weiter vorgeschritten war, ergibt sich aus den Darlegungen des Verfassers in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 248 u. f. oder in „Abhandlungen und Berichte" 1897, S. 289 u. f.

In dem hervorragenden Handbuch der Physik, welches von Winkelmann unter Mitwirkung einer größeren Anzahl von Physikern herausgegeben wird, heißt es im ersten Band (1891), S. 218: „Dieses Gesetz ist schon von Hooke, und zwar in der Form ‚Ut tensio, sic vis' ausgesprochen worden, in die heutige Redeweise übersetzt, lautet es: Zwischen Zwang und Veränderung, zwischen Veränderung und elastischer Kraft besteht Proportionalität. Schon aus dem Umstande, daß man es hier meist mit kleinen Veränderungen zu tun hat, könnte man nach dem Prinzipe, daß kleine Wirkungen sich einfach addieren, auf jene Proportionalität schließen, und die Erfahrung bestätigt sie durchaus, vielleicht mit Ausnahme einiger in elastischer Hinsicht anormaler Stoffe (z. B. Kautschuk)."

Bei dieser Sachlage erscheint es begreiflich, daß das Bedürfnis sich einstellte, den Dehnungskoeffizienten α (oder seinen reziproken Wert, den Elastizitätsmodul E) als Funktion der Spannung σ zu kennen, oder auch eine Beziehung zwischen ε und σ aufzusuchen, welche die Versuchsergebnisse befriedigt[1]).

W. Schüle ermittelte auf Grund des ihm vom Verfasser 1896 zur Verfügung gestellten Versuchsmaterials, gewonnen in den Jahren 1885 bis 1896, daß die Gleichung

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1 \quad (\S\ 4)$$

gute Übereinstimmung ergab. Seine Arbeit beschränkte sich dabei auf Gußeisen, Granit, Körper aus Zement, Zementmörtel

---

[1]) Bis dahin stellte Verfasser die Veränderlichkeit von α dadurch fest und tut dies zum Teil auch heute noch, daß er die elastischen Längenänderungen für verschiedene Belastungsstufen ermittelt und dafür α berechnet.

Wenn sich auf dem Wege der Beobachtung ergeben hat,

a) daß für die aufeinander folgenden Spannungswechsel mit gemeinschaftlicher Anfangsspannung:

σ_1 und σ_2 die Dehnung ε_1,
σ_1 - σ_3 - - ε_2,
σ_1 - σ_4 - - ε_3

beträgt, so liefert die Rechnung

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_2}, \qquad \alpha_3 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\sigma_4 - \sigma_3},$$

oder

b) daß für die aufeinander folgenden Spannungswechsel mit steigender Anfangsspannung:

σ_1 und σ_2 die Dehnung ε_1,
σ_2 - σ_3 - - (ε_2),
σ_3 - σ_4 - - (ε_3)

beträgt, so findet sich

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{(\varepsilon_2)}{\sigma_3 - \sigma_2}, \qquad \alpha_3 = \frac{(\varepsilon_3)}{\sigma_4 - \sigma_3}.$$

Als Beispiele des Verfahrens nach a) können angesehen werden: die Ermittlung von α für den Gußeisenkörper I, § 4, Ziff. 1, S. 19, den Marmorkörper § 4, Ziff. 10, S. 75 u. s. w.; als Beispiele des Verfahrens nach b) die Bestimmung von α für die beiden in der Fußbemerkung S. 77 erwähnten Riemen.

Daß beide Verfahren — je nach dem Material — für die gleiche Belastungsstufe zu verschiedenen Werten des Dehnungskoeffizienten führen können, ist unter Ziff. 4, Fußbemerkung 1 S. 89 hervorgehoben.

und Beton gemäß den Gleichungen 2, 9, 10, 14 bis 16, 18 bis 26 in des Verfassers „Abhandlungen und Berichte", S. 291 u. f., und gemäß dem zugehörigen Versuchsmaterial.

Die Prüfung des Verfassers führte zu dem Ergebnis, daß — wenigstens für die durch das vorliegende Versuchsmaterial gedeckten Gebiete — Gleichung 1, § 4, die gesuchte Gesetzmäßigkeit innerhalb der für die ausführende Technik in Betracht kommenden Spannungsgebiete befriedigend zum Ausdruck bringt[1]). Ein großer Teil der in § 4 aufgenommenen Versuchsergebnisse lag damals noch nicht vor. Um so lehrreicher ist es, festzustellen, daß, wie die Bemerkungen in § 4 zu den Gleichungen 2 bis 27 zeigen,

---

[1]) Verfasser glaubt auch hier hervorheben zu sollen, was er bereits an anderer Stelle („Abhandlungen und Berichte" 1897, S. 294) bemerkt hat, nämlich, daß das Zutreffen der Beziehung $\varepsilon = \alpha\,\sigma^m$ nach Maßgabe des von ihm Gesagten ausdrücklich beschränkt erscheint: zunächst auf das Gebiet, welches durch das vorgelegte Versuchsmaterial gedeckt wird, und sodann auf solche Verhältnisse, welche Spannungen liefern, die innerhalb der für die ausübende Technik in Betracht kommenden Grenzen liegen. Die Notwendigkeit der zweiten Beschränkung erhellt schon ohne weiteres — ganz abgesehen von anderem — aus dem Vorhandensein von Wendepunkten in den Linienzügen für Granit (vergl. Fig. 23, § 4, oder auch „Abhandlungen und Berichte" 1897, S. 283 u. f.: Fig. 2, 3, 4 und 5). Inwieweit die erste Beschränkung Berechtigung hat, wird durch weitere Versuche, namentlich auch mit anderen Stoffen, festzustellen sein. Bei der großen Masse von Materialien und der Verschiedenheit ihrer Eigenschaften erscheint es wahrscheinlich, daß das elastische Verhalten aller Materialien durch eine einfache mathematische Funktion überhaupt nicht genau zum Ausdruck gebracht werden kann.

Wie aus den Arbeiten des Verfassers, betr. die Elastizität der Materialien, hervorgeht, handelt es sich für ihn in erster Linie nicht um Auffindung eines neuen Gesetzes, sondern vielmehr darum, durch den Versuch das tatsächliche Verhalten der Stoffe festzustellen und dazu beizutragen, daß die Beziehung $\varepsilon = \alpha\sigma$, welche nur für eine Minderheit von Stoffen innerhalb gewisser Grenzen zutreffend erscheint, nicht mehr als allgemein gültiges Gesetz angesehen (vergl. in dieser Hinsicht auch Fußbemerkung S. 82) und ohne weiteres zur Grundlage der gesamten Elastizitäts- und Festigkeitslehre gemacht wird. Die Anforderungen, welche die Technik an den Ingenieur stellt, gestatten dies — wenigstens in verschiedenen Fällen der Anwendung — heute nicht mehr. Sollte sich das tatsächliche elastische Verhalten aller Materialien durch irgend eine andere Funktion zwischen ε und σ ausreichend genau zum Ausdruck bringen lassen, welche noch dazu den Vorteil böte, für die Entwicklungen, betreffend die Ermittlung der Anstrengung von auf Biegung oder Drehung beanspruchten Körpern, bequemer zu sein als $\varepsilon = \alpha\sigma^m$, so würden seines Erachtens Wissenschaft und ausübende Technik die Aufstellung einer solchen Funktion willkommen heißen.

auch die späteren Untersuchungen von Gußeisen, Kupfer, Bronze, Messing u. s. w. die Brauchbarkeit der Gleichung 1, § 4, bestätigen[1]). Nur eine einzige Ausnahme hat sich bisher dem Verfasser bei seinen Versuchen ergeben, auf die später näher eingegangen werden soll.

Für $m = 1$ geht Gleichung 1, § 4, in Gleichung 2, § 2, über. Das Hookesche Gesetz bildet somit einen Sonderfall der durch Gleichung 1, § 4, bestimmten Gesetzmäßigkeit. Die Abweichung des Exponenten m von der Einheit bringt die Veränderlichkeit der Dehnungen zum Ausdruck. Für $m > 1$ wachsen die Dehnungen rascher als die Spannungen, für $m < 1$ langsamer. Je größer die Abweichung des Exponenten m von der Einheit ist, um so mehr wölbt sich die Dehnungskurve Gleichung 1, § 4, gegen die ε-Achse, also dieser ihre hohle Seite zukehrend, wenn $m > 1$, und hohl gegen die σ-Achse, wenn $m < 1$.

Der Koeffizient α hat die Bedeutung der Dehnung für die Spannung 1.

Aus Gleichung 1, § 4, folgt

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = m\,\alpha\,\sigma^{m-1},$$

d. i. die Tangente des Winkels, unter welchem die durch Gleichung 1, § 4, bestimmte Dehnungskurve gegen die σ-Achse geneigt ist.

Für $m > 1$, was z. B. für Gußeisen der Fall, und $\sigma = 0$ ergibt sich

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = 0,$$

d. h. die Dehnungskurve hat im Koordinatenanfang die σ-Achse zur Tangente, gleichgültig wie groß α und m, sofern nur $m > 1$.

Für $m < 1$, was z. B. bei Leder zutrifft, findet sich mit $\sigma = 0$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = m\frac{\alpha}{\sigma^{1-m}} = \infty,$$

d. h. die ε-Achse ist Tangente im Koordinatenanfang, ebenfalls unabhängig von den Sonderwerten von α und m.

---

[1]) Vergl. auch die Darlegungen Schüles in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1898, S. 855 u. f. sowie die Fußbemerkung Ziff. 3, S. 87.

Wir würden also beispielsweise für Gußeisen erhalten, daß die Dehnungskurve in senkrechter Richtung durch den Koordinatenanfang geht[1]), und für Leder, daß diese Kurve in wagerechter Richtung den Koordinatenanfang verlassend emporsteigt.

Gerade mit Rücksicht auf diese Eigenschaft der Kurve Gleichung 1, § 4, scheint es angezeigt, die Dehnung auch für verhältnismäßig kleine Spannungen zu ermitteln. Das ist z. B. geschehen für den Gußeisenkörper III, indem die unterste Spannungsstufe bei Versuchsreihe 1 mit $\sigma = 20{,}45$ kg/qcm, bei Versuchsreihe 2 mit $\sigma = 10{,}22$ kg/qcm abschließend angenommen wurde. Fig. 5, § 4, läßt erkennen, daß die beobachteten kleinen Dehnungen in der Tat auf starke Näherung an die σ-Achse hindeuten; der Grad der Genauigkeit, mit welchem die Längenänderungen bei so kleinen Spannungen festgestellt werden können, ist jedoch nicht sehr weitgehend, weshalb dieser Ermittlung eine durchschlagende Bedeutung nicht zuerkannt werden kann. Versuche mit Gußeisen aus neuester Zeit lassen es fraglich erscheinen, ob die σ-Achse im Koordinatenanfang tatsächlich Tangente an der Dehnungslinie ist.

Wie S. 84 hervorgehoben, steht die Gleichung 1, § 4, in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der vom Verfasser bisher in großer Anzahl durchgeführten Elastizitätsversuche bis auf eine

---

[1]) Für den ersten Augenblick könnte diese Folgerung wohl befremden, namentlich wenn man sich an die Darstellungen mit übertrieben großem Maßstabe für die Dehnungen hält. Wenn beispielsweise für Schmiedeisen die Linie $\varepsilon = \alpha\sigma$ mit $\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}$ als Gerade dargestellt wird, welche gegen die σ-Achse unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente gleich 0,5, so entspricht dies einer Vergrößerung der Dehnungen auf das 1 000 000 fache. In Verbindung mit einer so gezeichneten Geraden ist es allerdings schwer, sich $\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = 0$ für $\sigma = 0$ vorzustellen. Anders liegt die Sache, wenn man den Maßstab nicht übertreibt, sich also die Gerade unter einem solchen Winkel gegen die σ-Achse gezogen denkt, daß dessen Tangente $= \frac{1}{2\,000\,000}$ ist.

Überdies wendet sich die Kurve nach Verlassen des Koordinatenanfangs außerordentlich rasch; denn während für $\sigma = 0$ $\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = 0$, ergibt sich für das Gußeisen III nach Gleichung 4, § 4, für $\sigma = 1$ kg/qcm bereits $\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{1\,338\,000}$, d. i. erheblich mehr, als der Neigung der Geraden entspricht, die gemäß $\varepsilon = \alpha\sigma$ für Schmiedeisen gelten würde.

Ausnahme, und diese bildet der in § 4 unter Ziff. 10 behandelte Marmorkörper[1]). Fig. 24, § 4, zeigt, daß hier die Dehnungslinie der σ-Achse auf der Zugseite ihre erhabene und auf der Druckseite ihre hohle Seite zukehrt. Demgemäß müßte der Exponent m in der Gleichung 1, § 4, für die Zugseite größer als 1 und für die Druckseite kleiner als 1 sein, d. h. nach dem Obigen: auf der Zugseite wäre die σ-Achse im Koordinatenanfang Tangente der Dehnungslinie, auf der Druckseite müßte dies die ε-Achse sein. Da ein solcher Verlauf der Dehnungskurve aus dem Gebiete der Zugspannungen in das Gebiet der Druckspannungen nicht angenommen werden kann, — wie ersichtlich, ist der Verlauf der beiden Linienzüge in Fig. 24 vielmehr derart, daß im Koordinatenanfang eine gemeinschaftliche Tangente zu erwarten ist — so muß geschlossen werden, daß für den untersuchten Marmor die Gleichung 1, § 4, nicht als zutreffend erscheint.

Verfasser muß es unter Bezugnahme auf das S. 84 Fußbemerkung Gesagte zunächst dahingestellt sein lassen, ob sich im Laufe der Zeit noch andere Ausnahmen zu der einen bis jetzt ermittelten gesellen werden[2]); ebenso, ob es überhaupt gelingen wird, eine genügend einfache Funktion[3]) ausfindig zu machen, welche das elastische Verhalten aller Materialien genau zum Ausdruck bringt[4]).

---

[1]) Eine zweite Ausnahme findet sich Fußbemerkung Ziff. 2.

[2]) Nach den Mitteilungen, welche Winkler im Zivilingenieur 1878, S. 81 u. f. über die Ergebnisse seiner Versuche mit Kautschuk macht, würde sich dieses Material ähnlich wie Marmor verhalten: auf der Zugseite wachsen die Dehnungen weit rascher als die Spannungen, auf der Druckseite dagegen nehmen die Zusammendrückungen langsamer zu als die Pressungen.

[3]) Die Zeitschrift für Mathematik und Physik (begründet von Schlömilch) bringt im Schlußheft des Jahrganges 1897 eine Arbeit von R. Mehmke „Zum Gesetz der elastischen Dehnungen", welche u. a. eine zeitgemäße Zusammenstellung der bis jetzt vorgeschlagenen Formeln zur Darstellung der Abhängigkeit zwischen Dehnungen und Spannungen enthält. Aus derselben geht hervor, daß das Potenzgesetz $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ bereits im Jahre 1729 von Bülffinger für die Zugelastizität in Vorschlag gebracht worden war, und daß es 1822 auch Hodgkinson aufgenommen hatte. Das Ergebnis der bis jetzt vorliegenden rechnerischen Untersuchungen von Mehmke besteht darin, daß — soweit diese reichen — das Potenzgesetz die Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen im ganzen genauer zum Ausdruck bringt als das parabolische Gesetz $\varepsilon = a\sigma + b\sigma^2$.

[4]) Hieraus geht deutlich hervor, daß Gleichung 1, § 4, in den Augen des Verfassers nichts weiter ist als eine Gesetzmäßigkeit, durch welche sich die bis

4. Einfluß der Zeit. Elastische Nachwirkung.

Wie in § 4 hervorgehoben, wohnt jedem Körper — allerdings in verschiedenem Grade — die Eigenschaft inne, unter der Einwirkung äußerer Kräfte eine Änderung der Gestalt zu erfahren und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder weniger vollständig wieder zu verlieren. Eine klar zutage liegende Folge dieser Eigenschaft ist es, daß der Körper bei plötzlicher Einwirkung der Kräfte oder bei plötzlicher Entlastung in Schwingungen versetzt wird. Aus diesem Zustande geht er, indem die Schwingungen kleiner und kleiner werden, nach mehr oder minder langer Zeit in den Ruhezustand über.

Aber auch dann, wenn die Inanspruchnahme oder die Entlastung des Körpers allmählich erfolgt, wenn also derartige Schwingungen nicht beobachtet werden, erweist sich die Formänderung im allgemeinen nicht unabhängig von der Zeit. Die durch eine bestimmte Belastung erzeugbare Formänderung bedarf zu ihrer Ausbildung einer gewissen, zuweilen kurzen, unter Umständen aber auch sehr langen Zeit. Beispielsweise wird ein Stab aus hartem Werkzeugstahl schon unmittelbar nach allmählich erfolgter Belastung die überhaupt durch diese erreichbare Dehnung aufweisen, während ein belasteter Lederriemen nach Monaten, ja selbst nach Jahren noch Längenzunahmen, wenn auch immer kleiner werdende, zeigt. In Fällen letzterer Art führt die Zeit asymptotisch zum Endzustand.

Ganz das Entsprechende gilt hinsichtlich der Entlastung: der allmählich entlastete Stab nähert sich dem ursprünglichen Zustande — je nach der Art des Materials — mit verschiedener Geschwindigkeit, um so langsamer, je größer die erlittene Formänderung war, und je länger sie angedauert hatte.

Diese Erscheinung der allmählichen Ausbildung und der allmählichen Rückbildung der Formänderungen wird elastische Nachwirkung genannt. Sie beeinträchtigt namentlich dadurch,

---

dahin über den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen vorliegenden Versuchsergebnisse innerhalb gewisser Grenzen, mit Ausnahme von Marmor und Kautschuk, befriedigend zum Ausdruck bringen lassen. S. dagegen Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1902, S. 25 sowie S. 1512; 1903, S. 1014, Dinglers polyt. Journal 1902, Bd. 317, S. 149 u. f.

daß sie das Verhalten des untersuchten Körpers unter einer neuen Belastung von den Belastungen oder Entlastungen abhängig macht, denen er vorher unterworfen war, die Genauigkeit der Beobachtungen bei Versuchen zur Bestimmung der Formänderungen mehr oder minder. Insbesondere bei wechselnden Belastungen kann dieselbe zu eigentümlichen Abweichungen führen, entsprechend einem gleichzeitigen, beiderseits mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden Verlaufe entgegengesetzter Änderungen, oder kurz entsprechend einem Übereinanderlagern von Nachwirkungen[1]).

Dieser Einfluß der Zeit auf die Formänderungen wie auch auf die Festigkeit[2]) des Stoffes macht es notwendig, daß im all-

[1]) Hiermit hängt es auch zusammen, daß die Federung (§ 4) bei manchen Körpern verschieden erhalten wird, je nachdem man die Untersuchung, wie in der Fußbemerkung S. 83 unter a) oder unter b) angegeben ist, durchführt. Besonders stark tritt dieser Unterschied bei Riemen auf. Beispielsweise fand sich für einen Ledertreibriemen, der in der Weise geprüft wurde, daß für jede Belastungsstufe mit Belastung und Entlastung so oft gewechselt wurde, bis sich die gesamten, die bleibenden und die federnden Dehnungen nicht mehr änderten:

1. Versuchsreihe		2. Versuchsreihe	
Belastungsstufe	federnde Ausdehnung	Belastungsstufe	federnde Ausdehnung
50 und 150 kg	6,0 mm	50 und 150 kg	5,5 mm
150 - 250 -	3,6 -	50 - 250 -	10,0 -
250 - 350 -	2,7 -	50 - 350 -	14,0 -

Wir erkennen folgendes:

Für die gleiche Belastungsstufe 50 und 150 kg liefert die erste Versuchsreihe eine um $6 - 5{,}5 = 0{,}5$ mm größere Federung als die zweite Versuchsreihe.

Für die Belastungsstufe 150 und 250 kg liefert die erste Versuchsreihe unmittelbar 3,6 mm Federung, während die Ermittlung aus der zweiten Versuchsreihe durch Bildung des Unterschiedes $10{,}0 - 5{,}5$ zu 4,5 mm führt, also mehr ergibt.

Für die dritte Belastungsstufe 250 und 350 kg liefert die erste Versuchsreihe unmittelbar 2,7 mm Federung, während die zweite Versuchsreihe zu $14{,}0 - 10{,}0 = 4$ mm führt.

Die Summe der Federungen der ersten Versuchsreihe ergibt $6{,}0 + 3{,}6 + 2{,}7 = 12{,}3$ mm gegen 14,0 mm bei der zweiten Versuchsreihe.

Auch bei der Untersuchung von anderen Stoffen fand sich ein, wenn auch meist weit kleinerer Unterschied, z. B. bei Steinen. Selbst Gußeisen ist nicht frei hiervon. Da ein Eingehen an dieser Stelle zu weit führen würde, so muß sich Verfasser hier auf diese Feststellung beschränken.

[2]) Beispielsweise werden Stäbe aus Schmiedeisen, Lederriemen u. s. w., sehr rasch zerrissen, einen größeren Wert für die durch Gleichung 1, § 3, bestimmte

gemeinen den Ergebnissen von Versuchen auf diesem Gebiete die erforderlichen Angaben über die Zeit beigefügt werden.

Aus dem Vorstehenden folgt ferner, daß die im § 4 erörterten Längenänderungen sowie die aus ihnen ableitbaren Maßzahlen der Gesamtdehnung, des Dehnungsrestes und der Federung, d. h. die Dehnungskoeffizienten, streng genommen, Funktionen der Zeit sein müssen. Praktische Bedeutung erlangt diese Abhängigkeit von der Zeit jedoch erst für solche Stoffe, bei denen die elastische Nachwirkung von Erheblichkeit ist (vergl. § 10 unter Hanfseile sowie Fußbemerkung S. 77). Von hervorragender praktischer Bedeutung wird der Einfluß der Zeit auf die Aus- und Rückbildung der Formänderung, z. B. beim Riemenbetrieb, und damit auf die Größe der übertragbaren mechanischen Arbeit bei größeren Geschwindigkeiten, wie in des Verfassers Maschinenelementen, 9. Auflage (1903), S. 362 und 363, S. 383 bis 385 dargelegt ist.

Bei Leder, das für das Maschineningenieurwesen eine große Bedeutung hat, pflegt die elastische Nachwirkung so stark zu sein, daß sich die Frage aufdrängt, ob es überhaupt berechtigt ist, die elastischen Dehnungen in zwei Teile zu zerlegen, von denen der eine als plötzlich oder doch sehr rasch eintretend und wieder verschwindend angesehen, der andere als nachwirkend, d. h. als allmählich mit abnehmender Geschwindigkeit verlaufend aufgefaßt wird. Daß hierin — streng genommen — eine Willkürlichkeit liegt, bedarf keiner Erörterung.

Festigkeit liefern, als wenn das Zerreißen langsam erfolgt. Dagegen pflegen im letzteren Falle Dehnung und Querzusammenziehung größer auszufallen; die zur Ausbildung der Formänderungen gelassene Zeit ist eben bedeutender. (Vergl. auch § 10.)

Siehe auch die Angaben über das Kürzerwerden der beiden Bruchstücke eines zerrissenen Riemens mit der Zeit auf S. 66, oben.

I. Zug.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben eine Kraft, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt, und welche diese zu verlängern strebt.

§ 6. Gleichungen der Zugelastizität und Zugfestigkeit.

1. Es bedeute für den **prismatischen Stab**

P die ziehende Kraft,
f die Größe des ursprünglichen Stabquerschnittes,
l die ursprüngliche Länge des Stabes,
λ die Verlängerung, welche der Stab durch die Einwirkung der Kraft P erfährt,
$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ die Dehnung (§ 2),
α den Dehnungskoeffizienten (§ 2),
σ die Spannung, welche durch die Belastung P hervorgerufen wird, und die mit der Dehnung ε verknüpft ist, bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt (§ 1),
k_z die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zugbeanspruchung.

Dann ist nach Gleichung 1, § 1,

$$P = \sigma f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

$$P \leq k_z f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Unmittelbar aus dem Begriff des Dehnungskoeffizienten folgt

$$\lambda = \alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

2. Diese zunächst nur für prismatische Stäbe entwickelten Beziehungen werden dann auch auf gerade **stabförmige Körper von veränderlichem Querschnitte** übertragen.

Es bezeichne, Fig. 1,

P die Kraft, welche den Körper auf Zug in Anspruch nimmt,
f die Größe des beliebigen, um x von der einen Stirnfläche abstehenden Querschnittes,
f_0 den kleinsten Stabquerschnitt,
l die Länge des Stabes vor der Dehnung,
λ die Zunahme der Stablänge infolge der Einwirkung der Kraft P,
ε die Dehnung im Querschnitt f,
$\sigma = \frac{P}{f}$ die Spannung im Querschnitt f,
α den Dehnungskoeffizienten,
k_z die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zugbeanspruchung.

Die Dehnung ε ist hier von Querschnitt zu Querschnitt als veränderlich aufzufassen, weshalb in bezug auf die Größen l und λ der Bestimmungsgleichung 1, § 2, die Vorschrift getroffen werden muß, daß die Stablänge unendlich klein, also im vorliegenden Falle dx ist. Wird die Längenänderung, welche dx erfährt, mit Δdx bezeichnet, so folgt

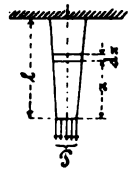


Fig. 1.

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}.$$

Dann gelten außer der Gleichung 1) die folgenden Beziehungen:

$$P \leq k_z f_0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

$$\lambda = \int_0^l \varepsilon \, dx = P \int_0^l \alpha \frac{dx}{f} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Ist α unveränderlich, was bei Spannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze zutrifft, falls dem in Frage stehenden Material eine solche überhaupt eigentümlich (§ 2), so darf α vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Die Voraussetzungen, welche den vorstehenden Beziehungen 1 bis 5 zugrunde liegen, sind in manchen Fällen der Verwendung sehr unvollkommen erfüllt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand seien sie kurz zusammengestellt.

1. Die äußeren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur eine in die Stabachse fallende Zugkraft.
2. Auf die Mantelfläche des Stabes wirken Kräfte nicht.
3. Der Einfluß des Eigengewichtes des Stabes kommt nicht in Betracht.
4. Die Dehnungen und die Spannungen sind in allen Punkten eines beliebigen Stabquerschnittes gleich groß und senkrecht zu letzterem gerichtet. (Gleichmäßige Verteilung der Zugkraft über den Querschnitt[1]).)
5. Die Form des Querschnittes ist gleichgültig.

---

[1]) Diese Voraussetzung ist in der Mehrzahl der Fälle weit unvollkommener erfüllt, als man anzunehmen pflegt. So ist z. B. — streng genommen — überall da, wo die äußere Kraft in den Stab eintritt, gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den ganzen Querschnitt nicht vorhanden, allerdings wird dabei der Grad der Ungleichmäßigkeit sehr verschieden sein können.

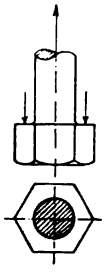


Fig. 2.

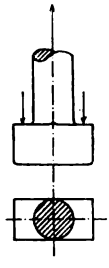


Fig. 3.

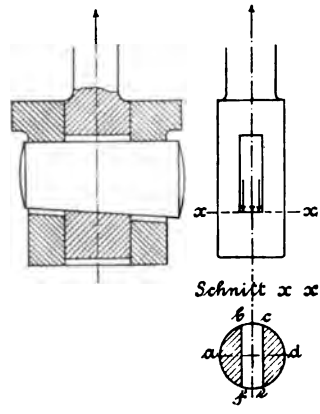


Fig. 4.

Bei den Schrauben, Fig. 2 und 3, tritt die Kraft durch den Kopf in den Schaft über; in dem Querschnitt des Schaftes da, wo dieser an den Kopf anschließt, werden die nach dem Umfange zu gelegenen Fasern mehr zur Übertragung herangezogen werden als die nach der Achse zu gelegenen. Bei Schraube Fig. 3 wird diese Ungleichmäßigkeit noch bedeutender sein müssen als bei Schraube Fig. 2, weil bei der ersteren zunächst nur ein Teil des Umfanges zum Eintritt der Kraft herangezogen wird.

Bei der Kraftübertragung durch Keil oder Splint, Fig. 4, legt sich der Keil oder Splint gegen die angenähert rechteckige Fläche $b\,c\,e\,f$. Die Beanspruchung der beiden Kreisabschnitte $a\,b\,f$ und $c\,d\,e$ im Querschnitt $x\,x$ muß dabei eine

Soll das eigene Gewicht G des Körpers berücksichtigt werden, so ergibt sich für den obersten Querschnitt von der Größe f_1 in Fig. 1

$$\sigma = \frac{P+G}{f_1}, \qquad k_z \geqq \frac{P+G}{f_1}.$$

Von dem Querschnitte f (im Abstande x) bis zu dem um dx davon entfernten Querschnitt ändert sich die Gesamtzugkraft $f\sigma$ um $\gamma f\,dx$, sofern γ das spezifische Gewicht des Stabmaterials bedeutet. Hieraus folgt

$$d(f\sigma) = \gamma f\,dx.$$

Wird nun verlangt, die Stabquerschnitte derartig nach oben zunehmen zu lassen, daß σ für alle Querschnitte den gleichen Wert k_z hat, so ergibt sich

$$k_z\,df = \gamma f\,dx,$$

und hieraus

$$ln\,f = \frac{\gamma x}{k_z} + C_1.$$

Für $x = 0$ muß sein $f = P : k_z$, d. h.

$$C_1 = ln\,\frac{P}{k_z}.$$

ungleichmäßige sein, derart, daß die Spannungen in den dem Keilloche, d. h. bf und ce am nächsten gelegenen Flächenelementen größer ausfallen als in den nach dem Umfange, d. h. nach a und d hin gelegenen Elementen.

Weitere Beispiele ungleichmäßiger Spannungsverteilung finden sich in des Verfassers Maschinenelementen, z. B. S. 132, Fig. 98; S. 168, Fig. 149 (9. Auflage).

Mit Rücksicht auf diese Sachlage ist es bei Zugversuchen eine der Hauptaufgaben, die Form der Probestäbe so zu wählen, daß die Zugkraft möglichst gleichmäßig über die Querschnitte des der Messung unterworfenen mittleren Stückes verteilt wird (vergl. § 8).

Vergleiche auch den Einfluß der Hinderung der Querzusammenziehung § 9, Ziff. 1.

Bei Stäben mit veränderlichem Querschnitt, Fig. 1, können die Spannungen in den sämtlichen Elementen eines Querschnittes nicht die gleiche Richtung haben. Die Spannung im Schwerpunkte des Querschnittes wird allerdings in die Stabachse fallen, also senkrecht zu dem letzteren stehen, dagegen werden beispielsweise die Spannungen in den auf der Umfangslinie des Querschnittes liegenden Flächenelementen die Richtung der Mantellinie des Stabes besitzen, somit geneigt gegen die Stabachse sein müssen.

Hiermit wird schließlich in

$$f = \frac{P}{k_z} e^{\frac{\gamma x}{k_z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

das Gesetz erhalten, nach dem der gezogene Stab als Körper gleichen Widerstandes zu formen wäre.

3. Beispiel der Zugelastizität mit Rücksicht auf den **Einfluß der Temperatur.**

Der Draht einer elektrischen Leitung zum Zwecke der Arbeitsübertragung wird von Stangen getragen, welche je um $2\,l$ von einander abstehen. Die Aufhängepunkte A und B, Fig. 5, liegen in gleicher Höhe.

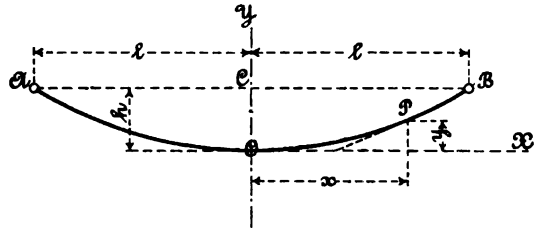


Fig. 5.

Mit welcher Pfeilhöhe h muß der Draht bei der Sommertemperatur t ausgelegt werden, damit im Winter bei der niedrigsten Temperatur t_0 die Spannung σ_0 nicht überschritten wird?

Es sei

H die Kraft, mit welcher der Draht im Scheitel O und
S - - - - - - - - beliebigen Punkte P, bestimmt durch die Koordinaten x und y, gespannt ist,
h die Pfeilhöhe $\overline{CO}$, d. i. der Höhenabstand zwischen dem Scheitel O und der durch die Aufhängepunkte A und B bestimmten Wagrechten,
$q = f\gamma$ das Gewicht der Längeneinheit des Drahtes vom Querschnitt f und dem spez. Gewicht γ.

Unter der Voraussetzung, daß der Draht vollkommen biegsam sei und nach einem so flachen Bogen durchhänge, daß das Gewicht des Drahtstückes von der Länge $\overset{\frown}{OP}$ mit Annäherung gleich dem

Produkte aus q und der Horizontalprojektion des Drahtes, d. h. gleich $q\,x$ gesetzt werden darf, folgt unter Beachtung von Fig. 6

$$S \sin \varphi = q \,.\, \widehat{OP} = \sim q\,x$$

$$S \cos \varphi = H.$$

Somit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{q\,x}{H} = \frac{dy}{dx},$$

wie auch

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{q\,x^2}{H}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

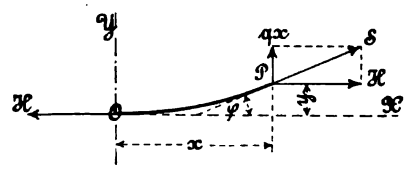


Fig. 6.

da die Integrationskonstante wegen $y = 0$ bei $x = 0$ zu Null wird. Die Drahtkurve ist hiernach mit der Annäherung, welche der Rechnung zukommt, eine Parabel, für welche

$$h = \frac{q\,l^2}{2\,H} \text{ oder } H = \frac{q\,l^2}{2\,h} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

sowie

$$y = \frac{q\,x^2}{2\,\frac{q\,l^2}{2\,h}} = h\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Die Länge $OB = s$ ergibt sich aus

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^l \sqrt{1 + \left(2\,\frac{h\,x}{l^2}\right)^2}\,dx = \sim \int_0^l \left[1 + 2\left(\frac{h\,x}{l^2}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_0^l \left(1 + 2\,\frac{h^2}{l^4}\,x^2\right) dx = l\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]. \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Mit der Temperatur der Luft wird sich die Länge des Drahtes ändern, damit auch nach Gleichung 9 die Pfeilhöhe des Bogens und mit dieser nach Gleichung 8 die Spannung $\sigma = \frac{H}{f}$ des Drahtes. Je mehr die Temperatur sinkt, um so höher steigt die Beanspruchung des Materials. Die letztere werde, da es sich um einen flachen Bogen handelt, mit Annäherung als gleich groß in allen Punkten des Drahtes aufgefaßt, und zwar gleich $\frac{H}{f}$ gesetzt.

Nehmen wir an, daß die Größen H, h, s und σ, welche bei der Temperatur t gelten, bei der niedrigsten Temperatur t_0 die Werte H_0, h_0, s_0 und σ_0 besitzen. Steigt die Temperatur von t_0 auf t, so vermindert sich infolge der Verlängerung des Drahtes aus Anlaß der Ausdehnung des Drahtes durch die Wärme die Spannung von σ_0 auf σ. Diese Verminderung der Spannung wirkt gleichzeitig zurück auf die elastische Dehnung. Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen läßt sich leicht feststellen, wenn man zunächst die Längenänderung infolge der Spannungsänderung und sodann diejenige infolge der Temperaturänderung in Betracht zieht. Das gibt, sofern α_w den Wärmeausdehnungskoeffizienten bedeutet,

$$s = s_0 [1 + \alpha (\sigma - \sigma_0)] [1 + \alpha_w (t - t_0)]$$
$$= \sim s_0 [1 + \alpha (\sigma - \sigma_0) + \alpha_w (t - t_0)]^1).$$

---

[1]) Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man sich ein Stück spannungslosen Draht von der Länge 1 denkt. Wird dasselbe der Spannung σ und sodann der Spannung σ_0 unterworfen, so steigt seine Länge auf $1 + \alpha\sigma$ bezw. $1 + \alpha\sigma_0$. Demnach gilt bei Unveränderlichkeit der Temperatur

$$\frac{s}{s_0} = \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \alpha\sigma_0} \text{ oder } s = s_0 \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \alpha\sigma_0}$$

und bei Steigerung der Temperatur von t_0 auf t, wobei die Längeneinheit um $\alpha_w (t - t_0)$ zunimmt

$$s = s_0 \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \alpha\sigma_0} [1 + \alpha_w (t - t_0)] = s_0 \left[1 - \alpha \frac{\sigma_0 - \sigma}{1 + \alpha\sigma_0}\right] [1 + \alpha_w (t - t_0)]$$

$$s = \sim s_0 [1 - \alpha (\sigma_0 - \sigma)] [1 + \alpha_w (t - t_0)],$$

was sich, wie wir oben sahen, fast unmittelbar anschreiben läßt.

Unter Beachtung von Gleichung 9 folgt hiermit

$$s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h_0^2}{l^2}\right)[1 + \alpha(\sigma - \sigma_0) + \alpha_w(t - t_0)]$$

$$= \sim l\left[1 + \frac{2}{3}\frac{h_0^2}{l^2} + \alpha(\sigma - \sigma_0) + \alpha_w(t - t_0)\right]$$

und unter Beachtung von Gleichung 8, nach welcher

$$h_0 = \frac{q\,l^2}{2\,H_0} = \frac{f\gamma\,l^2}{2f\,\sigma_0} = \frac{\gamma\,l^2}{2\,\sigma_0},$$

$$h = \frac{\gamma\,l^2}{2\,\sigma} \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{\gamma\,l^2}{2\,h},$$

ergibt sich

$$s = \sim l\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\gamma^2\,l^2}{\sigma_0^2} + \alpha\left(\frac{\gamma\,l^2}{2\,h} - \sigma_0\right) + \alpha_w(t - t_0)\right]$$

$$= l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}\right)$$

$$h^3 - \frac{3}{2}\,l^2\left[\frac{1}{6}\frac{\gamma^2\,l^2}{\sigma_0^2} + \alpha_w(t - t_0) - \alpha\,\sigma_0\right]h = \frac{3}{4}\,\alpha\,\gamma\,l^4. \quad 10^1)$$

Hieraus läßt sich die gesuchte Pfeilhöhe berechnen.

Soll der im Winter zuweilen eintretende Fall berücksichtigt werden, daß der Draht noch durch auf ihm hängenden Schnee belastet wird, so läßt sich dies leicht dadurch bewerkstelligen, daß γ oder $q = f\gamma$ entsprechend höher in die Rechnung eingeführt wird.

Will man die — unter den gewöhnlichen Verhältnissen übrigens außerordentlich geringe — Biegungsbeanspruchung, welche der Draht infolge der Durchbiegung erfährt, feststellen, so kann das am einfachsten in der Weise geschehen, daß man den Krümmungs-

---

[1]) Grashof hat diese Aufgabe in seiner 1878 erschienenen Theorie der Elastizität und Festigkeit S. 46 und 47 behandelt, dabei jedoch den Einfluß der Spannungsänderung auf die Drahtlänge außer acht gelassen und kommt infolgedessen für h zu einer quadratischen Gleichung. Hierauf machte zuerst Wehage im Zivilingenieur 1879, S. 619 u. f. aufmerksam und gab daselbst die vollkommene Lösung.

halbmesser ϱ für den Scheitel der Parabel, deren Gleichung nach Beziehung 7

$$x^2 = \frac{2H}{q} y$$

ist, als Halbparameter zu

$$\varrho = \frac{H}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

ermittelt und sodann unter Beachtung von Gleichung 8, § 16, und Gleichung 11, § 16, die Biegungsanstrengung für den $2e$ dicken Draht zu

$$\sigma_b = \frac{qe}{\alpha H} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{ef}{H} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{e}{H:f} \quad \ldots \quad 12)$$

bestimmt, also unabhängig von der Spannweite.

Für

$$\gamma = 0{,}008, \quad \alpha = \frac{1}{2\,200\,000}, \quad H:f = 1000 \text{ kg/qcm}, \quad e = 0{,}2 \text{ cm}$$

ergibt sich beispielsweise

$$\sigma_b = \frac{0{,}008}{\frac{1}{2\,200\,000}} \cdot \frac{0{,}2}{1000} = 3{,}5 \text{ kg/qcm}.$$

§ 7. Maß der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Gehinderte Zusammenziehung.

Wie wir in § 1, b sahen, findet mit der Ausdehnung des nur in der Richtung der Achse gezogenen Stabes Fig. 2, § 1, gleichzeitig eine Zusammenziehung senkrecht zur Achse statt. Beträgt die durch Gleichung 1, § 2, bestimmte Dehnung ε, so werden die nach jeder zur Achse senkrechten Richtung eintretenden Zusammenziehungen, bezogen auf die Längeneinheit, d. s. die verhältnismäßigen Zusammenziehungen $\left(\text{im Falle § 1, b gleich } -\frac{\delta}{d}\right)$, als gleich groß betrachtet und durch

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

gemessen. Die Größe m pflegt als eine zwischen 3 und 4 liegende Konstante aufgefaßt zu werden, so daß hiernach die verhältnismäßige Zusammenziehung $^1/_4$ bis $^1/_3$ der Dehnung beträgt.

Der in Fig. 1 dargestellte Würfel, bestehend aus Material, welches in jedem Punkte nach allen Richtungen hin gleich beschaffen, also isotrop ist und Proportionalitätsgrenze (§ 2) besitzt, werde innerhalb der letzteren zunächst nur in Richtung der x-Achse auf Zug (durch P_x, P_x) in Anspruch genommen. Die in dieser

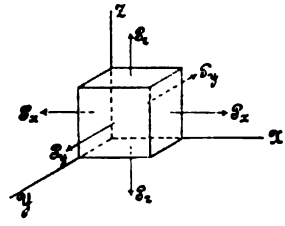


Fig. 1.

Richtung eintretende Dehnung sei durch ε_x und die hiermit verknüpfte Spannung durch $\sigma_x = \frac{\varepsilon_x}{\alpha}$ bezeichnet. Nach Maßgabe des Erörterten beträgt dann:

in Richtung der y-Achse

die verhältnismäßige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_x}{m}$, die Spannung 0,

in Richtung der z-Achse

die verhältnismäßige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_x}{m}$, die Spannung 0.

Wird der Würfel nur in Richtung der y-Achse (von P_y, P_y) gezogen, und werden die hierdurch in dieser Richtung veranlaßte Dehnung und Spannung ε_y beziehungsweise $\sigma_y = \frac{\varepsilon_y}{\alpha}$ genannt, so findet sich:

in Richtung der x-Achse

die verhältnismäßige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_y}{m}$, die Spannung 0,

in Richtung der z-Achse

die verhältnismäßige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_y}{m}$, die Spannung 0.

Wird schließlich der Würfel nur in Richtung der z-Achse auf Zug in Anspruch genommen (durch P_z, P_z) und die hiermit in dieser Richtung verknüpfte Dehnung durch ε_z, die Spannung durch $\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{\alpha}$ gemessen, so müßte betragen:

in Richtung der x-Achse

die verhältnismäßige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_z}{m}$, die Spannung 0,

in Richtung der y-Achse

die verhältnismäßige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_z}{m}$, die Spannung 0.

Wirken die Kräfte P_x P_x, P_y P_y, P_z P_z gleichzeitig, so beträgt die resultierende Dehnung

$$\left.\begin{array}{lll} \text{in Richtung der } x\text{-Achse} & \varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m} \\ - \quad - \quad - \; y - \; - & \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{m} \\ - \quad - \quad - \; z - \; - & \varepsilon_3 = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m} \end{array}\right\}, \quad . \quad 2)$$

woraus unter Berücksichtigung, daß

$$\varepsilon_x = \alpha\,\sigma_x \qquad \varepsilon_y = \alpha\,\sigma_y \qquad \varepsilon_z = \alpha\,\sigma_z \quad . \quad . \quad 3)^1)$$

---

[1]) Besitzt das Material keine Proportionalitätsgrenze, so wird der Dehnungskoeffizient α nicht konstant, sondern eine Funktion von σ oder ε sein. Es würde dann heißen müssen etwa:

$$\varepsilon_x = \alpha_1\,\sigma_x, \qquad \varepsilon_y = \alpha_2\,\sigma_y, \qquad \varepsilon_z = \alpha_3\,\sigma_z.$$

Hierin würden je nach der Verschiedenheit der Spannungen $\sigma_x\,\sigma_y\,\sigma_z$ die Dehnungskoeffizienten $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ verschieden große Werte aufweisen, d. h. $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ würden Funktionen von σ oder ε sein.

folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right) \text{ oder } \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m} \\ \varepsilon_2 &= \alpha\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}\right) \text{ oder } \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \sigma_y - \frac{\sigma_z+\sigma_x}{m} \\ \varepsilon_3 &= \alpha\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right) \text{ oder } \frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Die Beziehungen 4 lehren, daß die Proportionalität, welche bei dem ausschließlich in der Richtung seiner Achse gezogenen Stabe nach Maßgabe der Gleichungen 2, § 2, und 3 dieses Paragraphen zwischen Dehnungen und Spannungen — unter der Voraussetzung, daß α konstant — vorhanden ist, zu bestehen aufhört, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse den Körper ergreifen. Die resultierende Dehnung wird durch solche Kräfte, wenn sie ziehend wirken, vermindert; sind Druckkräfte senkrecht zur Stabachse tätig, so wird die resultierende Dehnung vergrößert.

In Anbetracht, daß derartige Kräfte eine mehr oder minder große Hinderung der Zusammenziehung zur Folge haben, erkennen wir, daß Erschwerung oder teilweise Hinderung der Zusammenziehung (Kontraktion) des Stabes (senkrecht zu dessen Achse) die Dehnung (in Richtung der Achse) verringert und damit bei solchen Materialien, welche im Falle des Zerreißens eine erhebliche Querzusammenziehung erfahren, auch die Festigkeit erhöht, wie Versuche nachweisen[1]) (§ 9, Ziff. 1).

---

[1]) Hinsichtlich der ersten dahingehenden Darlegung des Verfassers, welche sich auf die Ergebnisse der von Kirkaldy vor rund 40 Jahren angestellten Versuche stützt, über die § 9, Ziff. 1 berichtet ist, s. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1880, S. 285 u. f. Trotzdem findet man bis in die neuere Zeit Versuche, welche den Einfluß der Erschwerung der Zusammenziehung vollständig außer acht lassen. So z. B. pflegte man — wie Verfasser bereits in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 478 darzulegen veranlaßt war — zur Feststellung des Wertes der Lochungen von Blechen in der Weise vorzugehen, daß man die Zugfestigkeit von ungelochten Blechstreifen *a*, Fig. 2, in Vergleich stellte mit derjenigen von gebohrten und gelochten Blechstreifen *b*, *c*, *d*. Hierbei ergibt sich, sofern eine Verletzung des Materials nicht stattgefunden hat,

§ 8. Zugproben.

Den Zugproben werden die Metalle, auf welche sich das Nachstehende zunächst nur bezieht, in Form von Rundstäben (Fig. 1) oder in Form von Flachstäben (Fig. 2 und 3) unterworfen.

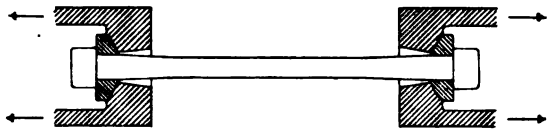


Fig. 1.

Die Form der Probestäbe muß so gewählt werden, und die zum Einspannen in die Prüfungsmaschine benutzten Vorrichtungen müssen so beschaffen sein, daß die Zugkraft möglichst gleichförmig über die Querschnitte des der Messung unterworfenen mittleren Stückes des Probekörpers, d. i. der Meßlänge, verteilt wird.

Der letzteren Bedingung läßt sich bei Rundstäben durch die Kugellagerung (Fig. 1), bei Flachstäben durch Befestigung mittels Loch und Bolzen (Fig. 3) oder durch Einlegen der mit gefrästen

---

daß die Zugfestigkeit von *b*, *c* und *d* größer ist als diejenige von *a*, was nach Maßgabe des Erörterten naturgemäß erwartet werden muß. Die Ergebnisse der mit Stäben *a* angestellten Zugversuche, wobei die mit der Längsdehnung ver-

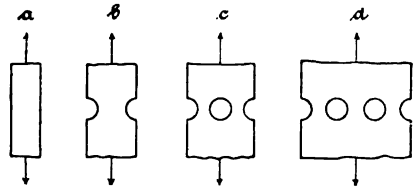


Fig. 2.

knüpfte Querzusammenziehung sich ungehindert ausbilden kann, können eben nicht ohne weiteres in Vergleich gestellt werden mit den Ergebnissen, welche Zugversuche mit den Stäben *b*, *c*, *d* liefern, da hier die Querzusammenziehung eine mehr oder minder stark gehinderte ist.

Nuten versehenen Enden in Gebißkeile (Fig. 2) entsprechen. Die Herstellung der Flachstäbe fordert jedoch unter allen Umständen besondere Sorgfalt, wenn der aufgestellten Bedingung genügt sein soll.

In bezug auf die Gestalt des Probestabes sucht man die aufgestellte Bedingung dadurch zu erfüllen, daß man das prismatische

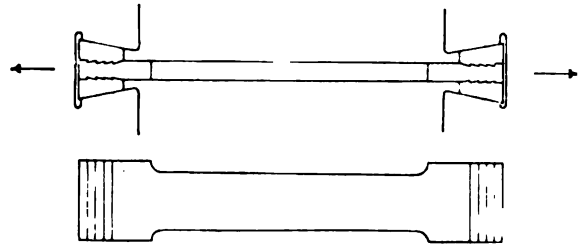


Fig. 2.

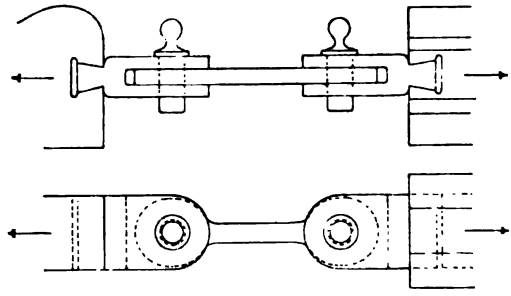


Fig. 3.

Mittelstück des Stabes etwas länger macht als die Meßlänge, und daß man die Querschnitte des Stabes von dem Mittelstück nach den Einspannstellen hin zunehmen läßt, wie dies Fig. 4 für den Rundstab deutlich erkennen läßt. (Vergl. auch Fußbemerkung S. 93 und 94.)

Eine zutreffende Vergleichung der Ergebnisse mehrerer Versuche setzt voraus, daß diese unter den gleichen Verhältnissen durchgeführt worden sind. Wie aus dem in § 9 und § 10 Erörterten hervorgeht, gehört hierzu, daß die Stäbe gleiche oder wenigstens geometrisch ähnliche Querschnitte besitzen und im allgemeinen gleich lange Zeit den Versuchen unterworfen werden.

Die der Messung unterzogene Strecke l, die Meßlänge, pflegt — insoweit es sich um die Ermittlung der durch Gleichung 3, § 3, bestimmten Bruchdehnung handelt — zu 200 mm angenommen und

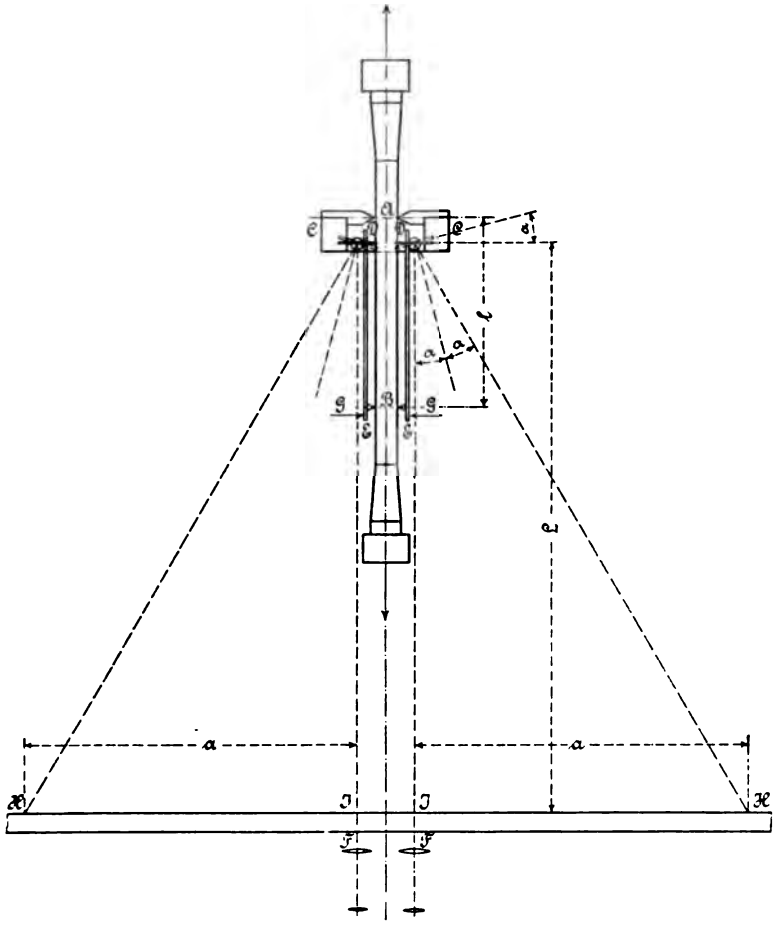


Fig. 4.

das mittlere Stück um wenigstens 20 mm länger, d. h. $l + 20$ mm prismatisch gehalten zu werden.

Wird für den Rundstab von 20 mm Durchmesser — wie in Deutschland, Österreich, Schweiz u. s. w. üblich — $l = 200$ mm zugrunde gelegt, dann fordert die in § 9, Ziff. 3 (S. 142) aus-

gesprochene Bedingung für einen Rundstab von d mm Durchmesser als Meßlänge

$$l = 200\frac{d}{20} = 10\,d \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

und für einen Flachstab von f qmm Querschnitt die Meßlänge

$$l = 200\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\frac{\pi}{4}\cdot 20^2}} = 11{,}3\sqrt{f} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Bei der großen Masse der Zugproben pflegt nur festgestellt zu werden:

a) die Bruchbelastung P_{max} (§ 3) und damit die Zugfestigkeit K_z (§ 3),
b) der Querschnitt f_b an der Bruchstelle (an der Stelle der Einschnürung, Fig. 2, § 3, sofern eine solche eintritt),
c) die Länge l_b, welche das ursprünglich l lange Stabstück nach dem Zerreißen besitzt.

Die Beobachtung nach a liefert durch Gleichung 1, § 3, die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt.

Die Ermittlung nach b ergibt durch Gleichung 2, § 3, die Querschnittsverminderung des zerrissenen Stabes.

Die Feststellung nach c liefert durch Gleichung 3, § 3, die Bruchdehnung.

Wie wir in § 3 sahen, dehnt sich zunächst die ganze Stabstrecke mehr oder minder gleichmäßig bis zum Eintritt der Bruchbelastung, dann folgt die Einschnürung des Stabes — falls eine solche überhaupt eintritt —, die mit einer verhältnismäßig großen Ausdehnung an dieser besonderen Stelle verknüpft ist. Es setzt sich hiernach die durch Gleichung 3, § 3, gemessene Dehnung im allgemeinen zusammen: aus der Dehnung der ganzen Strecke bis zum Eintritt der Bruchbelastung und aus der Dehnung an der Einschnürungsstelle, vermindert um die Verkürzung, welche aus Anlaß der mit dem Zerreißen erfolgten Entlastung des Stabes eintritt. Wird zunächst angenommen, der Bruch erfolge in der Mitte der Strecke l, so ergibt Gleichung 3, § 3, bei vorhandener Ein-

schnürung einen um so größeren Wert für φ, je kleiner l ist[1]). Im allgemeinen gehört hiernach zur Angabe von φ auch die der Größe von l. Geht der Bruch außerhalb der Mitte vor sich — was in der Regel der Fall —, so wird φ um so kleiner ausfallen, je mehr die Bruchstelle an das Ende von l rückt[2]).

---

[1]) Wie oben bemerkt, pflegt man in Deutschland, der Schweiz, Österreich, u. s w. l nach Maßgabe der Gleichung 1 bezw. 2 zu wählen. In Frankreich ist es üblich geworden, l kleiner zu nehmen, nämlich $l = 7{,}235\ d$, bezw. $l = 8{,}2\sqrt{f}$; infolgedessen ergeben sich im allgemeinen größere Werte für die Bruchdehnung des gleichen Materials, somit liefert ein und dasselbe Material, in Deutschland mit $l = 10\ d$ und in Frankreich mit $l = 7{,}235\ d$ geprüft, an letzterer Stelle eine größere Bruchdehnung, erscheint also hier, wenn φ als Maß der Zähigkeit angesehen wird, zäher. Es muß dies im Auge behalten werden, wenn man die Angaben über die Bruchdehnung (Zähigkeit) des Materials aus den verschiedenen Ländern vergleichen will. In Nordamerika wird vielfach die Meßlänge noch kleiner gewählt als in Frankreich.

[2]) Mit Rücksicht auf diesen Übelstand und sonstige Unsicherheiten hat man in bezug auf die Messung l_b folgende Vorschriften vereinbart:

Die Dehnung ist auf zwei entgegengesetzten Seiten des Rundstabes so zu messen, daß beiderseits auf jedem der Bruchstücke von dem Ende der Meßlänge bis zur Bruchstelle gemessen, und aus den zwei Summen der zusammengehörigen Stücke das Mittel genommen wird.

Erfolgt der Bruch außerhalb des mittleren Drittels der Meßlänge, so ist der Versuch auszuschließen oder das folgende Verfahren anzuwenden.

Die Meßlänge l ist von 10 zu 10 mm einzuteilen, Fig. 5 (s. die unterhalb stehenden Zahlen).

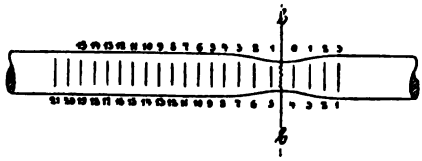


Fig. 5.

Es erfolge der Bruch im Querschnitt $b\,b$. Von der Bruchstelle ausgehend, werden zunächst die Teilstriche nach links und rechts hin neu bezeichnet, so, wie über der Figur eingeschrieben ist. Sodann wird links die Länge zwischen den Teilstrichen 1 bis 10 gemessen und zu ihr $b\,0 + b\,1$ addiert; hierauf rechts die Entfernung der Teilstriche 0 3 bestimmt und zu ihr die von links zu entnehmende Strecke 3 bis 10 hinzugefügt. Die Summe der so erhaltenen beiden Größen ergibt l_b. Hiernach ist

l_b = [Länge zwischen den Teilstrichen 1 bis 10 (links vom Bruch) + $(\overline{b\,0} + \overline{b\,1})$]
+ [Länge zwischen den Teilstrichen 0 bis 3 (rechts vom Bruch) +
Länge zwischen den Teilstrichen 3 bis 10 (links vom Bruch)].

Ein solches Maß kann, streng genommen, nicht als richtiges bezeichnet werden. Trotzdem ist es heute noch üblich, die Dehnung

---

Würde im vorliegenden Falle die Länge l nicht 200 mm, sondern 100 mm betragen, so würde sein

l_b = [Länge zwischen den Teilstrichen 1 bis 5 (links vom Bruch) + ($\overline{b0}$ + $\overline{b1}$)] + [Länge zwischen den Teilstrichen 0 bis 3 (rechts vom Bruch) + Länge zwischen den Teilstrichen 3 bis 5 (links vom Bruch)].

Auf diese Weise hat man unter der Voraussetzung, daß die Längenänderungen zu beiden Seiten des Bruches einen symmetrischen Verlauf haben, den Stab nahezu so ausgemessen, als wenn der Bruch in der Mitte erfolgt wäre.

Im Falle sich der Stab an mehr als einer Stelle besonders stark zusammengezogen hat (vergl. die Fußbemerkung Ziff. 1, S. 10), so verliert allerdings das angegebene Verfahren an Wert.

Die Einteilung der Strecke l wie auch die Bestimmung von l_b nach dem Bruche sind immer auf zwei entgegengesetzten Seiten des Stabes vorzunehmen.

Bei Flachstäben wird empfohlen, die Dehnung sowohl auf beiden Schmalseiten als auch auf einer Breitseite zu messen und das Mittel aus den beiden ersteren Messungen sowie das Ergebnis der letzteren getrennt anzugeben.

(Vergl. hiermit das S. 142 unter f) Gesagte.)

Um die Veränderlichkeit der Dehnung, überhaupt die Formänderung zu zeigen, welche ein der Zugprobe unterworfener Flachstab aufweist, wurde die in Fig. 6 (Taf. I) wiedergegebene Zusammenstellung gefertigt. Auf zwei nach Fig. 2 hergestellten Flachstäben aus Flußstahl von genau 60 mm Breite und 12 mm Stärke waren durch Längs- und Querlinien im Abstande von 10 mm Quadrate von 10 mm Seitenlänge gezeichnet worden. Alsdann wurde der eine Stab der Zugprobe unterworfen. Derselbe erfuhr hierbei die aus Fig. 6 deutlich ersichtliche Formänderung. Der Riß erfolgte an einer Stelle, welche durch eine der eingerissenen Querlinien etwas verletzt worden war. Man erkennt an dem Klaffen in der Mitte der Bruchstelle, daß die Widerstandsfähigkeit des Stabes zuerst in der Mitte überwunden wurde und daß sich von hier aus der Bruch nach den Kanten hin fortsetzt. (Vergl. S. 140, sowie Fig. 20 bis 22, Taf. IV.)

Es betrug

die Bruchbelastung P_{max}	37 460 kg,
der ursprüngliche Querschnitt f	$6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ qcm,
der Bruchquerschnitt f_b	$4{,}82 \cdot 0{,}94 = 4{,}53$ qcm,
die Dehnung auf 100 mm	27,5 mm.

Demnach

die Zugfestigkeit K_z	$\frac{37\,460}{7{,}2} = 5203$ kg/qcm,
die Querschnittsverminderung ψ	$100 - \frac{7{,}2 - 4{,}53}{7{,}2} = 37\,\%$,
die Dehnung φ (auf 100 m)	$100 \frac{127{,}5 - 100}{100} = 27{,}5\,\%$.

Fig. 6, § 8.

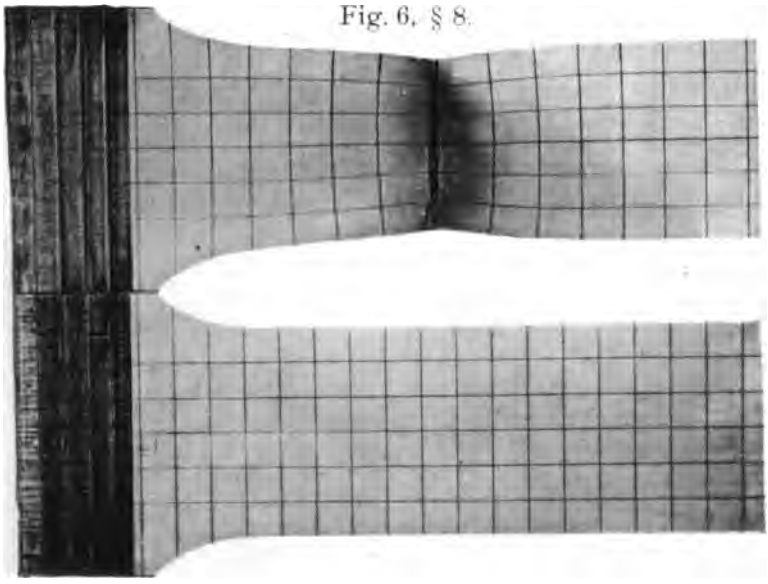


Fig. 7, § 8.

Fig. 8, § 8.

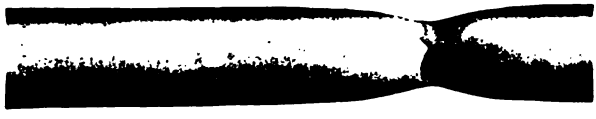


Fig. 9, § 8. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12, § 8.

Fig. 6, § 13.

in dieser Weise zu messen und die erhaltene Größe bei der Beurteilung der Güte des Materials zugrunde zu legen[1]). Richtiger würde es sein, wie auch von Hartig vorgeschlagen wurde, diejenige Dehnung zu bestimmen, welche im Augenblicke des Auftretens des größten Zugwiderstandes oder unmittelbar vor Beginn der Einschnürung vorhanden ist. Es wäre dies die Größe OE_2 in Fig. 1, § 3. Da es mit den üblichen Prüfungsmaschinen schwer hält oder wenigstens umständlich ist, die Dehnung in dem bezeichneten Augenblick genau festzustellen, so fehlt zunächst noch die Aussicht, daß diese Größe als Maß der Dehnung allgemein angenommen werden wird. Fälle, wie sie nicht selten zu verzeichnen sind, daß der gezogene Stab sich an einer Stelle einschnürt, hierauf eine noch weiter wachsende Belastung verträgt, dann an einer zweiten Stelle eine Einschnürung erfährt und in dieser bei sinkender Belastung zerreißt, würden verlangen, daß das Dehnungsmaß unmittelbar vor Beginn der ersten Einschnürung genommen wird.

Fig. 7 (Taf. I) zeigt einen Schweißeisen- und Fig. 8 einen Flußeisen-Rundstab nach dem Zerreißen. Die Verschiedenheit der Oberfläche der Stäbe kennzeichnet die beiden Materialien.

Fig. 9 und 10 (Taf. II) geben zwei Stäbe von Aluminiumbronze wieder, welche beide nach Angabe 90 % Kupfer enthalten sollen.

Fig. 11 (Taf. II) läßt einen Bronzestab (gegossen) und Fig. 12 einen Messingstab (gegossen) erkennen.

Die Prüfung dieser Stäbe hat ergeben:

	Stab Fig. 9	Stab Fig. 10	Stab Fig. 11	Stab Fig. 12
Durchmesser .	1,50 cm	1,50 cm	1,99 cm	1,97 cm
Querschnitt . .	1,77 qcm	1,77 qcm	3,11 qcm	3,05 qcm
Zugfestigkeit .	3983 kg/qcm	3232 kg/qcm	2090 kg/qcm	1472 kg/qcm
Bruchdehnung	64 % auf 100 mm	50 % auf 100 mm	8,1 % auf 200 mm	11,5 % auf 200 mm
Querschnittsverminderung	—	—	7,7 %	15,7 %

[1]) Die Beschaffenheit des Materials wird im allgemeinen beurteilt nach den für K_z, φ und ψ erhaltenen Werten. Dem Arbeitsvermögen (§ 3) ist ein besonderes Gewicht namentlich in den Fällen einzuräumen, in welchen es sich um Widerstandsfähigkeit gegenüber dynamischen Wirkungen (lebendigen Kräften) oder gegenüber den Einwirkungen von Spannungen handelt, welche durch stark wechselnde Belastungen oder durch große Temperaturunterschiede veranlaßt werden.

Da für ein bestimmtes gleichartiges Material das Arbeitsvermögen mit Annäherung proportional dem Produkt aus Zugfestigkeit und Bruchdehnung gesetzt werden darf, so kann auch dieses Produkt an Stelle des Arbeitsvermögens als ein Maß der Materialgüte angesehen werden. (Vergl. des Verfassers Maschinenelemente, 9. Aufl. (1903), S. 81 u. f.)

Über die Abhängigkeit der Dehnung φ von den Abmessungen, insbesondere vom Durchmesser bei gleichen Werten von l u. s. w. s. § 9.

Bei umfassenden Versuchen tritt zu den oben unter a bis c angegebenen Ermittlungen[1]) noch die Bestimmung

d) der Längenänderungen (§ 4 und § 5) und aus ihnen zutreffendenfalls,
e) des Dehnungskoeffizienten (§ 2, § 4, Ziff. 1, Fußbemerkung, S. 19, § 5, Ziff. 3, Fußbemerkung S. 83) und der Proportionalitätsgrenze oder der Koeffizienten α und m der Gleichung 1, § 4 (§ 5, Ziff. 3),
f) der Fließ- oder Streckgrenzen (§ 2),
g) der Elastizitätsgrenze (§ 4, Ziff. 1, S. 21 und 22) und der Dehnungsreste (§ 4, Ziff. 1, S. 22, § 5, Ziff. 1),
h) der Dehnungslinie bis zum Bruch (§ 3, Fig. 1) und des Arbeitsvermögens (§ 3).

Zur erschöpfenden Klarstellung gehören im allgemeinen ferner die chemische und die mikrographische Untersuchung des Materials, sowie die Prüfung des Verhaltens gegenüber Biegung, insbesondere gegenüber Schlagwirkungen.

Einrichtungen zum Messen der Längenänderungen bei Zug und Druck.

Zur Bestimmung der Längenänderungen hat Bauschinger den aus Fig. 4, S. 105, ersichtlichen Apparat ausführen lassen, der zu den besten gehört, welche für den Zweck benutzt werden können. Derselbe setzt Einspannung des Versuchsstabes in liegender Maschine voraus.

Der zu untersuchende Stab wird an den Enden A und B der Strecke AB, für welche die Längenänderungen bestimmt werden sollen, durch die Reißnadel mit zwei leichten Querrissen versehen. In die Ebene des einen Querrisses, etwa bei A, legen sich pressend die Stahlschneiden der beiden schraubstockartig verbundenen Backen

[1]) Zu der Ermittlung unter a (Zugfestigkeit) kann auch die Beurteilung des Bruchgefüges hinzugefügt werden. In dieser Hinsicht darf u. a. auf die Arbeit von Rudeloff: „Beitrag zum Studium des Bruchaussehens zerrissener Stäbe“ in der „Baumaterialienkunde“ Heft 6, 7, IV. Jahrgang, S. 85 u. f. verwiesen werden.

CC, die damit am Versuchsstabe festgeklemmt werden. Diese Backen bilden die Träger zweier rechts und links vom Versuchsstab befindlichen senkrechten Achsen, auf denen unten kleine Rollen (aus Hartgummi) vom Halbmesser r sitzen, während sie oben stellbare Spiegel tragen, wie dies in der Abbildung angedeutet ist. An die kleinen Rollen legen sich Stahlstäbchen DE, deren Schneiden durch Kräfte GG, ausgeübt mittels Stellschrauben, in den Querriß des anderen Endes B der Meßlänge gedrückt werden. Damit nun bei einer Änderung der Meßlänge l die beiden kleinen Rollen von den Stahlblättern DE mitgenommen werden, sind diese auf dem Rücken da, wo sie die Hartgummirollen berühren, mit feinem Schmirgelpapier belegt. Einer stetig erfolgten Längenänderung λ des Stabes wird unter diesen Umständen eine Drehung der Rollen und damit auch der Spiegel um den Winkel α entsprechen, derart, daß $\lambda = \alpha r$ ist. Mit den Fernröhren FF sieht man durch die Spiegel auf den im Abstande L aufgestellten Maßstab $HJJH$. Waren die Spiegel bei Beginn des Versuchs so eingestellt, daß man mit dem Fernrohr die Stelle J des Maßstabes sah, so wird bei einer Drehung des Spiegels um α der Beobachter mit dem Fernrohr durch den Spiegel die Stelle H des Maßstabes sehen, welche dadurch bestimmt ist, daß

$$\overline{JH} = a = L \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{r\alpha}{L \operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$\lambda = a \frac{r}{L} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

woraus für kleine Werte von α, wenn mit Annäherung

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2}$$

gesetzt wird,

$$\lambda = a \frac{r}{2L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Somit erscheint der Apparat als ein Fühlhebel, dessen kleiner Arm gleich dem Halbmesser r der Rolle und dessen großer Arm

gleich der doppelten Entfernung des Maßstabes von dem Spiegel ist. Für $r = 3{,}500$ mm und $L = 3500$ mm ergibt sich somit die Übersetzung $3{,}500 : 2 \,.\, 3500$ wie $1 : 2000$. Bei Einteilung der Skala des Maßstabes derart, daß die Teilstriche um 4 mm voneinander entfernt sind, hat demnach der Teilstrichabstand auf dem Maßstabe den Wert von $\frac{1}{500}$ mm für die Längenänderung, und da im Gesichtsfelde des Fernrohres $^1/_{10}$ Teilstrichabstand noch mit ausreichender Sicherheit geschätzt werden kann, so geht in diesem Fall die Messung auf $\frac{1}{5000}$ mm, d. i. bei $l = 150$ mm gleich $\frac{1}{750\,000}$ der Meßlänge.

Um zu beurteilen, mit welcher Annäherung die Gleichung 4 zutreffend ist, sei folgende Zusammenstellung angefügt:

$\alpha =$	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0
$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} =$	0,4998	0,4992	0,4982	0,4967	0,4949
$0{,}5 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} =$	0,0002	0,0008	0,0018	0,0033	0,0051
Fehler in % =	0,04	0,16	0,36	0,66	1,02.

Will man den Fehler bei Rechnung mit Gleichung 4 nach Möglichkeit gering erhalten, so muß der Spiegel bei Beginn des Versuchs ungefähr so eingestellt werden, daß der größte in Betracht zu ziehende Wert von α etwa zur einen Hälfte links von J und zur andern rechts von J zu liegen kommt. Dann bleibt, da der Gesamtdrehungswinkel der Rolle und des Spiegels kleiner als 4^0 zu sein pflegt, der Fehler kleiner als 0,16 %. Durch Benutzung von Fehlertabellen läßt sich der nach Gleichung 4 ermittelte Wert überaus leicht berichtigen, in der Regel ist dies jedoch nicht nötig[1]).

Wie aus dem Vorstehenden erhellt, geschieht die Messung der Verlängerung doppelt: auf zwei Seiten des Versuchskörpers. Das arithmetische Mittel wird als die Verlängerung des Stabes

[1]) Die Gleichung 4 würde genau richtige Werte ergeben, wenn der Maßstab *HJJH* nicht gerade, sondern nach einem Kreisbogen gekrümmt wäre.

angesehen. Die Messung auf nur einer Seite würde in den meisten Fällen zu Irrtümern führen: einmal weil sich die Manteloberfläche — deren Dehnung doch allein durch den Apparat gemessen wird — nicht an allen Stellen um gleich viel dehnt, zweitens weil das Versuchsstück mit dem aufgeklemmten Meßinstrument einschließlich des letzteren nicht selten kleine Bewegungen erfährt.

Für genauere Elastizitätsbeobachtungen ist es ganz wesentlich, daß Temperaturänderungen während eines Versuches möglichst vollständig vermieden werden[1]), namentlich deshalb, weil die dünnen Stahlstäbchen DE viel rascher die neue Temperatur annehmen als der Versuchsstab, und der so entstehende Unterschied in dem Wärmezustand das Ergebnis des Versuchs — selbst wenn der Stab aus dem gleichen Material bestände wie die Stahlstäbchen DE — erheblich beeinträchtigen kann. Man muß sich eben immer vergegenwärtigen, daß bei dem Wärmeausdehnungskoeffizienten von rund $\frac{1}{80\,000}$ und dem Dehnungskoeffizienten von rund $\frac{1}{2\,000\,000}$ die Verlängerung durch 1° C. Temperaturzunahme gleich derjenigen ist, die durch 25 kg/qcm Spannung herbeigeführt wird. Selbst $^1/_{10}$° C. Temperaturunterschied entspricht noch 2,5 kg/qcm Spannungsunterschied.

Die Sicherheit der Messung hängt natürlich davon ab, daß die Reibung die Rolle mitnimmt. Da nun bei Beschleunigung von Massen durch Mitnahme mittels Reibung unbedingt ein Gleiten eintreten muß, wenn die Reibungskraft kleiner ist als das Produkt aus Masse und Beschleunigung, so muß bei genauen Elastizitätsmessungen, namentlich wenn es sich um eine genaue Bestimmung der bleibenden Dehnungen handelt, mit größter Sorgfalt

[1]) Diesem Punkte wird, nach den Erfahrungen des Verfassers, selbst heute noch viel zu wenig Beachtung zuteil. Dabei reicht es nicht aus, daß man die Temperatur im Versuchsraum während einer Untersuchung möglichst unveränderlich erhält. Eine Berührung mit der Hand, ein Anhauchen, ein Luftzug u. s. w. äußern ihren die Genauigkeit der Messung herabsetzenden Einfluß. Im Falle einer solchen Störung des Wärmezustandes ist es angezeigt, zu warten, bis der Apparat in Hinsicht auf seinen Wärmezustand zu ausreichender Ruhe gelangt ist. Dies gilt namentlich auch unmittelbar nach dem Ansetzen des Spiegelapparates, weil hierbei Erwärmungen durch die Berührung mit den Händen einzutreten pflegen, die erst durch Abkühlung wieder verschwinden müssen.

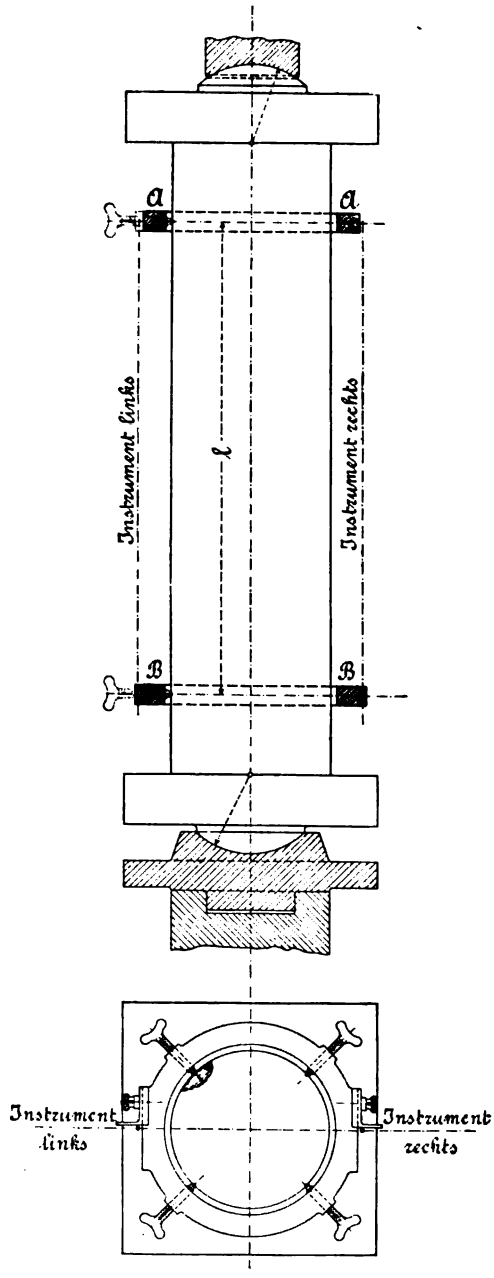

A
A
Instrument links
l
Instrument rechts
B
B
Instrument links
Instrument rechts

Fig. 13.

auf ganz allmähliche Steigerung der Belastung oder Verlängerung geachtet werden[1]).

Der Bauschingersche Spiegelapparat kann auch zur Ermittlung der Zusammendrückung von Körpern benutzt werden, doch zieht Verfasser vor, hier eine andere, für stehende Prüfungsmaschinen geeignete Einrichtung zu verwenden. Die Abbildungen Fig. 13 bis 15 zeigen dieselbe, wie sie zur Bestimmung der Elastizität von Körpern aus Zement, Zementmörtel, Beton, Sandstein u. s. w. in den Abmessungen: rund 250 mm Durchmesser[2]) und 1000 mm Höhe[2]) seit rund 12 Jahren benutzt worden ist und heute noch Verwendung findet.

Die Versuchskörper sind durch Hobeln mit genau parallelen Stirnflächen (Druckflächen) zu versehen, so daß bei der vorhandenen Kugellagerung der Druckplatten der Maschine (vergl. Fig. 13) eine gleichmäßige Druckverteilung, soweit sie überhaupt zu erreichen ist, erwartet werden darf.

Die Meßvorrichtung, vergleiche Fig. 13 und 14, besteht aus dem oberen Ring AA und dem unteren Ring BB, welche je durch 4 im rechten Winkel zueinander stehende Schrauben am Versuchskörper festgestellt werden, und zwar um l (bei Betonkörpern u. dergl. in der Regel gleich 750 mm) übereinander.

Fig. 14 und 15 zeigen die eigentliche Meßvorrichtung. Erfolgt eine Zusammendrückung des Versuchskörpers, so wird der obere Endpunkt der Stange C, die ihre Länge beibehält, gegen-

---

[1]) Auch dieser Punkt, auf dessen Bedeutung man erst dann zu treffen pflegt, wenn zum Zwecke der Ermittlung der elastischen Längenänderungen die bleibenden Dehnungen genau festgestellt werden sollen, ist viel zu wenig beachtet, was den Verfasser veranlaßt, ihn hier besonders hervorzuheben. Erst durch volle Beachtung desselben werden Instrumente, welche die Dehnung oder Zusammendrückung der Versuchskörper unter Zuhilfenahme der Reibung als Übertragungsmittel messen, zu Versuchen mit fortgesetztem Wechsel von Belastung und Entlastung verwendbar.

[2]) Verwendet man zu Elastizitätsversuchen mit Betonkörpern Prismen von Querschnitten bis etwa 12 cm Seite und 15 cm Meßlänge, wie dies bis zur Aufnahme der Untersuchung der Elastizität des Beton durch den Verfasser geschehen war, so können die Versuche bei der Ungleichartigkeit des Materials — man denke an die einzelnen Schotterstücke (Steine, Ziegelbrocken, Kiesel bis Apfelgröße) — wenigstens im allgemeinen nicht zu Ergebnissen führen, die mit ausreichender Genauigkeit auf die praktischen Anwendungen, d. h. auf auszuführende Betonbauten, übertragen werden dürfen.

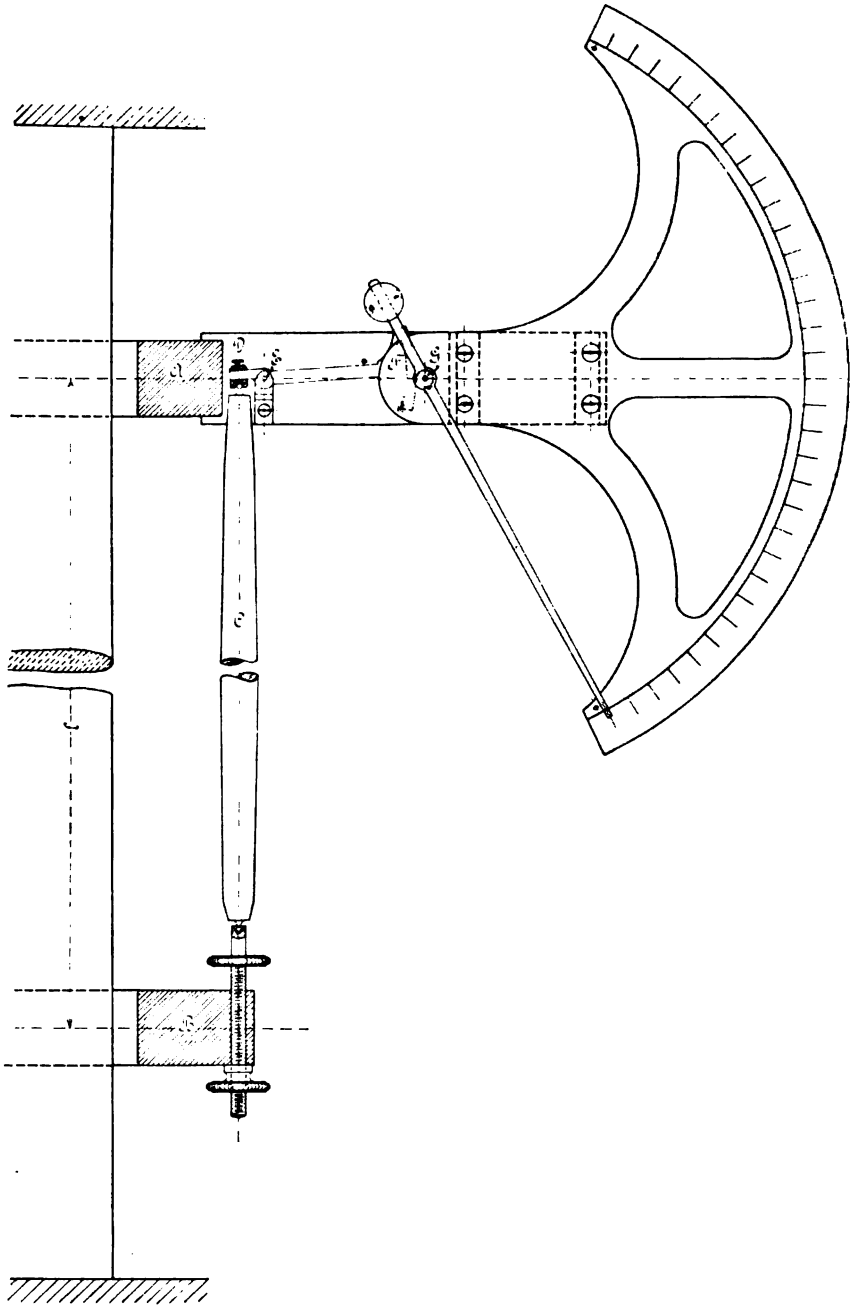


Fig. 14.

über dem Ringe *AA* und dem daran befestigten Meßinstrument um den Betrag der Verkürzung nach oben rücken; dadurch dreht sich der Hebel *DEF* um seine bei *E* gelegene Achse und nimmt durch das auf dem segmentartigen Ende *F* befestigte dünne Metallbändchen das Röllchen *G* mit, auf dessen Achse der an einer Bogenskala entlang laufende Zeiger sitzt. Dieser trägt am Ende nicht eine Spitze, sondern ist hier flach gehalten und mit einem radialen, deutlich sichtbaren Strich versehen. Die Übersetzungsverhältnisse sind bei dem einen Instrument des Verfassers

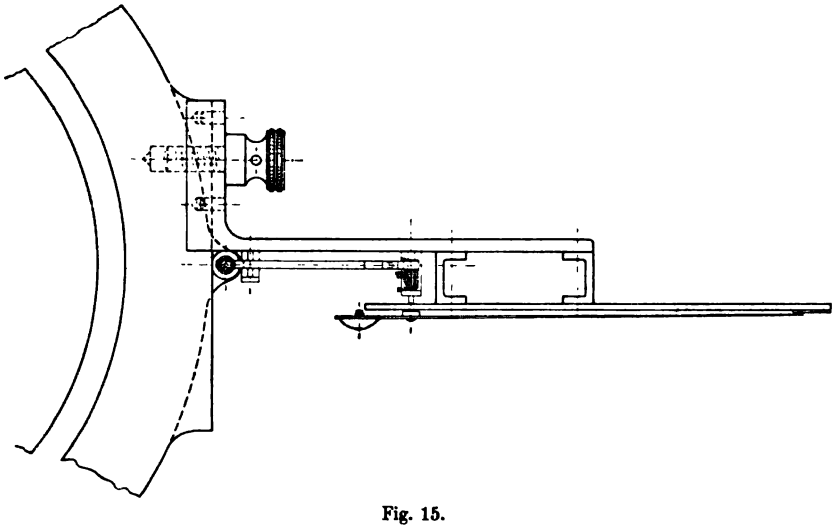


Fig. 15.

(ausgeführt von C. Klebe in München) so gewählt, daß 1 mm Zusammendrückung des Versuchskörpers 300 mm Weg auf der Bogenskala entsprechen. Da nun hier $^1/_{10}$ mm noch abgelesen werden kann, so erfolgt die Messung der Zusammendrückung der ursprünglich $l = 750$ mm langen Strecke bis auf $^1/_{3000}$ mm, d. i. $\frac{1}{3000 \,.\, 750} = \frac{1}{2\,250\,000}$ der Strecke, auf welcher die Zusammendrückung gemessen wird.

Bei einem zweiten Instrument (ausgeführt von Ludw. Tesdorpf in Stuttgart) entspricht $^1/_2$ mm Zusammendrückung des untersuchten Körpers einem Skalenweg von 300 mm, das ist 600 mal mehr. Da nun auf der Skala noch $^1/_{10}$ mm abgelesen werden kann, so

erfolgt die Messung der Zusammendrückung der ursprünglich l langen Strecke auf $\frac{1}{6000}$ mm, d. i. bei $l = 500$ mm, für welche Meßlänge das Instrument meist benutzt wird, auf $\frac{1}{3\,000\,000}$ von l. Für $l = 750$ mm würde sich $\frac{1}{4\,500\,000}$ ergeben.

Neu ist in der Hauptsache an dem ersten Instrumente die Mitnahme des Röllchens G durch ein dünnes Metallbändchen, und an dem zweiten überdies die Anordnung von Kugelzapfen an den Enden der Stange C, die zum Zwecke tunlichster Fernhaltung des Einflusses von Temperaturänderung aus Holz besteht (vergl. das S. 113 hinsichtlich des Einflusses der Temperaturänderungen Gesagte, insbesondere auch Fußbemerkung daselbst). Die übliche von Durand-Claye angewendete[1]) Übertragung erfolgt in der Weise, daß das Röllchen G verzahnt ist, ebenso das segmentartige Ende F des Hebels DEF. Gegen die Verwendung eines Zahngetriebes sprach zunächst die Absicht, den Körper abwechselnd zu belasten und zu entlasten. Der geringste tote Gang würde sich hierbei störend erweisen müssen, falls die Berührung der Zahnflanken nicht durch Federkraft gesichert wird. Ferner sprach dagegen die Erwägung, daß beim Zahngetriebe das tatsächliche Übersetzungsverhältnis von der Zahnform abhängt, und daß bei der Kleinheit der Zahnabmessungen, wie sie gewählt werden müssen, nicht darauf gerechnet werden darf, daß die Zahnform so scharf ausgeführt wird, um das Übersetzungsverhältnis genau gleich zu erhalten. Diese Gründe hatten den Verfasser schon früher bei anderer Gelegenheit veranlaßt, ein dünnes Metallband zur Übertragung zu wählen[2]).

Die Berührung der senkrechten Stange C mit dem von ihr bewegten Hebel wird durch eine Feder gesichert.

Solcher Meßinstrumente werden auch hier immer zwei, und zwar so verwendet, daß sie einander gegenüberliegen. Auf diese Weise geschieht die Messung der Verkürzung jeweils auf zwei

---

[1]) Vergl. Fußbemerkung S. 121.

[2]) Vergl. dessen Vorrichtung zur Messung der Durchbiegung von Platten in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1890, S. 1042, Fig. 9 und 10, oder auch die Schrift: „Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten", Berlin, S. 4, Fig. 9 und 10, oder „Abhandlungen und Berichte" 1897, S. 112, Fig. 90 und 91.

einander gegenüberliegenden Seiten. Als Zusammendrückung gilt das arithmetische Mittel aus beiden Verkürzungen[1]).

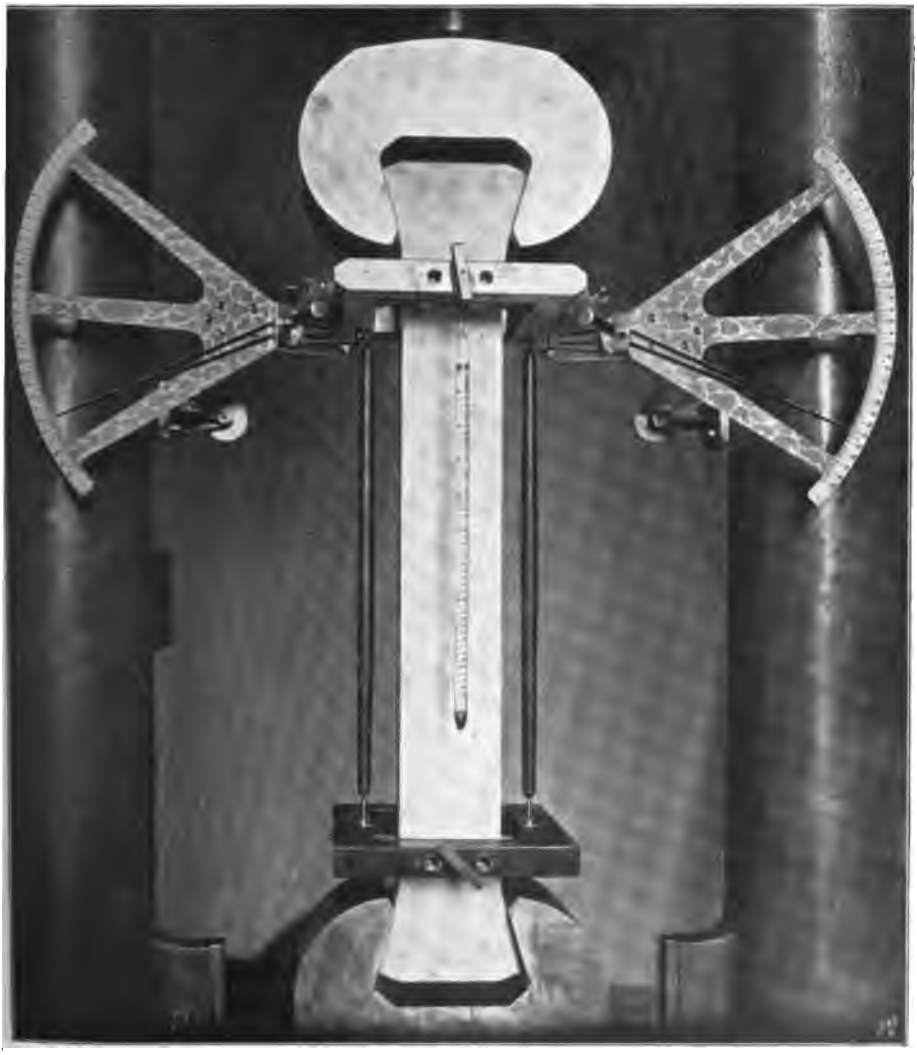


Fig. 16.

[1]) Über die Berechtigung der üblichen Dehnungsmessungen auf dem Mantel des Körpers vergl. A. Menzel, Untersuchungen über das bei der Bestimmung der Druckelastizität übliche Verfahren, die Dehnungen auf der Mantelfläche des Versuchskörpers zu messen, 1902.

Verfasser benützt diese Meßvorrichtung auch zur Ermittlung der Zugelastizität. Wie ersichtlich, besteht der einzige Unterschied

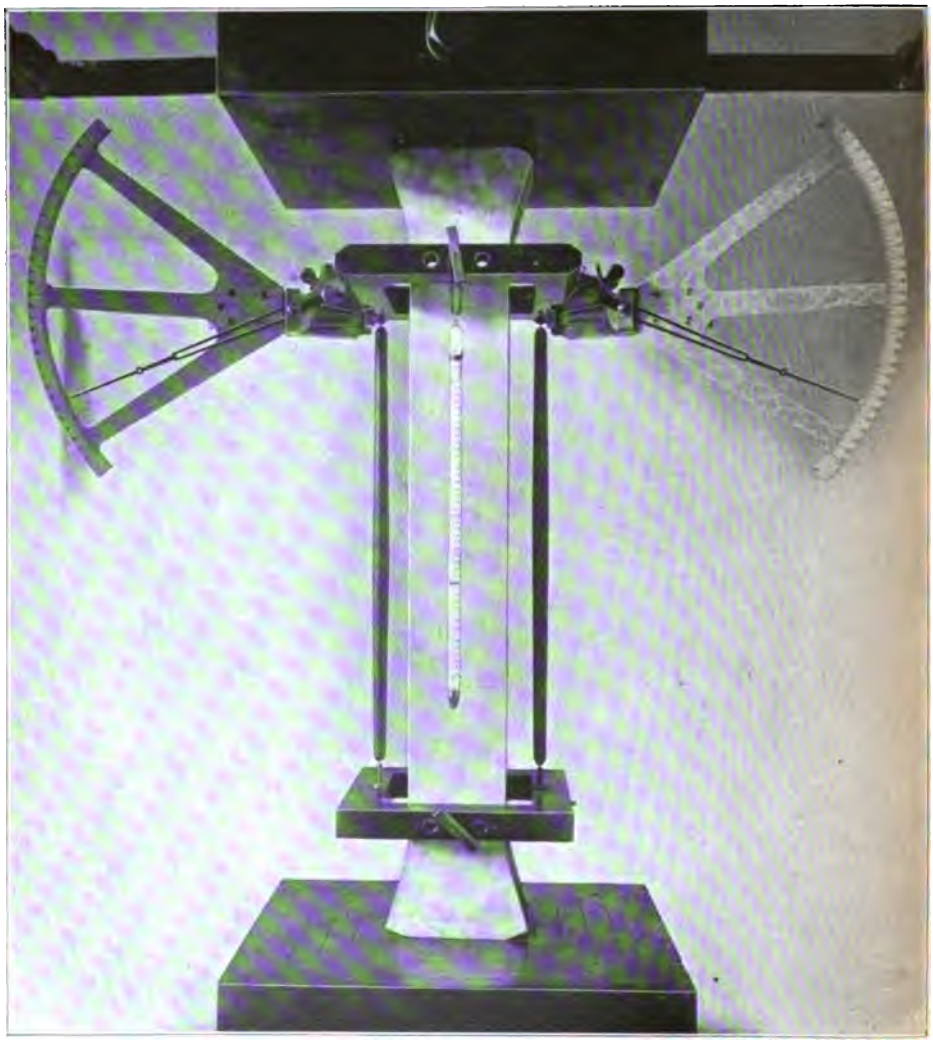


Fig. 17.

lediglich darin, daß, während bei Druckbelastung der Zeiger auf der Bogenskala von unten nach oben sich bewegt, er bei Zugbelastung von oben nach unten schwingt. Dadurch läßt es sich

in bequemer Weise ermöglichen, daß ein und derselbe Körper der Zug- und der Druckprobe unterworfen und dabei die Dehnung, bezw. die Zusammendrückung, mit denselben Instrumenten genau auf die gleiche Erstreckung gemessen werden kann. Will man vom Zug- zum Druckversuch oder von diesem zum Zugversuch übergehen, so bedarf es jeweils nur der Versetzung des Körpers mit den angeschraubten Instrumenten aus der Zug- in die Druckmaschine bezw. aus der letzteren in die erstere. Fig. 16 zeigt den Körper (Marmor) mit dem zweiten der Instrumente in der Zug- und Fig. 17 in der Druckmaschine[1]).

Neben dem Bauschingerschen Spiegelapparat steht und diesem für senkrechte Prüfungsmaschinen vorzuziehen ist der Spiegelapparat von A. Martens, hinsichtlich dessen auf A. Martens, Materialienkunde, S. 477 u. f. verwiesen werden darf.

---

[1]) Die Befestigung des obern und untern Rahmens ist in der Darstellung (für die photographische Aufnahme) mit nur drei Schrauben gegeben. Im allgemeinen ist die Befestigung mit 4 Schrauben vorzuziehen, wobei dann am obern und untern Rahmen die links und rechts von der mittleren Stellschraube vorhandenen Löcher für die Stellschrauben zu benutzen sind.

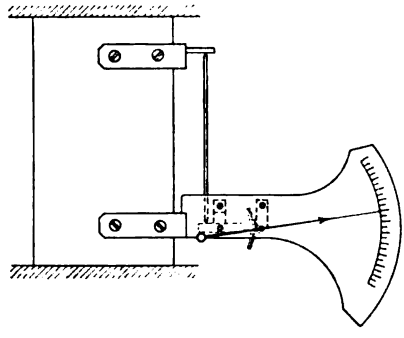


Fig. 18.

Nach Wissen des Verfassers war Durand-Claye der erste, welcher in der Weise, wie es oben besprochen ist, die Zusammendrückung von Körpern bestimmte; allerdings ist das Verfahren noch ein wenig genaues. Fig. 18 gibt das Durand-Clayesche Instrument wieder (Annales des ponts et chaussées, 1888, XV, Taf. 12, Fig. 9, Text XVI, S. 193 u. f.).

Bei der Einseitigkeit der Messung werden sich häufig recht erhebliche Ungenauigkeiten eingestellt haben. Zum Teil lassen sich dieselben unmittelbar aus den von Durand-Claye veröffentlichten Zahlen erkennen. Die senkrechte Stange des Instruments, auf deren unveränderlicher Länge die Messung beruht,

§ 9. Einfluß der Form des Stabes.

Die Aufstellungen in § 6 enthalten nur die Größe f des Stabquerschnittes; die Form desselben wäre hiernach vollständig gleichgültig. Tatsächlich ist sie es jedoch nicht, wenn auch ihr Einfluß nicht bedeutend erscheint. Daß die Querschnittsform nicht gleichgültig ist, erhellt, abgesehen von Versuchsergebnissen, schon aus folgender Erwägung.

Den Entwicklungen der üblichen Gleichungen für die Zugelastizität und Zugfestigkeit, wie sie in § 6 und § 8 aufgeführt sind, liegt zunächst die Voraussetzung zugrunde, daß die Dehnungen und Spannungen in allen Punkten des Stabquerschnittes gleich groß sind, daß sich alle Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, ganz gleich verhalten und nicht gegenseitig aufeinander einwirken. Es ändert an jenen Gleichungen nichts, ob eine Kraft P — gleichmäßig verteilt — getragen wird von einem Stab, dessen Querschnitt 10 qcm beträgt, oder von 1000 Stäben von je 1 qmm Querschnitt. In dem einen Fall ist $f = 10$ qcm, in dem anderen $f = 1000 \cdot 0{,}01 = 10$ qcm, d. h. in beiden Fällen gleich. In Wirklichkeit aber — immer gleichmäßige Verteilung der Last und gleiches Material vorausgesetzt — werden sich die 1000 Metallfäden von je 1 qmm Querschnitt unabhängig voneinander (senkrecht zur Achse) zusammenziehen können; sie werden, wenn sie sich vorher gerade berührten, die Berührung infolge der mit der Dehnung (Belastung) verknüpften Zusammenziehung aufgeben. Die einzelnen Fasern des Stabes von 10 qcm Querschnitt jedoch besitzen eine solche Unabhängigkeit nicht; sie wirken senkrecht zur Achse aufeinander ein. Das Ergebnis dieser Einwirkung aber muß ein verschiedenes sein, je nach der Form des Querschnittes, es wird ein anderes sein bei einem kreisförmigen als bei einem langgestreckt rechteckigen oder einem I-förmigen, es wird ein anderes sein bei einem dünnwandigen Hohlzylinder als bei einem Vollzylinder u. s. w. Daß aber die bezeichnete seitliche Einwirkung Dehnung und Festigkeit beeinflußt, ergibt sich aus den Betrachtungen, welche in § 7 angestellt wurden.

---

war aus Metall und deshalb sehr empfindlich gegen Temperaturänderungen. (Vergl. S. 113, insbesondere auch Fußbemerkung daselbst.) Übertragung der Bewegung erfolgte durch verzahnten Sektor und Zahnrad. Übersetzungsverhältnis 1 : 100.

Derselbe Gedankengang führt zu dem Ergebnis, daß auch die verhältnismäßige Größe der Abmessungen bei einer und derselben Querschnittsform — streng genommen — nicht ganz gleichgültig sein wird.

Versuchsergebnisse.

1. Einfluß der Stabform, welche der Querschnittsverminderung (Zusammenziehung) hinderlich ist.

Kirkaldy stellte vor rund 45 Jahren Zerreißversuche mit Rundeisenstäben nach Fig. 1, 2 und 3 an. Die Stäbe Fig. 2 sind entstanden aus Zylindern Fig. 1 je durch Eindrehen einer schmalen Nute auf den Durchmesser d, die Stäbe Fig. 3 aus solchen Fig. 1 durch Abdrehen auf den Durchmesser d.

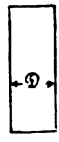


Fig. 1.

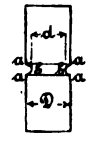


Fig. 2.

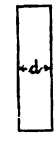


Fig. 3.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Material	Form des Stabes	Zugfestigkeit K_z (Gl. 1, § 3) in kg/qcm	Querschnittsverminderung ψ (Gl. 2, § 3)
Low Moor. Walzeisen, härteste Sorte	Fig. 1, $D = 2{,}54$ cm	4560	51,00 %
	- 2, $d = 1{,}85$ -	6420	8,03 -
	- 3, $d = 1{,}85$ -	4920	49,23 -
Govan. Geschmiedetes Walzeisen	Fig. 1, $D = 2{,}54$ cm	5025	40,71 %
	- 2, $d = 1{,}78$ -	6910	13,77 -
	- 3, $d = 1{,}78$ -	5020	36,02 -
Govan. Walzeisen	Fig. 1, $D = 2{,}59$ cm	4040	47,38 %
	- 2, $d = 1{,}80$ -	4950	21,27 -
	- 3, $d = 1{,}80$ -	4360	46,91 -

Sie zeigen die für den ersten Augenblick schlagende Eigentümlichkeit, daß die Festigkeit, d. h. Bruchbelastung dividiert durch den kleinsten Querschnitt, bei den nach Fig. 2 eingedrehten Stäben weit größer ist als bei den nicht eingedrehten. Versuche, welche in Woolwich mit Stahlstangen (von $1^3/_{16}$" engl. Stärke und mit einer den Durchmesser auf $^3/_4$" vermindernden Ausrundung versehen) angestellt worden sind sowie Versuche von Vickers u. a. bestätigen das von Kirkaldy Gefundene.

Die Erklärung ergibt sich unmittelbar aus dem in § 7 Gesagten. Unter Einwirkung der Belastung dehnen sich die Fasern, welche durch den kleinsten Querschnitt *b b*, Fig. 2, gehen; gleichzeitig tritt eine Zusammenziehung senkrecht hierzu ein. Das bei *a a a a* an den kleinsten Querschnitt sich anschließende Material setzt dieser Zusammenziehung Widerstand entgegen, d. h. übt in senkrechter Richtung zur Achse des Stabes Zugspannungen auf die durch den kleinsten Querschnitt gehenden und gespannten Längsfasern aus, welche Zugspannungen, wie die Gleichungen 4 in § 7 lehren, eine Verminderung der Längsdehnung zur Folge haben. Demnach greift das bei *a a a a* an den Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ anschließende Material, indem es der Ausbildung der Zusammenziehung sowie der Dehnung hinderlich in den Weg tritt, gewissermaßen unterstützend gegenüber dem kleinsten Querschnitt ein und erhöht dessen Festigkeit. Daß die Zusammenziehung gehindert wurde, darüber geben die Werte für ψ deutlich Auskunft.

Hieraus folgt im allgemeinen für die genannten Materialien: Erschwerung oder teilweise Hinderung der Zusammenziehung senkrecht zur Stabachse (Querschnittsverminderung) verringert die Dehnung in Richtung der letzteren und erhöht die Zugfestigkeit.

Zur Untersuchung des Einflusses der Länge der Eindrehung sowie der Ausrundung der letzteren hat Verfasser folgende Versuche mit Rundstäben nach Fig. 4 bis 7, je aus dem gleichen Material von bemerkenswerter Gleichartigkeit hergestellt, ausgeführt.

Stabform	Flußeisen			Schweißeisen		
	Zugfestigkeit K_z (Gl. 1, § 3) in kg/qcm	Querschnittsverminderung ψ (Gl. 2, § 3)	Dehnung auf 100 mm φ (Gl. 3, § 3)	Zugfestigkeit K_z (Gl. 1, § 3) in kg/qcm	Querschnittsverminderung ψ (Gl. 2, § 3)	Dehnung auf 100 mm φ (Gl. 3, § 3)
Fig. 4	4239	66 %	33 %	3664	34 %	28 %
	4242	66 -	36 -	3674	27 -	24 -
	4281	65 -	33 -	3676	28 -	26 -
Durchschnitt	4254	66 %	34 %	3670	30 %	26 %
Fig. 5	4428	62 %	—	3738	13 %	—
	4380	65 -	—	3701	12 -	—
	4447	63 -	—	3622	10 -	—
Durchschnitt	4418	63 %	—	3687	12 %	—
Fig. 6	5082	55 %	—	4154	25 %	—
	4935	55 -	—	4029	21 -	—
	5031	54 -	—	3925	24 -	—
Durchschnitt	5016	55 %	—	4036	23 %	—
Fig. 7	5894	50 %	—	4474	14 %	—

Die eingedrehten Flußeisenstäbe rissen sämtlich in der Mitte der Eindrehung oder in der Nähe derselben; gleich verhielten sich die Schweißeisenstäbe nach Fig. 6 und 7. Die Schweißeisenstäbe nach Fig. 5 dagegen rissen nach Angabe der Fig. 8 am Ende der Eindrehung unter Bildung eines größeren Spaltes, wie in der Abbildung angedeutet ist. Dadurch erklärt sich die vergleichsweise geringe Querschnittsverminderung. Die scharfe Eindrehung führt also hier beim Schweißeisen zum Bruch, bei dem zähen Flußeisen dagegen nicht. Der nachteilige Einfluß, welchen die Ungleichförmigkeit der Spannungsverteilung in dem Bruchquerschnitt des Schweißeisenstabes äußern muß (vergl. Fußbemerkung, S. 93 und 94), wird fast ganz aufgehoben durch den Einfluß der Hinderung der

Querzusammenziehung; denn die Festigkeit ist im Falle der Stabform Fig. 4 nahezu die gleiche wie im Falle der Stabform Fig. 5. Bei dem Flußeisen überwiegt in dem Querschnitte der scharfen Eindrehung der Einfluß der gehinderten Querzusammenziehung, eine Folge der großen Zähigkeit des Materials. Die Fig. 5a, 5b,

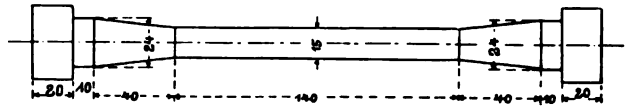


Fig. 4.

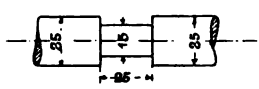


Fig. 5.

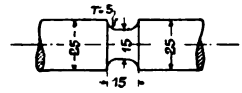


Fig. 6.

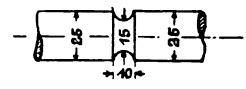


Fig. 7.

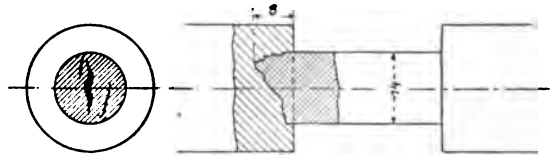


Fig. 8.

6a und 6b auf Taf. III geben die photographischen Bilder der Probestäbe nach dem Zerreißen, und zwar

Fig.	5a	einen	Flußeisenstab	nach Fig.	5,
-	5b	-	Schweißeisenstab	- -	5,
-	6a	-	Flußeisenstab	- -	6,
-	6b	-	Schweißeisenstab	- -	6.

Die in vorstehender Zusammenstellung enthaltenen Ergebnisse zeigen, daß bei einer Eindrehungslänge von 25 mm der Einfluß der gehinderten Querzusammenziehung noch nicht erheblich ist, daß er dagegen mit Abnahme dieser Länge rasch wächst. Im übrigen bestätigen sie das oben hinsichtlich dieses Einflusses Ausgesprochene vollständig.

Der letztere ist auch der Grund, weshalb die der Messung unterworfene Strecke der Probestäbe — Fig. 1 bis 3 in § 8 —

Fig. 5^{a}, § 9.

Fig. 6^{a}, § 9.

Fig. 5^{b}, § 9.

Fig. 6^{b}, § 9.

kürzer gewählt werden muß als der prismatische Teil derselben. Man hat sich eben zu sichern, daß ein solcher Einfluß innerhalb der der Beobachtung unterworfenen Strecke nicht mehr Geltung erlangen kann.

Zur Feststellung des Einflusses solcher Eindrehungen auf die Festigkeit von Stäben aus nicht zähem Material hat Verfasser Versuche mit grauem Gußeisen angestellt, und zwar unter Zugrundelegung

a) der Stabform Fig. 4, jedoch Durchmesser des mittleren zylindrischen Teils 2 cm,
b) der Stabform Fig. 5, jedoch Durchmesser der Eindrehung 2 cm bei 2,9 cm Stabstärke,
c) der Stabform Fig. 7, jedoch Durchmesser der Eindrehung 2 cm bei 2,9 cm Stabstärke.

Die Ergebnisse mit den 10 Stäben, hergestellt bei demselben Guß aus dem gleichen Material, sind dem Folgenden zu entnehmen.

Stabform	a (Fig. 4)	b (Fig. 5)	c (Fig. 7)
Zugfestigkeit	1557	1446	1508
	1557	1583	1350
		1417	
	1521	1439	1449
Durchschnitt	1545	1471	1436

Der Bruch erfolgte bei den Stäben a (Fig. 4) innerhalb des zylindrischen Teiles, bei den Stäben b (Fig. 5) am Ende der Eindrehung, d. h. da, wo der 20 mm starke Zylinder aus dem 29 mm dicken heraustritt, und bei den Stäben c (Fig. 7) in der Mitte der Eindrehung.

Wie ersichtlich, ist die durchschnittliche Festigkeit der Stäbe mit Eindrehung etwas geringer als diejenige der glatten Stäbe, Fig. 4. Der Einfluß, welchen die Ungleichförmigkeit der Spannungsverteilung über den Bruchquerschnitt äußert, überwiegt den hier nicht bedeutenden Einfluß der gehinderten Querzusammenziehung. Ein erheblicher Unterschied der durchschnittlichen Festigkeiten für die Stabform b (Fig. 5) und c (Fig. 7) ist nicht vorhanden.

Zusammenfassung.

Bei Stäben mit Eindrehungen, wie erörtert, wird die Zugfestigkeit, d. h.

$$\frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{kleinster Querschnitt}}$$

beeinflußt

1. von der Ungleichförmigkeit der Verteilung der Spannungen über den Querschnitt in dem Sinne, daß die Festigkeit Verminderung erfährt (vergl. auch § 6, S. 93 und 94, Fußbemerkung),
2. von der Hinderung der Querzusammenziehung in dem Sinne, daß die Festigkeit erhöht wird.

Bei zähem Material, wie es als Flußeisen, Schweißeisen u. s. w. gegeben sein kann, überwiegt der Einfluß Ziff. 2 namentlich dann, wenn die Eindrehung sehr kurz ist (Fig. 2, Fig. 7); die Zugfestigkeit ist dann bedeutend größer als diejenige prismatischer Stäbe (Fig. 4).

Bei Material, welches eine merkbare Querschnittsverminderung im Bruchquerschnitt nicht zeigt, wie z. B. graues Roheisen, scheint der Einfluß Ziff. 1 das Übergewicht zu erlangen; die durchschnittliche Festigkeit ergibt sich etwas kleiner als bei prismatischer Form, doch ist der Unterschied sehr gering.

Hinsichtlich dieses verschiedenen Verhaltens beider Arten von Material kommt auch in Betracht, daß bei zähen Stoffen die am stärksten angestrengten Fasern — ohne zu reißen — nachgeben, wodurch die weniger stark beanspruchten mehr zur Übertragung herangezogen werden.

Hieraus folgt, daß in bezug auf die Zugfestigkeit von Körpern mit Eindrehungen oder Einkerbungen nicht allgemein gesagt werden kann: sie ist größer oder kleiner als diejenige von prismatischen Körpern aus dem gleichen Material. Es erscheint unstatthaft, das für ein zähes Material gewonnene Ergebnis ohne weiteres auf ein weniger zähes oder ein sprödes zu übertragen und umgekehrt[1]).

[1]) In neuerer Zeit trifft man in der technischen Tagesliteratur auf die Begriffe „scheinbare“ und „wahre“ Zugfestigkeit. Da es sich hierbei einerseits um Fragen handelt, die nicht bloß in grundsätzlicher Hinsicht von

2. *Einfluß der Länge und des Durchmessers.*

In bezug hierauf sowie hinsichtlich des Einflusses der Querschnittsform hat der Chefingenieur Barba in Creusot umfassende Versuche anstellen lassen, die in der Hauptsache von Coureau und Biguet durchgeführt wurden (Barba, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils 1880, S. 682—714). Die wesentlichen Ergebnisse finden sich im folgenden unter A und B sowie in Ziff. 3 unter A, B und C wiedergegeben.

Bedeutung sind, sondern denen auch eine recht erhebliche Bedeutung für die ausführende Technik innewohnt, und da andererseits die ganze Unterscheidung durch den Einfluß der Stabform auf die Zugfestigkeit begründet wird, so darf der Gegenstand an dieser Stelle nicht wohl unerörtert bleiben.

Die beiden Begriffe haben ihren Ausgang genommen von einem Aufsatze, den der Vorstand des mech.-technischen Laboratoriums an der techn. Hochschule München, Prof. Dr. Föppl, in der Tonindustrie-Zeitung 1896, S. 145 und 146 unter dem Titel: „Scheinbare und wahre Zugfestigkeit des Zements“ veröffentlicht hat. Föppl war damals der Meinung, daß der oben erörterte Einfluß der Stabform bisher unbemerkt geblieben sei. (Vergl. dagegen Fußbemerkung S. 102 u. f. sowie S. 122 u. f.) Unter „wahrer“ Zugfestigkeit wird die Festigkeit ausreichend langer Prismen verstanden, während mit „scheinbarer“ diejenige von eingekerbten Körpern, wie ein solcher in Fig. 9, dargestellt erscheint, gemeint ist. Diese Abbildung gibt die übliche Form („Achterform“) der Zementprobekörper wieder, wie sie zum Zwecke der vergleichenden Prüfung des Zementes benutzt wird. Um die Ungleichförmigkeit der Lastverteilung über den Querschnitt zu zeigen, ließ Föppl Kautschukkörper von der Form Fig. 9 herstellen und mit feinen Strichen senkrecht zur Zugrichtung versehen. Unter Einwirkung der Zugkraft gehen diese Striche mit Ausnahme desjenigen, welcher im mittleren Querschnitt mit der Symmetrieachse zusammenfällt, in Kurven über derart, daß diese dem mittleren Strich die erhabene Seite zukehren, entsprechend einer starken Zunahme der Dehnung nach außen. Zum Zwecke ziffernmäßiger Bestimmung der Ungleichförmigkeit der Dehnung über den Querschnitt ließ Föppl an zwei Kautschukkörpern in der Mitte je zwei um ungefähr 1 mm voneinander abstehende feine Querstriche und sodann noch 7 Striche in Richtung der Achse mit Tusche ziehen: den einen zusammenfallend mit der Stabachse, die übrigen links und rechts im Abstande von 4, 8 und 11,5 mm. Für diese ursprünglich 1 mm langen Fasern wurden nun die Dehnungen des belasteten Körpers ermittelt, und zwar

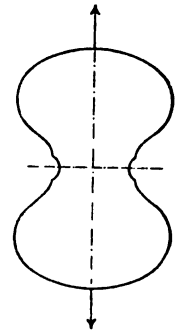


Fig. 9.

im Abstande	0	4	8	11,5 mm	von der Achse
zu	24	34	53	100,	

Unter D, Ziff. 3 sind die aus neuerer Zeit stammenden Ergebnisse der von Bauschinger in bezug auf den Einfluß der Gestalt der Probestäbe durchgeführten Zugversuche zusammengestellt (Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. technischen Hochschule in München, 1892, Heft XXI).

In Einzelheiten weichen die Ergebnisse der Barbaschen Versuche von denjenigen der Bauschingerschen Untersuchungen

---

wenn die Dehnung im Abstande 11,5 mm gleich 100 gesetzt wird. Föppl bemerkt hierzu: „Das Verhältnis zwischen der Dehnung am Rande zum Mittelwert aller Dehnungen stellt sich hiernach auf etwa 2,1. Für einen ersten angenäherten Versuch wird man hiernach annehmen dürfen, daß auch die wahre Zugfestigkeit des Zementes etwas über doppelt so groß wie die scheinbare (in dem vorher angegebenen Sinne dieses Wortes) zu schätzen ist.“ Hiernach würde also die Zugfestigkeit prismatischer Stäbe von Zement reichlich das Doppelte von derjenigen betragen, welche für gewöhnlich durch die Proben ermittelt wird. In der Tat bemerkt auch Föppl: „Sobald ein Ingenieur, der die Berechnung einer aus Zement hergestellten Konstruktion auszuführen hat, den Wert der Zugfestigkeit des Zements nötig hat (z. B. bei der Berechnung von Betonbrücken, Futtermauern u. s. w.), darf man ihm nicht die scheinbare Zugfestigkeit angeben, da er sonst die Festigkeit des Materials unterschätzen würde, sondern die erheblich höhere wahre Zugfestigkeit, auf die es bei diesen Anwendungen allein ankommt. Es hat daher immerhin ein erhebliches Interesse für den Fabrikanten, auch die wahre Zugfestigkeit seines Fabrikats zu kennen.“

Durch den ersten dieser zwei Sätze wird dem Ergebnisse des Versuchs mit den Kautschukkörpern und den daran geknüpften Folgerungen eine schwerwiegende Rückwirkung auf die zulässige Zuginanspruchnahme des Zements, gegenüber welcher Beanspruchungsart die größte Vorsicht an und für sich angezeigt erscheint, eingeräumt. Dieser Umstand, in Verbindung mit der Tatsache, daß seit jener Zeit bereits in mehreren Aufsätzen die wirkliche Zugfestigkeit des Zementmörtels als bedeutend größer aufgefaßt wird wie diejenige, welche die übliche Prüfung des Zements liefert, nötigt darzulegen, daß es für die ausführende Technik nicht zulässig ist, derart erhöhte Zugfestigkeiten für Zementmörtel in Rechnung zu stellen.

Zunächst folgt schon aus dem oben vorgeführten Versuchsmaterial, wonach z. B. Flußeisen im Falle kurzer Eindrehung eine weit höhere Zugfestigkeit liefert, während Gußeisen eine kleine Verminderung zeigt, daß ein ziffernmäßiger Schluß von der Dehnung eines Kautschukkörpers auf die Zugfestigkeit eines beliebigen Materials — ohne Eingehen auf die Eigenart desselben — wie er oben angeführt worden ist, als unzulässig bezeichnet werden muß.

Er muß aber auch noch aus einem anderen Grund zu Ergebnissen führen, welche unrichtig sind.

Der Schluß setzt voraus, daß die Spannungen proportional den Dehnungen

etwas ab. Es dürfte dies vorzugsweise davon herrühren, daß die von Materialungleichheiten veranlaßten Abweichungen häufig be-

---

sind. Das, trifft nun für Kautschuk durchaus nicht zu. Nach Versuchen von Winkler (Zivilingenieur 1878, S. 81 u. f.) ergibt sich für Kautschuk

σ	ε	$\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$
0	0	
		$\frac{1}{10,9}$
0,5	0,046	
		$\frac{1}{6,7}$
1,0	0,121	
		$\frac{1}{5,8}$
1,5	0,207	
		$\frac{1}{4,6}$
2,0	0,316	
		$\frac{1}{4,3}$
3,0	0,548	
		$\frac{1}{3,2}$
4,0	0,859	
		$\frac{1}{2,2}$
5,0	1,309	
		$\frac{1}{2,1}$
6,0	1,794	

Hiernach wächst der Dehnungskoeffizient α von der ersten Spannungstufe bis zur letzten von $\frac{1}{10,9}$ bis auf $\frac{1}{2,1}$, d. i. etwa um das 5fache. Bei einer solchen Veränderlichkeit des Verhältnisses zwischen Dehnungen und Spannungen erscheint es nicht mehr zulässig, einen ziffernmäßigen Schluß zu ziehen, der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen voraussetzt. Gerade der Umstand, daß bei Kautschuk die Dehnungen viel rascher wachsen als die Spannungen, hat zur Folge, daß die Ungleichförmigkeit der Spannungsverteilung bedeutend geringer ist, als sie nach Maßgabe des oben Bemerkten ermittelt wurde. Bereits aus diesem Grunde allein müßte man zu einer sehr starken Überschätzuug der Zugfestigkeit des Zementes, dessen Dehnungskoeffizient weit weniger veränderlich ist als derjenige des Kautschuks, gelangen, wenn man dieselbe gemäß den Darlegungen Föppls 2,1 mal so groß nehmen würde, als sie sich bei den üblichen Zementproben ergibt.

Die ganze Frage schien dem Verfasser für das Ingenieurwesen wichtig genug, um Versuche auszuführen, durch welche die Zugfestigkeit von genügend langen prismatischen Stäben aus Zementmörtel, d. h. also dessen „wahre“ Zugfestigkeit, unmittelbar festgestellt wird. Demgemäß wurden Körper in größerer Zahl von einer Form, ähnlich der in Fig. 16, § 8 dargestellten, sowie von der Form Fig. 9 angefertigt, und zwar in einer großen Zementfabrik mit der dem

deutend größer sind als die Unterschiede, welche die Verschiedenheit der Gestalt bedingt.

Zwecke entsprechenden Sorgfalt. Die Durchschnittsergebnisse sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten. Weshalb auch Druckversuche in dieselbe aufgenommen worden sind, wird aus dem Späteren hervorgehen.

Zusammensetzung der Versuchskörper: 1 Zement, 3 Sand
Alter - - 28 Tage.

	9 % Wasser, Mischung des Mörtels mit der Hand		9½ % Wasser, Mischung des Mörtels mit der Kugelmischtrommel	
	Spez. Gewicht	Zugfestigkeit	Spez. Gewicht	Zugfestigkeit
Zugkörper				
a) Achterform, Fig. 9, Querschnitt: 5 qcm	2,33	36,8 kg/qcm	2,36	38,5 kg/qcm
b) Prismatische Form, Fig. 16, § 8, Querschnitt: 50 qcm	2,22	17,35 -	2,29	25,1 -
Druckkörper	Spez. Gewicht	Druckfestigkeit	Spez. Gewicht	Druckfestigkeit
a) Würfel von 50 qcm Querschnitt	2,28	285 kg/qcm	2,32	292 kg/qcm
b) Zylinder von rund 25 cm Durchmesser (rund 480 qcm Querschnitt) und rund 25 cm Höhe	2,23	165 -	2,25	203 -

Die spezifischen Gewichte wurden durch Wägen in der Luft und im Wasser bestimmt.

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Zugfestigkeit der prismatischen Stäbe Fig. 16, § 8 (ohne Einkerbung) bedeutend kleiner ist als diejenige der Körper mit der Achterform Fig. 9. Es stehen sich die Zahlen 36,8 und 17,35 bezw. 38,5 und 25,1 kg/qcm gegenüber.

Dieser Unterschied ist nun allerdings nicht auf Rechnung der Stabform zu setzen, sondern er erscheint als eine Folge davon, daß Zementkörper von 50 qcm Querschnitt eben nicht so dicht und nicht so vollkommen gemischt ausfallen als solche von 5 qcm Querschnitt, die überdies diesen Querschnitt nur an einer einzigen Stelle besitzen. Daß Zementkörper von größerem Querschnitt unter sonst gleichen Verhältnissen in der Tat eine geringere Widerstandsfähigkeit aufweisen als solche mit kleinerem Querschnitt, das zeigen die Ergebnisse der in die Zusammenstellung aufgenommenen Druckversuche. Obgleich für kreiszylindrische Versuchskörper, deren Höhe gleich dem Durchmesser ist, nach S. 162 und 163

A. Die Versuchsstäbe haben verschiedene Durchmesser d, ebenso sind die der Messung unterworfenen Stabstrecken l verschieden lang, und zwar derart, daß $l:d$ konstant.

Die Versuchsstäbe wurden aus gleich starken Stangen herausgearbeitet.

Gleiche Dauer der einzelnen Versuche wurde mit Sorgfalt erstrebt.

Die angegebenen Werte sind je die Durchschnittszahlen aus einer Versuchsreihe.

sowie S. 165 eine etwas größere Druckfestigkeit zu erwarten steht als für Würfel, ergaben hier die Zylinder mit 480 qcm Querschnitt eine bedeutend kleinere Druckfestigkeit als die Würfel mit 50 qcm Querschnitt; es stehen sich die Zahlen 165 und 285, bezw. 203 und 292 gegenüber. Wenn sich nun der Einfluß des größeren Querschnittes bei Druckversuchen so ausgeprägt zeigt, so darf er bei Zugversuchen in noch höherem Maße erwartet werden, wie die oben angegebenen Zahlen auch nachweisen; denn gegenüber Zugbeanspruchung werden sich naturgemäß geringere Dichte und Unvollkommenheit der Mischung des Zementmörtels der Regel nach einflußreicher erweisen müssen als gegenüber Druckbeanspruchung. Recht deutlich zeigt sich der Einfluß der größeren Vollkommenheit des Mischens des Mörtels bei Vergleich des spez. Gewichts und der Zugfestigkeit der Zugkörper mit größerem Querschnitt: 2,22 bezw. 17,35 und 2,29 bezw. 25,1. Dabei kann nicht verkannt werden, daß die Herstellung der Probekörper in der Zementfabrik mit einer Sorgfalt erfolgte, welche von derjenigen, mit welcher auf der Baustelle gearbeitet zu werden pflegt, kaum erreicht werden dürfte.

Fassen wir das Vorstehende zusammen, so muß ausgesprochen werden, daß es für die ausführende Technik — wenigstens bis auf weiteres — nicht nur nicht rätlich erscheint, mit höheren Zugfestigkeitszahlen zu rechnen, als sie bei den üblichen Zugversuchen mit Zementmörtel erhalten werden, sondern daß es vielmehr angezeigt ist, weit niedrigere zu wählen.

Es empfiehlt sich außerdem, im Auge zu behalten, daß die übliche Zugprobe mit Zementkörpern in erster Linie eine vergleichende Güteprobe des Zementes sein, nicht aber Zugfestigkeitszahlen liefern soll, welche ohne weiteres auf die Ausführungen übertragen werden können. In bezug auf die Beschaffung von Erfahrungsmaterial für die letzteren glaubt Verfasser angesichts des Irrtums, der hier bloßzulegen war, betonen zu sollen, was er bereits früher an anderer Stelle (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1895, S. 417, S. 489, Fußbemerkung) hervorgehoben hat: die Versuche sind in der Regel unter solchen Verhältnissen anzustellen, wie sie bei den wichtigeren technischen Anwendungen vorzuliegen pflegen, so daß die ermittelten Erfahrungszahlen auf diese mit ausreichender Sicherheit übertragen werden können.

Versuche mit Kautschukkörpern können außerordentlich lehrreich sein: in

Rundstäbe aus Flußeisen.

Nummer der Versuchsreihe	Durchmesser d cm	Stabstrecke l cm	Verhältnis $l:d$	Festigkeit K_z kg/qcm	Querschnittsverminderung $\psi = 100\frac{f-f_b}{f}$ %	Verlängerung $l_b - l$ cm	Dehnung $\varphi = 100\frac{l_b - l}{l}$ %
1	0,690	5,0	7,24	4220	69,3	1,64	32,8
2	1,035	7,5		4200	69,0	2,49	33,2
3	1,380	10,0		4210	69,7	3,30	33,0
4	1,725	12,5		4170	68,6	4,18	33,5
5	2,070	15,0		4160	69,2	5,08	33,6
6	2,415	17,5		4090	69,7	5,80	33,2
7	2,760	20,0		4000	68,8	6,60	33,0
8	3,105	22,5		3960	69,5	7,65	34,0
Durchschnitt				4130	69,2		33,3

erster Linie, um die Art der Formänderungen zu zeigen, die unter gewisser Belastung bei gegebener Körperform eintritt, wie z. B. im Falle der Zugbelastung beim Körper Fig. 9, um dem Auge erkennen zu lassen, daß die Dehnung von innen nach außen zunimmt. Wird jedoch ein ziffernmäßiger Schluß auf die Größe der Spannungen beabsichtigt, so muß die starke Veränderlichkeit des Verhältnisses zwischen Dehnungen und Spannungen bei Kautschuk in Rechnung gezogen werden. Bei Übertragung auf andere Materialien ist sodann überdies deren Eigenart im Vergleich zu Kautschuk zu berücksichtigen. Dazu gesellen sich die Einflüsse, wie sie im vorliegenden Falle zu berücksichtigen waren: diejenigen der Dichte, der Querschnittsgröße, der Herstellung u. s. w.

Soll die Zulässigkeit der Höherwertung der Zugfestigkeit des Zementes für auszuführende Bauten nachgewiesen werden, so muß dies durch Versuche mit Körpern und unter Verhältnissen geschehen, welche denjenigen der tatsächlichen Ausführung genügend entsprechen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß bereits Durand-Claye 8 Jahre früher in den Annales des ponts et chaussées, 1888, II, S. 173 bis 211, ziemlich eingehend — allerdings auch nicht einwandfrei — mit dem zur Erörterung stehenden Verhalten von Zement- und Steinkörpern sich beschäftigt hat. Daselbst finden sich auch (Taf. 12) die erwähnten Formänderungslinien, welche sich auf den Kautschukkörpern zeigten, mit denen Durand-Claye gleichfalls gearbeitet hatte. Ein weiterer Aufsatz von demselben Verfasser findet sich in der gleichen Zeitschrift 1895, S. 604 u. f. Durand-Claye gelangte dabei zu dem Ergebnis, daß die wahre Zugfestigkeit des Zementes um 50 % größer sei als diejenige der Achterform, während Föppl auf ein Mehr von 110 % kam, wie oben angegeben wurde.

Im übrigen ist gegenüber dem Begriff „wahre Zugfestigkeit“ ganz allgemein das in der Fußbemerkung 2, S. 11 Hervorgehobene festzuhalten.

Rundstäbe aus Flußstahl.

Nummer der Versuchsreihe	Durchmesser d cm	Stabstrecke l cm	Verhältnis $l:d$	Festigkeit K_z kg/qcm	Querschnittsverminderung $\psi = 100\frac{f-f_b}{f}$ %	Verlängerung $l_b - l$ cm	Dehnung $\varphi = 100\frac{l_b-l}{l}$ %
1	0,690	5,0		6480	36,5	1,00	20,0
2	1,035	7,5		6490	38,0	1,41	18,8
3	1,380	10,0		6390	37,4	1,82	18,2
4	1,725	12,5	7,24	6330	38,4	2,27	18,1
5	2,070	15,0		6350	31,8	2,70	18,0
6	2,415	17,5		6200	35,8	3,17	18,1
7	2,760	20,0		6320	34,4	3,90	19,5
8	3,105	22,5			nicht ermittelt		
Durchschnitt				6360	36,1		18,6

Die Versuchsergebnisse zeigen:

α) eine, wenn auch nicht bedeutende Abnahme der Festigkeit mit wachsendem Durchmesser,

β) Unabhängigkeit der Querschnittsverminderung ψ vom Durchmesser,

γ) Unabhängigkeit der Dehnung φ vom Durchmesser d und der Länge l, sofern das Verhältnis $l:d$ das gleiche bleibt.

B. Die Versuchsstäbe besitzen verschiedene Durchmesser, dagegen sind die der Messung zugrunde gelegten Stabstrecken gleich lang.

Nummer des Versuchs	Durchmesser d cm	Stabstrecke l cm	Festigkeit K_z kg/qcm	Verlängerung $l_b - l$ cm	Dehnung $\varphi = 100\frac{l_b-l}{l}$ %	Bemerkungen
1	2,0	10,0	3700	3,75	37,5	Flußeisen
2	1,0	10,0	3690	3,05	30,5	
3	0,5	10,0	3760	2,50	25,0	
1	2,0	10,0	5930	2,59	25,9	Flußstahl
2	1,0	10,0	5940	2,10	21,0	
3	0,5	10,0	6000	1,70	17,0	

Diese Versuchsergebnisse lehren, daß die Dehnung φ bei gleicher Größe der Stabstrecke, welche der Bestimmung zugrunde gelegt wird, in ziemlichem Maße abhängt von dem Durchmesser d, und zwar derart, daß sie wächst mit zunehmendem Durchmesser.

Nach dem Ergebnis A, γ entfällt diese Abhängigkeit bei gleichem Verhältnis $l : d$.

Hieraus folgt, daß bei Forderung einer bestimmten Dehnung φ für eine bestimmte Stablänge l ein gewisser Durchmesser d vorgeschrieben sein muß. Sind die Durchmesser verschieden, so haben sich die Meßlängen zu verhalten wie diese.

3. Einfluß der Querschnittsform.

A. Die Versuchsstäbe haben verschiedene Querschnittsform, jedoch gleich große Querschnittsfläche.

Aus einer und derselben Stange Flußeisen von 40 mm Quadratseite wurden hergestellt:

3 Rundstäbe von 26 mm Durchmesser,
3 Flachstäbe - 40 - Breite und 13 mm Stärke,
3 ausgefräste Stäbe mit Querschnitt nach Fig. 10.

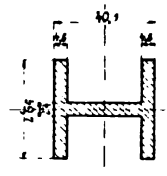


Fig. 10.

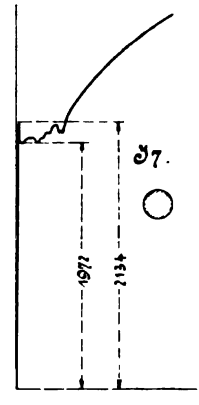


Fig. 11.

Die mittlere prismatische Länge betrug 290 mm, die Meßlänge 260 mm, entsprechend der Gleichung 2 in § 8.

Die Stäbe wurden der Stange so entnommen, daß zunächst ein Rundstab, sodann ein Flachstab, hierauf ein Stab mit Querschnitt nach Fig. 10, alsdann wieder ein Rundstab u. s. f. aufeinander folgten.

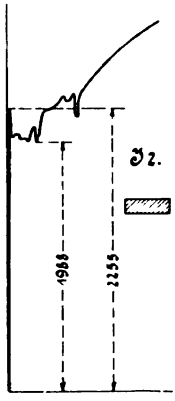


Fig. 12.

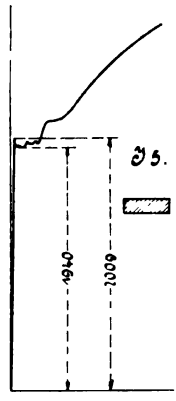


Fig. 13.

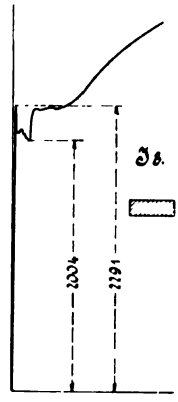


Fig. 14.

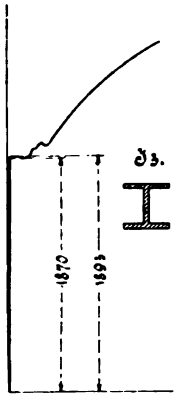


Fig. 15.

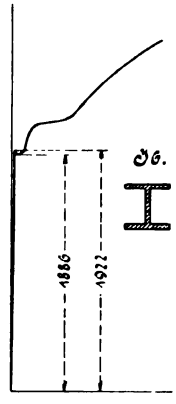


Fig. 16.

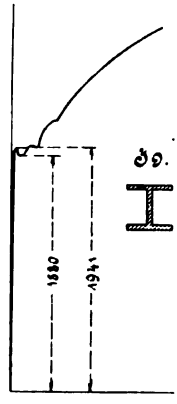


Fig. 17.

Die Ergebnisse der Untersuchung, welcher das Material in ausgeglühtem Zustande unterworfen wurde, sind in den folgenden Zusammenstellungen und den Schaulinien: § 4, Fig. 13 und 14 sowie Fig. 11 bis 17 dieses Paragraphen niedergelegt.

Fig. 19 (Stab J_1), Fig. 20 (J_8), Fig. 21 und 22 (J_9) Taf. IV, geben die photographischen Bilder der zerrissenen Stäbe; insbesondere läßt Fig. 19 die Güte des Materials erkennen.

Querschnittsform	Streckgrenze obere σ_o kg/qcm	Streckgrenze untere σ_u kg/qcm	Zugfestigkeit K_z kg/qcm	Bruchdehnung φ %	Querschnittsverminderung ψ %	Schaulinie
Rundstab J_1	2407	2075	3667	33,8	69,7	Fig. 14, § 4
- J_4	2465	1895	3578	31,9	71,0	- 13, § 4
- J_7	2134	1972	3525	30,0	70,2	- 11, § 9
Durchschnitt	2335	1981	3590	31,9	70,3	
Flachstab J_2	2255	1988	3507	30,4	62,6	Fig. 12, § 9
- J_5	2009	1940	3474	30,5	63,7	- 13, § 9
- J_8	2291	2004	3484	26,3	61,4	- 14, § 9
Durchschnitt	2185	1977	3488	29,1	62,6	
Stab nach Fig. 10 J_3	1893	1870	3333	35,3	62,7	Fig. 15, § 9
- - - - J_6	1922	1886	3320	30,4	59,5	- 16, § 9
- - - - J_9	1941	1880	3353	26,6	61,0	- 17, § 9
Durchschnitt	1919	1879	3335	30,8	61,1	

Die Durchschnittswerte der Zusammenstellungen, welche in Fig. 18 zeichnerisch dargestellt sind, lassen beim Vorwärtsschreiten von den Rundstäben zu den Rechteckstäben und von diesen zu den Stäben mit dem Querschnitt Fig. 10 deutlich erkennen:

1. bedeutendes Sinken der oberen Streckgrenze σ_o,
2. weit geringeres Sinken der unteren Streckgrenze σ_u,
3. erhebliche Verminderung des Unterschiedes $\sigma_o - \sigma_u$,
4. Abnahme der Zugfestigkeit K_z.

Hiernach erweist sich die Streckgrenze, namentlich der Wert σ_o, abhängig von der Querschnittsform; sie liegt am höchsten für die Rundstäbe, dann folgen die Flachstäbe und hierauf die Stäbe mit dem Querschnitt Fig. 10. Diese Abhängigkeit besteht auch hinsichtlich der Zugfestigkeit, wenn auch in geringerem Maße.

Nach der S. 122 u. f. angestellten Erwägung steht ein solcher Einfluß der Querschnittsform zu erwarten. Die Fasern, welche bei dem Zugversuch das Bestreben haben, sich senkrecht

zu ihrer Achse zusammenzuziehen, sind hierin bei dem kreisförmigen Querschnitt mehr gehindert als im Durchschnitt bei dem rechteckigen und bei diesem mehr als bei dem Querschnitt Fig. 10.

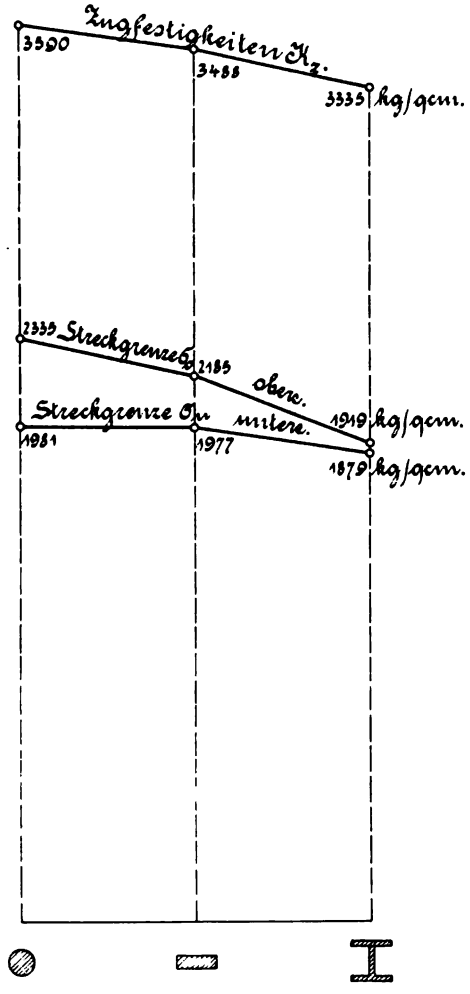


Fig. 18.

Von Interesse ist es, den Einfluß der Querschnittsform auf den Verlauf der Dehnungslinie während der Periode des Streckens des Materials in den Fig. 13 und 14, § 4, und den vorstehenden Fig. 11 bis 17 zu verfolgen.

Lehrreich ist ferner die Verfolgung des Vorganges beim Zerreißen der Stäbe mit dem Querschnitt Fig. 10: zunächst reißt der Steg in der Mitte, dann erweitert sich der Riß nach den Flanschen hin, diese beginnen in der Mitte zu reißen, und zuletzt erfolgt der Bruch an den Flanschenecken; die beiden photographischen Bilder, Fig. 21 und 22, Taf. IV, deuten auf diese Aufeinanderfolge hin.

B. Aus Versuchen mit 1 cm starken Flachstäben ergab sich

bei der Breite von 1 2 3 4 5 6 7 8 cm
die Dehnung auf 10 cm zu 31,0 34,0 35,0 37,2 39,0 40,8 38,5 34,5%,
d. h. am größten bei dem Querschnittsverhältnis 1 : 6.

Die Festigkeit betrug durchschnittlich 3870 kg/qcm.

C. Die Flachstäbe haben verschiedene Breite.

Nummer des Versuchs	Stärke a cm	Breite b cm	Verhältnis $b:a$	Festigkeit K_z kg/qcm	Dehnung $\varphi = 100\frac{l_b - l}{l}$ %	Bemerkungen
1	1,015	2,000	1,98	4270	29,5	Flußeisen
2	0,995	5,985	6,02	4130	35,0	
3	1,017	9,980	9,81	4020	40,0	
1	1,310	2,000	1,53	2400	51,5	Kupfer
2	1,308	5,980	4,57	2380	55,2	
3	1,313	9,990	7,61	2315	59,0	

Nach diesen Versuchen nimmt die Festigkeit mit der Breite etwas ab (vergl. auch A).

Hierbei ist nicht außer acht zu lassen, daß dieser Einfluß möglicherweise von der Einspannung herrühren kann, und daß es überhaupt nicht leicht ist, bei verhältnismäßig breiten Stäben eine gleichmäßige Verteilung der Zugkraft über den Querschnitt zu sichern.

Wir schließen aus den im vorstehenden niedergelegten Versuchsergebnissen, daß Ergebnisse von Zugversuchen, streng

Fig. 19,

Fig. 20,

Fig. 21,

Fig. 22,

§ 9.

genommen, nur dann unmittelbar verglichen werden können, wenn die Versuchsstäbe, sofern sie nicht dieselben Abmessungen besitzen, wenigstens geometrisch ähnlich sind.

Gelten für 2 Rundstäbe	Meßlänge	Querschnittsabmessung	Querschnitt
die Größen . . .	$l_1\ l_2$	$d_1\ d_2$	$f_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2,\ f_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2$
und für 2 Flachstäbe die			
Größen	$l_1\ l_2$	$a_1 b_1\ a_2 b_2$	$f_1 = a_1 b_1,\quad f_2 = a_2 b_2,$

so findet sich als Bedingung der Vergleichbarkeit der ermittelten Dehnungen für Rundstäbe

$$l_1 : l_2 = d_1 : d_2 = \sqrt{\tfrac{\pi}{4} d_1^2} : \sqrt{\tfrac{\pi}{4} d_2^2} = \sqrt{f_1} : \sqrt{f_2},$$

und für Flachstäbe mit Annäherung

$$l_1 : l_2 = \sqrt{a_1 b_1} : \sqrt{a_2 b_2} = \sqrt{f_1} : \sqrt{f_2}.$$

Der Satz, welcher soeben hinsichtlich der Vergleichbarkeit der Ergebnisse von Zugversuchen festzustellen war, gilt mit der in § 10 ausgesprochenen Ergänzung dahingehend, daß auch die Geschwindigkeiten, mit welchen die Versuche durchzuführen sind, ausreichend übereinstimmen müssen, gleichfalls für alle anderen Beanspruchungsarten.

D. Versuche mit Rund- und Flachstäben aus Fluß- und Schweißeisen.

Bauschinger gelangte hinsichtlich des Einflusses der Form der Probestäbe zu folgenden Ergebnissen.

a) Der Dehnungskoeffizient (α, Gleichung 3, § 2), wie er durch die üblichen Messungen an der Oberfläche der Stäbe erhalten wird, ist bei Rundstäben etwas kleiner als bei Flachstäben aus dem gleichen Material; bei dicken Flachstäben etwas kleiner als bei dünnen und überhaupt bei größeren Querschnittsabmessungen ein wenig geringer als bei kleineren

Querschnitten. Alle diese Unterschiede sind jedoch nur gering und werden durch zufällige, von Materialungleichheiten herrührende Abweichungen weit übertroffen.

b) Die Zugfestigkeit (K_z, Gleichung 1, § 3) erscheint von der Querschnittsform nicht beeinflußt.

c) Die Querschnittsverminderung (ψ, Gleichung 2, § 3) ist bei Flachstäben von der Form und Größe des Querschnittes unabhängig. Stärkere Rundstäbe geben etwas kleinere Werte für dieselbe als schwächere aus dem gleichen Material, doch ist der Unterschied nicht bedeutend.

d) Die Dehnung (φ, Gleichung 3, § 3), gemessen für eine bestimmte ursprüngliche Länge, ist von der Querschnittsform, von dem Verhältnis der Breite zur Dicke bei Flachstäben, also davon, ob der Querschnitt überhaupt kreisrund oder rechteckig ist, nicht abhängig; aber sie wächst mit der Größe f des Querschnittes derart, daß

$$\varphi = a + b\sqrt{f}$$

gesetzt werden kann, worin die Koeffizienten a und b wesentlich von der Beschaffenheit des Materials abhängen.

e) Vergleichbare Ergebnisse für die Dehnung (φ, Gleichung 3, § 3) werden erhalten, wenn man die Meßlänge der Probestäbe proportional der Quadratwurzel aus dem Querschnitt wählt. Unter Zugrundelegung eines Normal-Rundstabes von 20 mm Stärke und 200 mm Meßlänge ergibt sich die proportionale Länge eines Probestabes vom Querschnitt f gleich

$$200\,\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\frac{\pi}{4}\cdot 20^2}} = 11{,}3\sqrt{f}\ \text{Millimeter},$$

sofern f in qmm eingesetzt wird.

f) Das in der Fußbemerkung 2 S. 107 zuerst angegebene Verfahren zur Messung der Dehnung erscheint genügend genau, solange die Bruchstelle noch wenigstens ein Viertel der Meßlänge von den Enden der letzteren abliegt. Dabei sind Rundstäbe auf zwei entgegengesetzten Seiten, Flachstäbe auf einer Breitseite zu messen.

g) Querschnittsverminderung (ψ, Gleichung 2, § 3) und Dehnung (φ, Gleichung 3, § 3) stehen in keinem Zusammenhang.

h) Proportionalitäts- und Streckgrenze können auch dann, wenn die Probestäbe sorgfältigst ausgeglüht worden sind, in einem und demselben Eisenstück oder in Stücken der nämlichen Erzeugungsfolge in so hohem Grade verschieden sein, daß dagegen alle anderen Einflüsse, diejenigen der Form und der Größe des Querschnittes, falls sie überhaupt vorhanden sind, verschwinden.

Wird die Proportionalitätsgrenze von zerrissenen Stäben gleichen Materials bestimmt, so ergibt sie sich nahezu gleich hoch gehoben, wie hoch oder niedrig sie auch ursprünglich gelegen war. Dieses interessante Ergebnis lassen die folgenden, für 3 Paar Flachstäbe gültigen Zahlen deutlich erkennen.

Bezeichnung des Probestabes	Ursprünglich			Nach dem Zerreißen	
	Dehnungskoeffizient	Proportionalitätsgrenze kg/qcm	Streckgrenze kg/qcm	Dehnungskoeffizient	Proportionalitätsgrenze kg/qcm
IV 1a	$\frac{1}{2\,230\,000}$	2350	2460	$\frac{1}{2\,280\,000}$	2700
IV 2c	$\frac{1}{2\,080\,000}$	1000	1670	$\frac{1}{2\,160\,000}$	2700
07c	$\frac{1}{2\,130\,000}$	1840	2130	$\frac{1}{2\,220\,000}$	2800
07a	$\frac{1}{2\,160\,000}$	1290	2080	$\frac{1}{2\,130\,000}$	2850
16a	$\frac{1}{2\,170\,000}$	2230	2370	$\frac{1}{2\,245\,000}$	2930
16d	$\frac{1}{2\,150\,000}$	1290	2230	$\frac{1}{2\,210\,000}$	2910

§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluß der Zeit auf Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung.

Einfluß der Temperatur.

1. Einfluß der Zeit.

Von neueren Untersuchungen, welche den schon längst bekannten, auch in § 5, Ziff. 4 bereits erörterten Einfluß der Zeitdauer des Versuchs nachweisen, seien die folgenden angeführt.

Versuchsreihen mit Rundstäben von 1,6 cm Stärke aus Flußeisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Dehnung, gemessen auf 10 cm
2,5 Minuten	3935 kg/qcm	32 %
75 -	3720	34 -

(Barba, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils, 1880, S. 710.)

Feinkorneisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Dehnung φ	Festigkeit K_z	Dehnung φ
Rasch zerrissen	4990 kg/qcm	22 %	4340 kg/qcm	23,3 %
Langsam zerrissen	4493	25,2 -	3770	28,8 -

Gewöhnliches Puddeleisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Dehnung φ
Rasch zerrissen	3720 kg/qcm	30,4 %
Langsam zerrissen	3516	35,23 -

Harter Wolframstahl.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Festigkeit K_z	Festigkeit K_z
Rasch zerrissen	14350 kg/qcm	13270 kg/qcm	11359 kg/qcm
Langsam zerrissen	12300	11339	10230

Dehnung 1 bis 1,5 %.

(Goedicke, Öst. Zeitschrift für Berg- u. Hüttenwesen 1883, S. 578.)

Hiernach ergeben rascher durchgeführte Versuche eine größere Festigkeit sowie eine kleinere Dehnung und (nach Versuchen des Verfassers) in der Regel auch eine kleinere Querschnittsverminderung. Dadurch erklärt es sich, daß die Prüfung eines und desselben Materials, welche an der einen Stelle sehr rasch durchgeführt worden ist, daselbst ungenügende Dehnung und Querschnittsverminderung ergibt, an einer zweiten Stelle, langsamer vorgenommen, die bedungene Dehnung und Querschnittsverminderung aufweist.

Leder.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z
1 Stunde 26 Minuten	301 kg/qcm
166 Tage	200 -

(George Leloutre, Les transmissions par courroies, cordes et cables métalliques, Paris 1884, oder des Verfassers Bericht hierüber in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1884, S. 871. Daselbst finden sich auch Mitteilungen über das asymptotische Wachstum der Verlängerung mit der Dauer der Belastung sowie über das dementsprechende Verhalten bei Entlastung.)

Versuche des Verfassers über den Einfluß der Zeit auf die Festigkeit des Leders bestätigen das von Leloutre Gefundene. Vergleiche auch den dritten, in § 4, Ziff. 7, besprochenen Riemen.

Hanfseile.

Die ursprünglich 750 mm lange, der Beobachtung unterworfene Strecke eines 55 mm starken Seiles aus badischem Schleißhanf, welches nach und nach bis zu 500 kg belastet worden ist, zeigt, nachdem diese Belastung 10 Minuten gewirkt hat, die Länge 788,4 mm. Das Seil bleibt längere Zeit hindurch derselben Anstrengung ausgesetzt.

Es beträgt	nach 10 Minuten	1	7	26	50	82	120 Std.
die Seillänge	788,4	789,7	791,8	793,2	794,5	795,8	796,5 mm
entsprechend einer weiteren Verlängerung um	0	1,3	3,4	4,8	6,1	7,4	8,1 -

Hierauf wurde das Seil bis auf 100 kg entlastet.

Es beträgt	unmittelbar nach der Entlastung	nach 34 Stunden
die Seillänge	791,9 mm	790,8 mm
entsprechend einer Verkürzung um	4,6 -	5,7 -

(Des Verfassers Versuche über die Elastizität von Treibriemen und Treibseilen in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1887, S. 221 u. f.)

Hieraus folgt, daß die Gesamtdehnung, der Dehnungsrest wie auch die Federung Funktionen der Zeit sind.

In sehr anschaulicher Weise läßt sich der Einfluß der Geschwindigkeit, mit welcher das Zerreißen erfolgt, zeigen durch Verwendung von selbstzeichnenden Festigkeitsmessern mit Federbelastung.

(Hugo Fischer, Dinglers polyt. Journal 1884, Bd. 251, S. 337 u. f.)

Nach Maßgabe des im Vorstehenden enthaltenen Materials wird behufs Erlangung vergleichbarer Versuchsergebnisse davon auszugehen sein, daß auch die Geschwindigkeit bei der Durchführung der Versuche entsprechend gewesen sein muß (vergl. § 9, Ziff. 3). Dabei ist, wie bereits in § 5, Ziff. 4, hinsichtlich des Einflusses der Zeit hemerkt wurde, die Art des Stoffes im Auge zu behalten. Beispielsweise wird ein Stab aus hartem Stahl außerordentlich rasch zerrissen werden müssen, soll ein Einfluß der Zeit auf das Ergebnis hervortreten. Dagegen wird sich dieser bei einem Lederriemen auch noch im Falle längerer Versuchsdauer feststellen lassen.

Die unmittelbare Vergleichbarkeit der Prüfungsergebnisse setzt somit voraus: entweder es ist jeweils die Versuchsdauer so lang, daß der Einfluß der Zeit ein unmerklicher, oder es muß die Geschwindigkeit, mit welcher die Dehnung erfolgt, wenigstens angenähert die gleiche Größe besitzen.

Von Bauschinger ausgeführte Versuche über den Einfluß der Zeit bei Zugproben mit verschiedenen Metallen haben nach dessen Mitteilung zu dem Ergebnisse geführt, daß bei Fluß- und Schweißeisen, bei Kupfer, bei Messingblech und bei Bronzeguß ein Einfluß der Zeit oder der Geschwindigkeit, mit welcher die Dehnung vorgenommen wird, nicht oder kaum merklich ist innerhalb der Grenzen, in denen diese Versuche durchgeführt

worden sind. Bei Messingguß ist er sehr gering und wird, wenn überhaupt vorhanden, leicht durch zufällige Ungleichmäßigkeiten des Materials verdeckt; ebenso bei Zinkguß und Gußeisen. Bei Zinkblech dagegen ist er im Verlaufe der Dehnungslinie (vergl. § 3, Fig. 1, S. 9, § 8, S. 106) sowohl als auch bei der Bruchbelastung ($E_2 E$, Fig. 1, § 3) deutlich erkennbar, nicht aber an der Dehnung (φ, Gleichung 3, § 3) und Querschnittsverminderung (ψ, Gleichung 2, § 3). Bei Blei (Guß- und Walzblei) ist der Einfluß der Zeit unsicher gegenüber dem Verlaufe des Arbeitsdiagrammes, unverkennbar an der Bruchbelastung und kaum bemerkbar an der Bruchdehnung. Am größten erwies sich der in Rede stehende Einfluß bei gegossenem Zinn. (Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. technischen Hochschule in München, 1891, Heft XX.)

Die Dauer dieser Bauschingerschen Versuche z. B. mit den 4 Flußeisenstäben betrug nach Überschreiten der Streckgrenze und unter Abrechnung der Ruhepausen (von 30 Min., 17 Min., 22 St. 32 Min., 22 Min.) 26, 41, 46 und 77 Minuten, d. s. Zeiträume, von denen der kleinste noch bedeutend größer erscheint als derjenige, innerhalb dessen sich bei Flußeisen der Einfluß der Dauer des Versuchs durch die Prüfungsergebnisse überhaupt deutlich äußert; sie liegen somit außerhalb des Gebietes, welches für die obigen Darlegungen wie auch für diejenigen des § 5, Ziff. 4, in Betracht kommt. Bei Beachtung dieses Umstandes klärt sich der Widerspruch auf, welcher zwischen den Ergebnissen der Bauschingerschen Versuche und dem oben Angeführten zu bestehen scheint.

2. Einfluß der Temperatur.

Die Angaben, welche über die Elastizitäts- und Festigkeitseigenschaften der Materialien gemacht werden, gelten, sofern nichts anderes bemerkt ist, für die gewöhnliche Temperatur, d. i. bei etwa 20° C. Zur Klarstellung, daß sich diese Eigenschaften bei höheren Temperaturen wesentlich ändern, seien die folgenden Versuche des Verfassers angeführt[1]).

[1]) Über die Versuche anderer finden sich Angaben in des Verfassers Maschinenelementen, 9. Aufl., S. 77 u. f. Hinsichtlich der Abhängigkeit des Dehnungskoeffizienten von der Temperatur s. u. a. Martens, Mitteilungen u. s. w. 1890, Heft 4; Paul A. Thomas, Annalen der Physik, vierte Folge, Bd. 1, 1900, S. 232 u. f.

a) Versuchsreihen mit Rundstäben aus demselben Flußeisenblech.

Bei jeder Temperatur wurden 4 Stäbe geprüft; die angegebenen Größen sind Durchschnittswerte.

Versuchstemperatur ° C.	Streckgrenze obere kg/qcm	Streckgrenze untere kg/qcm	Zugfestigkeit kg/qcm	Bruchdehnung %	Querschnittsverminderung %	Belastungsdauer Minuten	Schaulinie
20	2649	2176	3561	28,4	69,3	27	Fig. 1
200	2391	2105	5140	18,9	55,1	22	- 2
300	1373	—	4352	34,8	63,7	29	- 3
400	—	—	3200	38,2	64,6	20	- 4

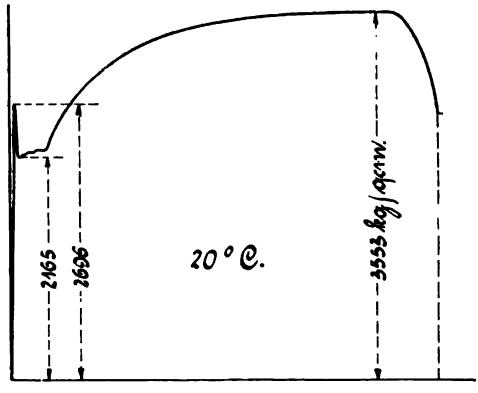


Fig. 1.

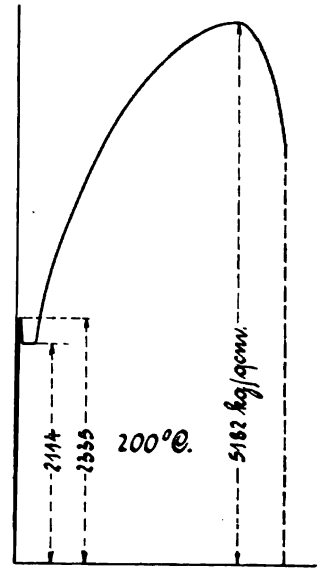


Fig. 2.

Eine Betrachtung der Schaulinien Fig. 1 bis 4 zeigt, daß der Vorgang des Streckens oder Fließens (§ 2) mit steigender Temperatur immer mehr an Ausdehnung verliert und bei 400° C. überhaupt nicht mehr vorhanden ist.

Die Zahlen der Zusammenstellung lassen erkennen

1. zunächst starkes Wachsen der Zugfestigkeit von 3561 kg/qcm (bei 20° C.) auf 5140 kg/qcm (bei 200° C.), sodann Wiederabnahme derselben,

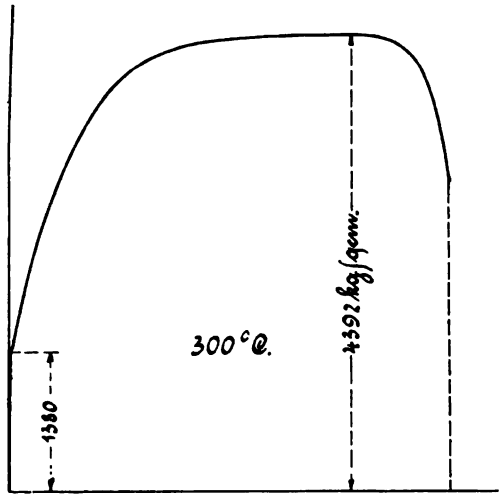


Fig. 3.

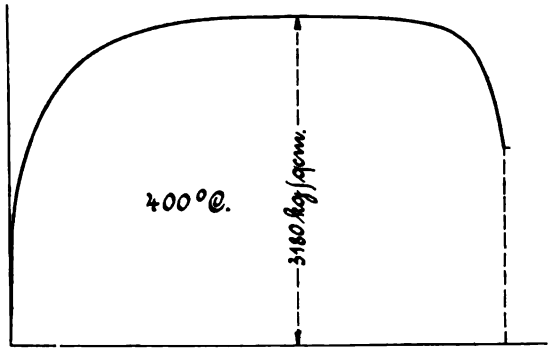


Fig. 4.

2. zunächst starke Abnahme der Bruchdehnung von 28,4 auf 18,9 %, alsdann Wiederzunahme derselben,

3. Änderung der Querschnittsverminderung in demselben Sinn wie die Bruchdehnung.

Die Schaulinien Fig. 1 bis 4 zeigen durch ihren Verlauf sowie in der Größe der umschlossenen Fläche die Änderungen der Festigkeit, der Bruchdehnung und des Arbeitsvermögens (§ 3) deutlich[1]).

b) Versuchsreihen mit Rundstäben aus dem gleichen Stahlguß.

Bei jeder Temperatur wurden 4 Stäbe geprüft. Die angegebenen Größen sind Durchschnittswerte.

Versuchstemperatur ° C.	Zugfestigkeit kg/qcm	Bruchdehnung %	Querschnittsverminderung %
20	4285	25,5	50,4
200	4502	7,7	15,9
300	4788	12,0	15,8
400	3984	15,3	24,1
500	2691	33,3	44,6
550	2071	39,5	49,2

Die Ergebnisse lassen eine sehr bedeutende Abnahme der Bruchdehnung des Materials (Zähigkeit) bei rund 200° C. erkennen, und zwar auf weniger als ein Drittel[2]).

In Fig. 5 bis 7 sind die Linienzüge der Zugfestigkeiten, der Bruchdehnungen und der Querschnittsverminderungen dargestellt.

---

[1]) Über die Einzelheiten dieser Untersuchung sowie über die Ergebnisse der Prüfung von weiteren 14 Flußeisenblechen ist berichtet in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1904, S. 1300 u. f.

[2]) Die Ergebnisse der unter Ziff. 1 besprochenen Versuche mit Flußeisenblech sowie die angeführten Versuche mit Stahlguß führen u. a. zu der Schlußfolgerung: für Dampfkessel, Dampfgefäße u. s. w., welche Gegenstände im Betriebe höhere Temperaturen annehmen, und von denen man natürlich verlangt, daß sie in diesem Zustande volle Widerstandsfähigkeit besitzen, müssen die Festigkeitseigenschaften der Baustoffe bei diesen höheren Temperaturen beachtet werden. Das Material lediglich nach den Festigkeitseigenschaften bei gewöhnlicher Temperatur zu beurteilen, was jetzt noch geschieht, erscheint nicht richtig. Jedenfalls muß im Falle der Verwendung von Flußeisen und Stahlguß zu Dampfkesseln u. s. w. die Zähigkeit des Materials bei höherer Temperatur und nicht diejenige bei gewöhnlicher Temperatur als maßgebend angesehen werden.

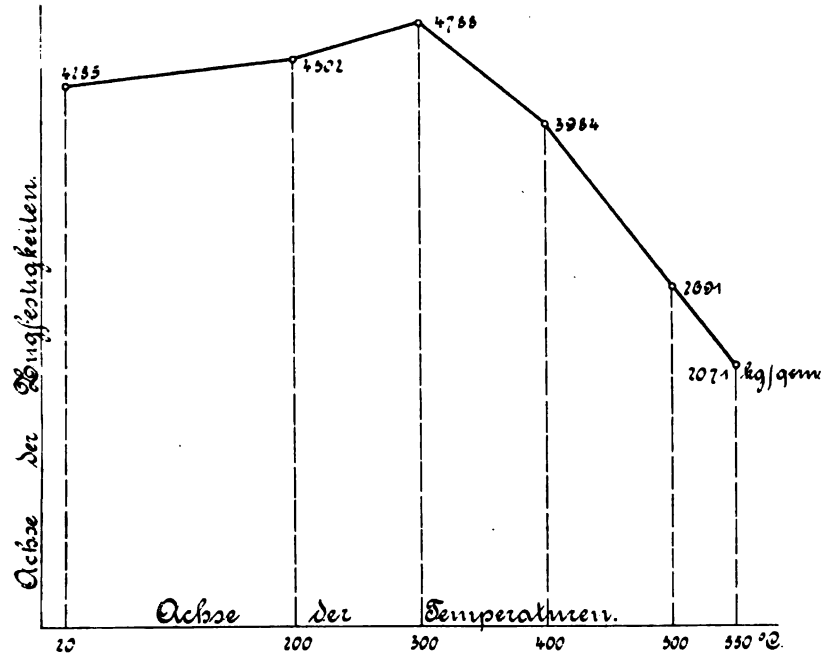

Achse der Zugfestigkeiten.
4155
4502
4788
3984
2891
2071 kg/qcm
Achse der Temperaturen.
20
200
300
400
500
550 °C.

Fig. 5.

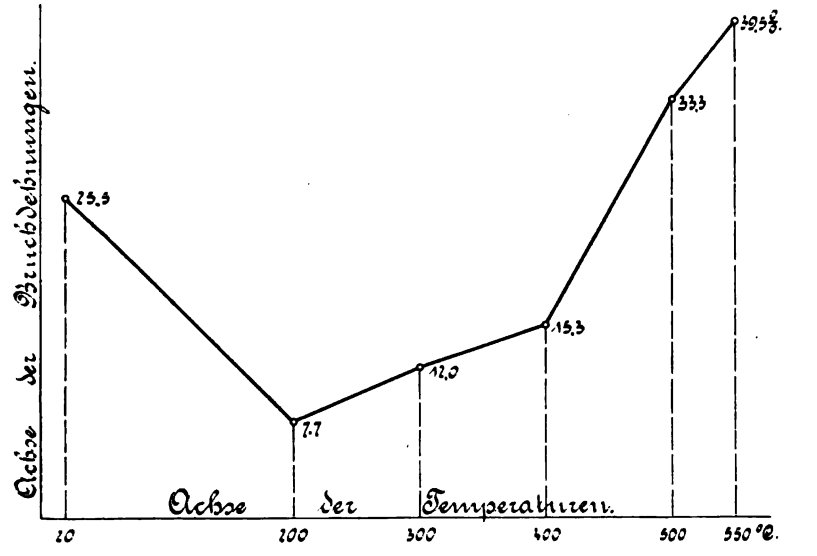

Achse der Bruchdehnungen.
25,5
7,7
12,0
15,3
33,3
19,5%
Achse der Temperaturen.
20
200
300
400
500
550 °C.

Fig. 6.

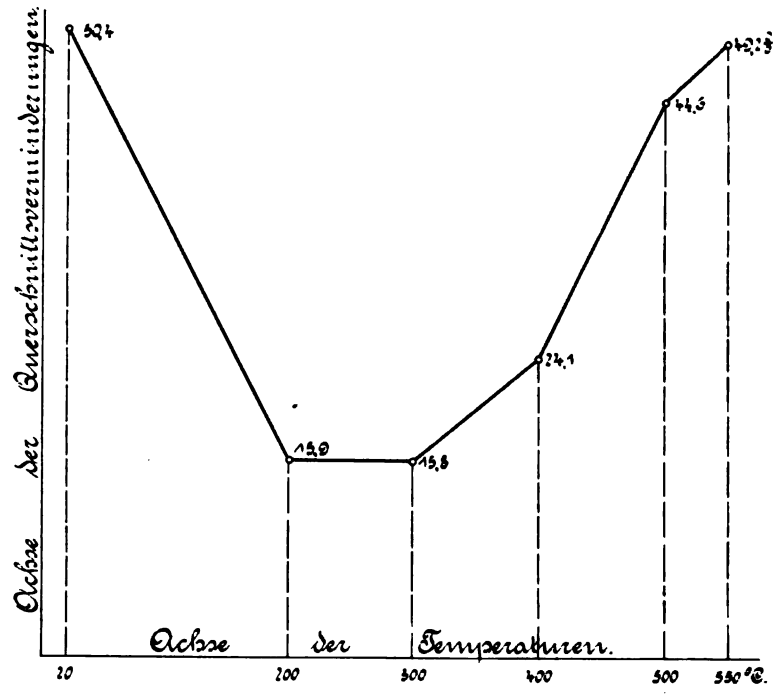


Fig. 7.

Weiteres s. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1903, S. 1762 u. f., 1904, S. 385 u. f.

c) Versuchsreihen mit Rundstäben aus derselben Bronze.

Die Bronze, deren Analyse die Zusammensetzung: 91,35 Kupfer, 5,45 Zinn, 2,87 Zink, 0,28 Blei, 0,025 Eisen ergab, lieferte unter der üblichen Belastungsdauer im Durchschnitt

	bei	20°	100°	200°	300°	400°	500° C.	
Zugfestigkeit		2395	2424	2245	1368	625	441	kg/qcm
		1	1,01	0,94	0,57	0,26	0,18	
Bruchdehnung		36,3	35,4	34,7	11,5	0	0	%
		1	0,98	0,96	0,32	0	0	
Querschnitts-verminderung		52,1	47,4	48,2	16,2	0	0	%
		1	0,91	0,93	0,31	0	0	

Die Verhältniszahlen bringen die Veränderlichkeit deutlich zum Ausdruck.

In Fig. 8 und 9 sind die Linienzüge der Zugfestigkeiten und Bruchdehnungen dargestellt.

Nach Überschreiten der Temperatur von 200° C. beginnt die Zugfestigkeit ausgeprägt abzunehmen, die Bruchdehnung (das übliche Maß der Zähigkeit) außerordentlich stark abzufallen

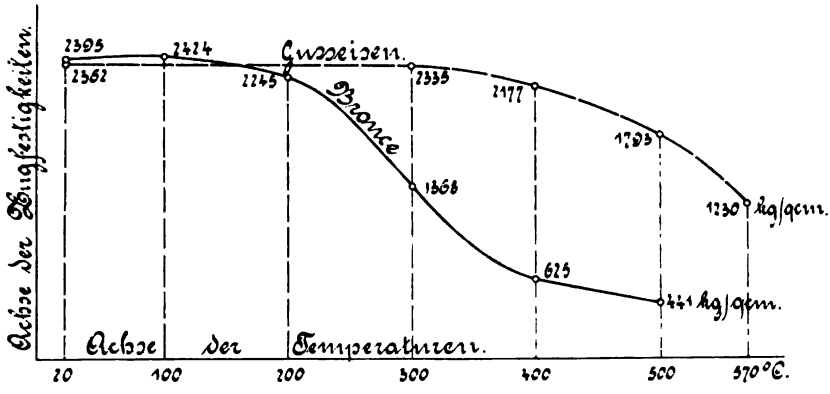


Fig. 8.

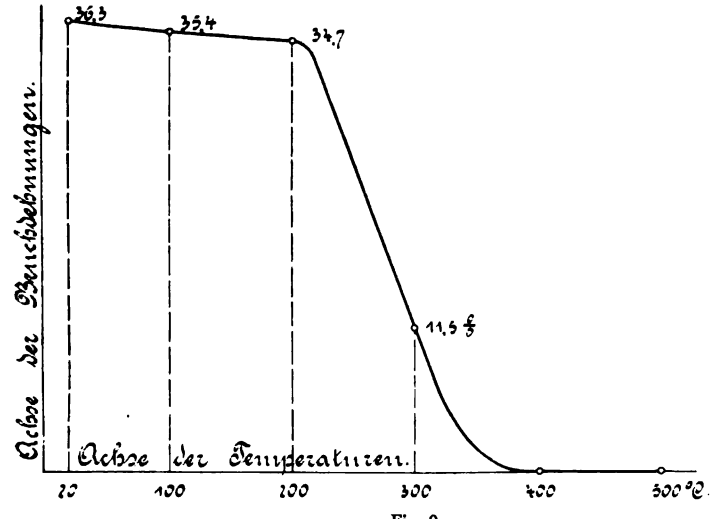


Fig. 9.

Lehrreich ist das Aussehen der Oberfläche der Stäbe:

Fig. 10, Taf. V zeigt den gedrehten Stab vor dem Versuch,

- 11, - - - - - - - nach - - bei 20° C.
- 12, - - - - - - - - - - - 100° C.

Fig. 13, Taf. V zeigt den gedrehten Stab nach dem Versuch bei 200° C.
- 14, - - - - - - - - - - - 300° C.
- 15, - - - - - - - - - - - 400° C.

Fig. 14 läßt deutlich die Querrissigkeit erkennen, Fig. 15 zeigt keine Formänderung mehr, wohl aber die Sprödigkeit des Materials.

Das bei gewöhnlicher Temperatur außerordentlich zähe Material hat mit steigender Temperatur seine ganze Zähigkeit verloren.

Weiteres hierüber s. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1900, S. 1745 u. f., 1901, S. 1477 u. f.

d) Versuchsreihen mit hochwertigem Gußeisen.

Die Ergebnisse lieferten die in Fig. 8 gestrichelt eingetragene Kurve.

Weiteres s. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 168 u. f.

Mit Kupfer und Duranametall hat Stribeck eingehende Versuche ausgeführt und dabei auch den großen Einfluß der Belastungsdauer bei höherer Temperatur festgestellt. Näheres hierüber s. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1903, S. 559 u. f., bezw. 1904, S. 897 u. f.

II. Druck.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben eine Kraft, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt und welche diese zu verkürzen strebt. Die Querschnittsabmessungen werden als so bedeutend vorausgesetzt, daß der Fall der Knickung (§ 23) nicht vorliegt.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit.

Wie wir in § 1 und § 2 sahen, erfährt der Stab unter Einwirkung der Druckkraft gleichzeitig eine Zusammendrückung in Richtung der Achse und eine Vergrößerung der Querschnitte,

20 ° ursprünglich Fig. 10,

bei 20 ° zerrissen Fig. 11,

bei 100 ° zerrissen Fig. 12,

bei 200 ° zerrissen Fig. 13,

bei 300 ° zerrissen Fig. 14,

bei 400 ° C. zerrissen Fig. 15,

§ 10.

eine Querausdehnung. Die Umkehrung der Spannungsrichtung hat auch eine Umkehrung der Formänderungen zur Folge.

Dementsprechend werden für den auf Druck in Anspruch genommenen Körper die zur Beurteilung nötigen Beziehungen sich durch Umkehrung der im Bisherigen für Zugbeanspruchung aufgestellten Gleichungen gewinnen lassen, in welcher Beziehung auf § 12 zu verweisen ist.

Wir erhalten so — indem wir zum Teil früher Bemerktes wiederholen — die Größen:

negative Dehnung, d. i. die auf die Einheit der ursprünglichen Länge l bezogene Verkürzung,

Dehnungskoeffizient gegenüber Druck, d. i. die Verkürzung eines Stabes von der ursprünglichen Länge 1 bei der Belastung von 1 Kilogramm auf die Flächeneinheit, oder kurz: die Verkürzung der Längeneinheit für das Kilogramm Pressung,
und für den Fall, daß diese Zahl bis zu einer gewissen Pressung konstant ist, in der letzteren die

Proportionalitätsgrenze gegenüber Druck,

Elastizitätsgrenze gegenüber Druck, d. i. diejenige Druckspannung, bis zu welcher hin das Material sich als vollkommen oder doch als nahezu vollkommen elastisch erweist,

Fließ- oder Quetschgrenze, d. i. diejenige Druckspannung, bei welcher das Material verhältnismäßig rasch nachgibt, ohne daß Zerstörung eintritt.

Hinsichtlich dieser Größen gelten sinngemäß dieselben Bemerkungen, welche in § 2 über sie für den Fall gemacht worden sind, daß es sich um Belastung durch eine Zugkraft handelt.

Wird die Belastung des in eine Prüfungsmaschine gespannten Prisma fortgesetzt gesteigert, so tritt schließlich der Augenblick ein, in welchem der Widerstand des gedrückten Körpers aufhört, der Belastung das Gleichgewicht zu halten; der Widerstand erscheint überwunden: das Prisma wird zerdrückt, d. h. mehr oder minder vollständig zertrümmert, wie z. B. harte Gesteine, oder es wird zerquetscht, d. h. sein Material weicht nach der Seite aus, fließt seitlich ab, wie z. B. Blei. Streng genommen wird in beiden Fällen der Widerstand dadurch überwunden, daß das Material nach der

Seite ausweicht: im ersteren Falle erfolgt diese Ausweichung nach vorhergegangener oder gleichzeitiger Zertrümmerung, im letzteren dagegen behält der weiche, bildsame Stoff seinen Zusammenhang bei.

Beobachten wir einen dem Zerdrücken ausgesetzten Sandsteinwürfel, so sieht man bei normalem Verlaufe an den Mantelflächen Platten sich ablösen, welche in der Mitte stärker sind als nach den in die Druckflächen verlaufenden Rändern hin. Im Innern dagegen bilden sich zwei pyramidale Bruchstücke aus, wie dies Fig. 1 (Taf. VI) deutlich erkennen läßt; die Platten, welche sich seitlich lösten, sind hierbei weggenommen. Man erkennt, wie das Material von den beiden Stirnflächen aus je in pyramidaler Form in das Innere gedrückt worden ist. (Vergl. auch § 13, Ziff. 2, a, D.) Werden die Druckplatten der Prüfungsmaschine einander noch weiter genähert, so pflegt sich der Zusammenhang der beiden Pyramiden durch Abschiebung zu lösen.

Ein dem Zerdrücken ausgesetzter Bleizylinder baucht sich zunächst aus, wie Fig. 2 (Taf. VI) zeigt, und geht schließlich bei fortgesetzter Näherung der Druckplatten in eine immer dünner werdende Scheibe über. Ursprünglich besaß der wiedergegebene Zylinder einen Durchmesser und eine Höhe von je 80 mm; sein Mantel war durch 7 Parallelkreise in Abständen von je 10 mm und durch 25 senkrechte Gerade in Abständen von je $\frac{\pi 80}{25} = 10{,}05$ mm in 200 Quadrate eingeteilt. Fig. 2 stellt den Zylinder dar, nachdem er auf 64 mm, d. i. 0,8 seiner ursprünglichen Höhe, zusammengedrückt ist. Wie ersichtlich, haben sich die Höhen der beiden End- oder Stirnschichten am stärksten vermindert: von 10 mm auf 6,5 mm, d. h. um 35% gegen 20% durchschnittliche Verringerung, entsprechend einer Bewegung des Materials in das Innere des Körpers, von wo aus der Stoff nach dem Umfange zu ausweicht. Diese Einwärtsbewegung des Materials in der Richtung des Druckes ist offenbar in der Mitte der Druckfläche am stärksten und nimmt nach außen ab, infolgedessen erscheint auch die Druckverteilung über den Querschnitt — jedenfalls während des Fließens — nicht mehr als gleichmäßig, sondern derart ungleichförmig, daß die Pressung von innen nach außen abnimmt[1]).

[1]) Es hängt dies zusammen mit dem Einflusse der Reibung zwischen Druckplatte der Versuchsmaschine und Stirnfläche des geprüften Körpers (vergl. § 14).

Fig. 1, § 11.

Fig. 2, § 11.

Fig. 3 und 4 (Taf. VII) geben einen Bleiwürfel wieder, welcher ursprünglich 80 mm Seitenlänge besaß, und dessen 6 Begrenzungsebenen je in 64 gleiche Quadrate eingeteilt worden waren. Fig. 3 zeigt den Aufriß des auf 64 mm zusammengedrückten Körpers und läßt deutlich die Figuren erkennen, in welche die kleinen Quadrate übergegangen sind, sowie den Umstand, daß auch hier die beiden Stirnschichten am meisten zusammengepreßt wurden, oder richtiger, daß deren Material zum Teil in das Innere gedrückt worden ist. Der Grundriß (Fig. 4), die Hälfte des Würfels darstellend, gibt die eigentümliche Wölbung wieder, welche die ursprünglich ebenen vier Seitenflächen bei der Zusammendrückung angenommen haben.

Die 3 in Fig. 5 (Taf. VII) dargestellten Bruchstücke gehören Gußeisenzylindern von verschiedener Höhe an. Auch hier ist zunächst eine Ausbauchung zu beobachten, welche schließlich in Zerstörung übergeht. Die höheren Zylinder (40 mm bei 19,9 mm Durchmesser) schieben sich ab, die niederen (19,8 mm Höhe bei 19,8 mm Durchmesser) erfahren die aus der Figur ersichtliche eigenartige Zertrümmerung. (Vergl. § 13, Ziff. 1 a.)

Zähes Flußeisen in genügend kurzen Stücken verhält sich ähnlich wie Blei. Die Versuchszylinder nehmen faßartige Gestalt an, ohne daß eine Zerstörung eintritt.

Fig. 6 und 7 (Taf. VIII) stellen zwei verschiedene Seitenflächen eines Bronzewürfels dar, welcher, bevor er der Druckprobe unterworfen wurde, durch Hobeln mit ebenen Flächen versehen worden war. Die Gestaltung, welche die Seitenflächen unter Einwirkung des Druckes gegen die Stirnflächen angenommen haben, ist eine eigenartige, die inneren Strukturverhältnisse nach außen übertragende und deshalb außerordentlich lehrreich. Der Umstand, daß die vom Hobelstahl herrührenden, ursprünglich genau wagrechten, also parallel zu den Stirnflächen laufenden Striche noch deutlich zu sehen sind, läßt die Formänderungen noch deutlicher hervortreten, als es sonst der Fall sein würde.

Die Belastung, bei welcher der Widerstand des gedrückten Körpers überwunden wird, dieser also der Zertrümmerung verfällt

---

Die oben erwähnte Druckverteilung zeigt sich auch bei dem Schmiermaterial, welches sich zwischen Zapfen und Lagerschale befindet (vergl. Fußbemerkung S. 160).

oder in dem geschilderten Sinne nach der Seite abfließt, heißt **Bruchbelastung**. Die Pressung, welche dieser Belastung, die mit P_{max} bezeichnet werden mag, entspricht, wird **Druckfestigkeit** genannt. Dieselbe ist hiernach

$$K = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Stabquerschnitt}}.$$

In der Regel pflegt man als Nenner den ursprünglichen Querschnitt f des Stabes in die Rechnung einzuführen und erhält dann in

$$K = \frac{P_{max}}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

die **Druckfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt** (vergl. das in § 3 über die Zugfestigkeit Bemerkte).

Körper aus Materialien, welche unter Einwirkung der Druckbelastung nach der Seite ausweichen, ohne daß hierbei eine Zerstörung eintritt, vergrößern ihren Querschnitt; infolgedessen wächst die zu weiterer Zusammendrückung erforderliche Kraft. In solchen Fällen ist es selbstverständlich unzulässig, die am Ende einer weitgetriebenen Zusammendrückung beobachtete Kraft P_{max} durch den ursprünglichen Querschnitt zu dividieren und in diesem Quotienten ein Maß der Widerstandsfähigkeit des Materials erblicken zu wollen.

Diese erscheint gegenüber den Zwecken der Konstruktion erschöpft, sobald das Abfließen nach der Seite beginnt; die Druckfestigkeit ist dann die Fließ- oder Quetschgrenze.

§ 12. Gleichungen der Druckelastizität und Druckfestigkeit.

1. Es bedeuten für den **prismatischen Stab**

P die auf Druck wirkende Kraft,
f die Größe des ursprünglichen Stabquerschnitts,
l die Länge des Stabes vor Einwirkung der Kraft,
λ die Verkürzung, welche der Stab durch P erfährt,
$-\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ die negative Dehnung, d. i. die verhältnismäßige Zusammendrückung oder Verkürzung,

Fig. 5, § 11.

Fig. 4, § 11 (Grundriß).

Fig. 3, § 11 (Aufriß).

Fig. 6, § 11.

Fig. 7, § 11.

α den Dehnungskoeffizienten gegenüber Druckbeanspruchung, d. i. die Verkürzung der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung,

$-\sigma$ die Spannung, welche mit der Dehnung $-\varepsilon$ verknüpft ist, also durch P hervorgerufen wird,

k die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Druckbeanspruchung.

Dann gilt

$$P = -\sigma f \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

$$P \leqq kf \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

$$\lambda = -\alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{f} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

2. Für einen gedrückten **Stab mit veränderlichem Querschnitt,** entsprechend der Fig. 1 in § 6, jedoch mit auf Verkürzung hinwirkender Kraft P, gelangt man bei Benutzung der daselbst eingeführten Größen f_0 und x zu den Beziehungen

$$P \leqq kf_0 \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

$$\lambda = P \int_0^l \alpha \frac{dx}{f} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Die Voraussetzungen, welche diesen Gleichungen zugrunde liegen, sind:

1. Die äußeren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur eine in die Stabachse fallende Druckkraft.
2. Auf die Stirnflächen des Stabes wirken nur senkrecht gegen dieselben gerichtete Kräfte.
3. Auf die Mantelfläche des Stabes wirken Kräfte nicht.
4. Der Einfluß des Eigengewichtes des Körpers kommt nicht in Betracht.
5. Die Abmessungen des Querschnittes sind so bedeutend, daß der Fall der Knickung (§ 23) nicht vorliegt.
6. Die Dehnungen und Spannungen sind in allen Punkten des beliebigen Querschnittes gleich groß. (Gleichmäßige Verteilung der Druckkraft über den Querschnitt.)

7. Die Form des Querschnittes ist gleichgültig.
8. Sofern nur die Voraussetzung 5 erfüllt wird, ist die Länge oder Höhe des Stabes ohne Einfluß.

§ 13. Druckversuche.

Einfluß der Gestalt des Körpers auf die Druckfestigkeit.

Der Probekörper muß so in die Prüfungsmaschine eingespannt werden, daß die Druckkraft sich möglichst gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Zur Erfüllung dieser Bedingung wird die eine der beiden Druckplatten der Einspannvorrichtung möglichst leicht beweglich angeordnet (Kugellagerung, vergl. § 8, Fig. 13); außerdem werden die Probekörper je mit zwei möglichst genau parallelen, ebenen Druckflächen (durch Hobeln — erforderlichenfalls mit Diamantstahl — oder durch Abdrehen auf der Planscheibe) versehen. Das zuweilen noch gebrauchte Verfahren, die Befriedigung der letzteren Forderung dadurch zu umgehen, daß zwischen Druckplatte und Probekörper nachgiebige Scheiben, wie z. B. Bleiplatten, gelegt werden, erscheint unzulässig. Dieses bildsame, unter der hohen Pressung wie dicke Flüssigkeit sich verhaltende Material wird bei Probekörpern aus einigermaßen festen und dichten Stoffen wie Eisen, Basalt u. dergl. herausgequetscht, also nicht nur nichts nützen, sondern vielmehr zu einer ungleichmäßigen Verteilung des Druckes über die Stirnfläche Veranlassung geben[1]), bei Probekörpern aus porösen oder Vertiefungen besitzenden Steinen u. dergl. überdies in die Poren sowie Vertiefungen eindringen und auf Sprengung hinwirken, also zu dem reinen Vorgange des Zerdrückens andere Wirkungen hinzufügen.

Die in § 11 besprochenen Erscheinungen beim Zerdrücken der Körper treten in der geschilderten Reinheit nur dann auf,

---

[1]) Vergleiche in dieser Hinsicht die Ergebnisse der Versuche von Tower, betreffend die Verteilung des Zapfendrucks bei geschmierten Traglagern über die Länge des Zapfens. Die Pressung nimmt von der Mitte des Zapfens nach den Stirnflächen hin ab, zuerst langsam und später ziemlich rasch. (S. des Verfassers Maschinenelemente im vierten Abschnitt unter „2. Tragzapfen“, 2. (1892) bis 8. (1901) Auflage, in letzterer S. 404 u. f.)

Vergleiche ferner im Zentralblatt der Bauverwaltung 1899, S. 590 und 591; sowie 1900, S. 402 und 403 die Darlegungen in der Frage der Verwendung weicher Körper oder von Schmiermaterial zwischen Druckplatte und Versuchskörper.

wenn die Probewürfel mit ihren parallelen, ebenen Stirnflächen gleichmäßig und unmittelbar an den Druckplatten anliegen.

Die in den §§ 11 und 12 enthaltenen Gleichungen lassen die Gestalt des Körpers gleichgültig erscheinen, sofern nur nicht der Fall der Knickung (§ 23) vorliegt. Tatsächlich entspricht dies jedoch nicht der Wirklichkeit: die Querschnittsform ist nicht ganz gleichgültig, ganz besonders aber beeinflußt die Höhe des Körpers dessen Druckfestigkeit, wobei die in § 14 erörterte Hinderung der Querdehnung an den Stirnflächen einflußnehmend auftritt. In dieser Beziehung geben die nachstehenden Versuchsergebnisse deutlich Auskunft.

1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers.

a) Versuche des Verfassers mit Gußeisen (vorzüglicher Beschaffenheit).

Zylinder aus einem und demselben Gußeisen-Rundstab, der bei 2,00 cm Durchmesser (bearbeitet) eine Zugfestigkeit von 1860 kg/qcm ergeben hatte.

Die Zahlen sind das Mittel aus je 3 Versuchen.

Versuchsreihe	Höhe cm	Durchmesser cm	Querschnitt qcm	Druckfestigkeit nach Gl. 1, § 11 kg/qcm
1	4,00	1,99	3,11	7232
2	1,98	1,98	3,08	7500
3	1,00	1,99	3,11	8579

Die Druckfestigkeit wächst hiernach mit abnehmender Höhe der Versuchskörper.

Sie beträgt für den Fall, daß die Höhe des Zylinders gleich dem Durchmesser desselben ist, das

$$\frac{7500}{1860} = \sim 4\,\text{fache}$$

der Zugfestigkeit[1]).

[1]) Bei dem hochwertigen Gußeisen, welches S. 251 mit B_2 bezeichnet ist, fand sich für Kreiszylinder von 2 cm Durchmesser und 2 cm Höhe

Bei den Versuchsreihen 1 und 2 erhaltene Bruchstücke sind in Fig. 5 (Tafel VII) dargestellt.

Prismen von kreisförmigem und von quadratischem Querschnitt aus einem und demselben Gußeisen-Rundstab, dessen Zugfestigkeit zu 2082 kg/qcm ermittelt worden war.

Querschnittsform	Durchmesser cm	Quadratseite cm	Höhe cm	Querschnitt qcm	Druckfestigkeit nach Gl. 1, § 11 kg/qcm
○	1,70	—	1,70	2,27	7771
□	—	1,70	1,70	2,89	7509

Die Druckfestigkeit ergibt sich demnach für den kreisförmigen Querschnitt etwas größer als für den quadratischen.

b) Versuche von Bauschinger mit Sandstein.

(Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. polytechnischen Schule in München. 6. Heft. München 1876.)

Bauschinger stellte auf Grund der Ergebnisse seiner eigenen Versuche (s. unten) und derjenigen anderer für die Druckfestigkeit die Gleichung

$$K = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{f}}{h}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad \ldots\ldots 1)$$

auf, gültig für Prismen, bei denen

$$h \leqq 5\,a, \text{ sofern } a^2 = f, \text{ d. i. } a = \sqrt{f}.$$

1. Druckfestigkeit = (8710 + 8714 + 8762) : 3 = 8728 kg/qcm
   = 8728 : 2535 = 3,44 · Zugfestigkeit.
2. Druckfestigkeit = (8133 + 8101 + 8048) : 3 = 8094 kg/qcm
   = 8094 : 2334 = 3,46 · Zugfestigkeit.
3. Druckfestigkeit = (8032 + 8127 + 8035) : 3 = 8081 kg/qcm
   = 8081 : 2261 = 3,57 · Zugfestigkeit.

Hierin bedeutet

f den Querschnitt des Prisma in qcm,
u den Umfang dieses Querschnittes in cm,
h die Höhe des Prisma in cm,
K die Bruchbelastung in kg/qcm,
α und β Konstante, welche von der Art des Materials abhängen.

Bauschinger hält übrigens die einfachere Gleichung

$$K = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{f}}{h}\right) \frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

für ausreichend; nur wenn die Ergebnisse der Versuche von Rondelet und Vicat einbezogen werden sollen, erscheint es nötig, auf Gleichung 1 zurückzugreifen.

A. Prismen von rechteckigem Querschnitt, hergestellt aus einer und derselben Platte von sehr feinem graublauen Schweizer Sandstein.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

No.	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt ab qcm	Druckfestigkeit K in kg/qcm	
					beobachtet Gl. 1, § 11	berechnet nach Gl. 3, § 13
1	2	3	4	5	6	7
1	9,95	9,85	9,6	98,01	680	666
2	10,0	9,85	9,7	98,50	685	663
3	6,0	5,85	5,7	35,10	670	670
4	5,2	5,2	5,05	27,04	690	666
5	4,8	4,7	1,1	22,56	1950	1805
6	5,0	4,6	1,1	23,00	1910	1818
7	4,4	9,7	1,1	42,68	2140	2273

Die Versuche No. 1 bis 4 sind angestellt mit Prismen, deren Querschnitt als quadratisch angesehen werden darf, und deren Höhe angenähert gleich der Seite des Quadrates ist. Die Werte der

Spalte 6 für diese 4 Versuche lassen erkennen, daß Würfel von verschiedener Größe, jedoch aus gleichem Material hergestellt, die gleiche Druckfestigkeit besitzen.

Die Versuche No. 5 und 6 beziehen sich auf Prismen mit angenähert quadratischem Querschnitt und einer Höhe, welche weit kleiner ist als die Querschnittsabmessungen. Die Zahlen in der Spalte 6 lehren, daß die Druckfestigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen mit abnehmender Höhe wächst.

Das Ergebnis des Versuches No. 7, verglichen mit den Ergebnissen, welche für No. 5 und 6 erlangt wurden, zeigt, daß die Druckfestigkeit unter übrigens gleichen Verhältnissen mit wachsender Grundfläche zunimmt.

Aus 18 derartigen Versuchen (Tab. III, S. 10 der Mitteilungen), wobei die Höhe h die Länge der Seiten nicht überschreitet, berechnen sich die Größen α und β der Gleichung 1 zu $\alpha = 310$ und $\beta = 346$, so daß diese übergeht in

$$K = \left(310 + 346\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Die Übereinstimmung der hieraus ermittelten und in Spalte 7 eingetragenen Werte mit den beobachteten (Spalte 6) ist eine recht gute.

B. Prismen wie unter A.

Druckrichtung parallel zum Lager.

No.	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt $a\,b$ qcm	Druckfestigkeit K in kg/qcm	
					beobachtet Gl. 1, § 11	berechnet nach Gl. 4, § 13
1	2	3	4	5	6	7
1	10,0	9,9	29,5	99	444	371
2	10,0	9,8	9,7	98	602	588
3	6,6	6,5	4,75	42,9	676	684
4	4,8	4,6	1,4	22,08	1540	1337
5	4,7	10,0	1,4	47,00	1850	1767

Aus 17 derartigen Versuchen (Tab. II, S. 9 der Mitteilungen), wobei die Höhe h die Querschnittsabmessungen bedeutend überschreitet, ergibt sich $\alpha = 262$ und $\beta = 320$, also

$$K = \left(262 + 320\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

C. Prismen von kreisförmigem und von rechteckigem Querschnitt, hergestellt aus feinkörnigem gelben Buntsandstein (Heilbronn).

Druckrichtung parallel zum Lager.

No.	Querschnittsform	Durchmesser cm	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4}d^2$, bezw. ab qcm	Druckfestigkeit in kg/qcm: beobachtet Gl. 1, § 11	berechnet: Gl. 5 bezw. 6	berechnet: Gl. 7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	□	—	9,25	9,18	36,3	84,91	381	377	387
2	○	9,2	—	—	36,25	66,47	451	418	407
3	□	—	9,05	9,17	12,45	82,99	440	436	444
4	○	9,22	—	—	12,20	66,76	463	473	473
5	□	—	9,20	9,22	2,73	84,82	790	754	755
6	○	9,15	—	—	2,90	65,75	806	733	729

Aus 18 solchen Versuchen (Tab. V, S. 11 der Mitteilungen) wird unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Werte α und β in Gleichung 1 erhalten

für die rechteckigen Prismen:

$$K = \left(347 + 121\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

für die Kreiszylinder:

$$K = \left(369 + 115\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

für sämtliche Prismen:

$$K = \left(358 + 118\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad \ldots\ldots 7)$$

Im ganzen erweist sich hiernach der Einfluß der Querschnittsform auf die Festigkeit kurzer Prismen — im Gegensatz zu demjenigen der Höhe — als nicht bedeutend.

c) Versuche des Verfassers mit Blei.

Zylinder aus einem und demselben Gußbleikörper durch Drehen hergestellt.

No.	Höhe cm	Durchmesser cm	Querschnitt qcm	Spez. Gewicht	Belastung in kg/qcm, bei welcher das Material noch nicht ausweicht	Belastung in kg/qcm, bei welcher das Material ausweicht, d. h. seitlich abfließt
1	7,05	3,525	9,76	11,37	46	51
2	3,47	3,53	9,79	11,36	59	69
3	1,01	3,48	9,51	11,35	105	126

Hiernach steigt bei nahezu gleichem Durchmesser von rund 3,5 cm die Belastung, welche das Blei erträgt, ohne nach der Seite auszuweichen, von 46 kg/qcm auf 105 kg/qcm, wenn die Höhe des Zylinders von 7,05 cm auf 1,01 cm vermindert wird.

Gußblei in Würfeln von rund 8 cm Seitenlänge ertrug Belastungen von 50 kg/qcm; mit 72 kg/qcm belastet, wich dasselbe fortgesetzt, wenn auch sehr langsam, aus.

Gußblei in Form von Scheiben, deren Durchmesser 16 cm und deren Stärke 1,5 cm, vertrug eine Belastung von 100 kg/qcm; bei 150 kg/qcm wich das Material sehr langsam nach der Seite aus.

Weichwalzblei in Form von Scheiben verhielt sich nicht wesentlich anders als Gußblei.

Aus den angeführten Zahlen erhellt deutlich die Zunahme der Druckfestigkeit bei Abnahme der Höhe der Bleikörper.

(S. auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1885, S. 629 u. f.)

2. Die Belastung trifft unmittelbar nur einen Teil der Querschnittsfläche des Probekörpers.

a) Versuche von Bauschinger.

Mitteilungen u. s. w., 6. Heft, 1876, S. 13 u. f.

D. Würfel mit einer durch Abschrägung der Kanten verkleinerten Stirnfläche.

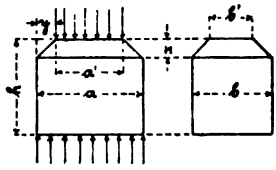


Fig. 1.

Material, wie oben unter A bezeichnet.
Druckrichtung senkrecht zum Lager.

Nummer	Höhe h cm	Würfelquerschnitt a cm	b cm	$a\,b$ qcm	Abschrägung $x:y$ abgerundet	Stirnfläche a' cm	b' cm	$a'\,b'$ qcm	Belastung P kg	Druckfestigkeit K in kg/qcm bezogen auf den Querschnitt $a\,b$ $P:a\,b$	den Querschnitt $a'\,b'$ $P:a'\,b'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	9,8	10,1	9,9	100,0	1 : 1	8,0	7,9	63,2	51 000	510	807
2	9,7	9,8	9,9	97,0	2 : 1	7,9	8,0	63,2	45 000	460	712
3	9,7	9,95	9,9	98,5	3 : 1	8,05	8,05	64,8	45 500	460	702
4	9,85	10,0	9,75	97,5	1 : 2	6,2	6,0	37,2	34 500	350	927
5	9,90	10,1	10,05	101,5	2 : 2	6,3	6,25	39,4	35 000	345	888
6	9,80	10,1	9,8	99,0	3 : 2	6,2	6,0	37,2	32 000	325	860
7	9,80	9,9	10,0	99,0	4 : 2	5,9	6,1	36,0	31 500	320	875
8	9,75	10,0	9,8	98,0	1 : 3	4,4	4,2	18,5	23 000	235	1243
9	9,75	9,95	9,9	98,5	2 : 3	4,2	4,2	17,6	20 500	210	1165
10	9,75	10,05	10,0	100,5	3 : 3	4,4	4,2	18,5	23 000	230	1243
11	9,85	10,10	9,75	98,5	5 : 3	4,25	4,1	17,4	19 700	200	1132

Der Bruch erfolgte immer in der Weise, daß von der kleinen Druckfläche aus eine Pyramide in das Innere des Probestückes hineingetrieben und das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.

Bei den Versuchen 1 bis 3 war die Stirnfläche von durchschnittlich 98,5 qcm (Spalte 5) vermindert auf im Mittel 63,7 qcm (Spalte 9); die Festigkeit, welche bei Würfelgestalt z. B. nach dem unter 1, b, A, 2 angegebenen Versuch 685 kg (Spalte 6 daselbst) beträgt, sinkt beispielsweise bei Versuch 3 auf 460 kg, sofern sie auf den Querschnitt $a\,b$ bezogen wird, und steigt auf 702 bei Beziehung auf den Querschnitt $a'\,b'$. Hiernach würde sich die Druckfestigkeit eines solchen Körpers (Fig. 1) zu groß ergeben, wenn man, von der an Würfeln ermittelten Festigkeit ausgehend, die Fläche $a\,b$ der Rechnung zugrunde legt, und zu klein, wenn die Fläche $a'\,b'$ in die Rechnung eingeführt wird. Dieses vorauszusehende Ergebnis tritt um so schärfer hervor, je kleiner die

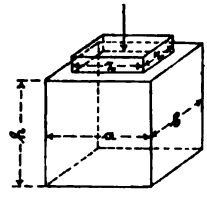


Fig. 2.

Stahlprisma (von 39 mm Höhe) nur auf einer Seite.

Stirnfläche $a'\,b'$. Für Versuch No. 11 erscheint die aus Versuchen mit Würfeln gewonnene Druckfestigkeit von 685 kg einerseits vermindert auf 200 kg, andererseits vergrößert auf 1132 kg, je nachdem die Bruchbelastung durch $a\,b$ oder $a'\,b'$ dividiert wird.

Der Einfluß des Abschrägungsverhältnisses (Spalte 6) läßt sich zwar deutlich erkennen, wie ein Vergleich der Versuche 1 bis 3, 4 bis 7, 8 bis 11 je unter sich lehrt, ist jedoch nicht sehr bedeutend.

E. Würfel aus dem unter A genannten Material.

Der Druck wird durch Stahlprismen, deren Achsen mit denjenigen der Würfel zusammenfallen, und deren Kanten den Würfelkanten parallel laufen, nur auf einen Teil der Stirnfläche übertragen.

No.	Höhe	Würfelquerschnitt			Stahlprisma		Bruchbelastung	Druckfestigkeit	
	h	a	b	$a\,b$	z	z^2	P	$P:a\,b$	$P:z^2$
	cm	cm	cm	qcm	cm	qcm	kg	kg/qcm	kg/qcm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9,65	10,0	9,9	99,0	3,9	15,21	16 000	162	1052
2	9,70	9,85	9,9	97,5	5,7	32,49	30 000	308	923
3	9,70	10,0	9,85	98,5	7,8	60,84	47 000	477	772

Der Bruch erfolgte auch hier wieder in der Weise, daß von der Stirnfläche des Stahlprisma aus eine Pyramide in das Innere des Prisma getrieben und das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.

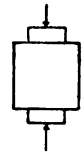


Fig. 3.

Stahlprismen auf beiden Stirnflächen.

No.	Höhe	Würfelquerschnitt			Stahlprisma		Bruchbelastung	Druckfestigkeit	
	h	a	b	$a\,b$	z	z^2	P	$P:a\,b$	$P:z^2$
	cm	cm	cm	qcm	cm	qcm	kg	kg/qcm	kg/qcm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9,7	9,9	10,0	99,0	5,7	32,49	16 000	162	492
2	9,65	9,65	9,9	95,5	7,8	60,84	36 000	377	592

Wie ersichtlich, ist die Bruchbelastung weit kleiner, wenn der Druck auf beide Stirnflächen durch die Stahlprismen wirkt.

Diese Ergebnisse sind in folgender Beziehung noch besonders bemerkenswert. Wird nach Gleichung 3

$$K = \left(310 + 346\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}}$$

für ein quadratisches Prisma berechnet, dessen Querschnitt gleich dem der Stahlprismen und dessen Höhe gleich der Würfelhöhe ist, d. h., da dann $\sqrt{f} = z$ und $u = 4z$,

$$K = 310 + 346 \frac{\sqrt{f}}{h},$$

so ergibt sich

für Versuch 1 $\quad K = 310 + 346 \frac{5{,}7}{9{,}7} = 513,$

- - 2 $\quad K = 310 + 346 \frac{7{,}7}{9{,}75} = 587.$

Diese Werte unterscheiden sich von den beobachteten Größen 492 bezw. 592 nur um wenig. Hiernach hätte also das Material, welches dasjenige Prisma umschließt, das im Innern des geprüften Würfels erhalten wird, wenn man sich die Seitenflächen der aufgesetzten Stahlprismen fortgesetzt denkt, keinen merkbaren Einfluß auf die Druckfestigkeit. Dieses auffallende Ergebnis, welches Bauschinger auch durch Versuche mit Granit angenähert bestätigt

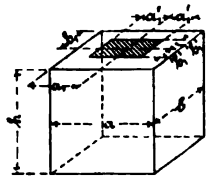


Fig. 4.

fand, dürfte sich durch die verhältnismäßig geringe Zugfestigkeit des Materials erklären lassen. Mit demselben steht in Übereinstimmung, daß unter D die Zunahme des Wertes x in dem Abschrägungsverhältnis $x : y$ (Spalte 6) bei gleichbleibender Größe von y nur einen untergeordneten Einfluß besitzt. Bei den Versuchen No. 8 bis 11 daselbst wächst x von ungefähr 1 bis 5 cm; die Druckfestigkeit ändert sich hierbei nur unbedeutend.

F. Wird die eine Stirnfläche des Würfels (hier die untere) vollständig, dagegen die andere nur über eine kleinere, im allgemeinen einseitig gelegene Fläche, welche in Fig. 4 durch Strichlage hervorgehoben ist, belastet, so gilt nach Bauschinger — zunächst immer nur für Sandstein —

$$K = K_0 \sqrt[3]{\frac{a_1 b_1}{a_1' b_1'}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Hierin bedeutet:

K die Druckfestigkeit bei Belastung des Würfels in der schraffierten Fläche, bezogen auf die Flächeneinheit der letzteren,

K_0 die Druckfestigkeit für den Fall, daß die Belastung über die ganze Stirnfläche gleichmäßig verteilt ist.

b) Versuche des Verfassers.

Material: Buntsandstein.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

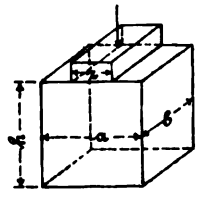


Fig. 5.

Stahlprisma nur auf einer Seite.

(Versuchsreihe, je 3 bis 5 Körper)	1	2	3	4	5	6	
Seite a durchschnittlich	6,46	10,04	10,01	10,02	9,99	9,96	cm
- b -	6,03	9,99	10,01	10,03	9,95	10,02	-
Höhe h -	6,00	9,89	9,85	9,82	9,84	9,84	-
Breite z des Prisma	6,03	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	-
Bruchbelastung auf 1 qcm des Querschnittes $a\,b$	653	232	188	156	120	102	kg
Bruchbelastung auf 1 qcm des Querschnittes $b\,z$	653	926	943	1044	1193	2050	-

Fig. 6, Taf. II, zeigt Steine der Versuchsreihen 2 bis 6. Wie ersichtlich, erfolgte der Bruch in der Weise, daß von der Stirnfläche der Stahlplatte aus ein keilförmiger Körper in das Innere des Versuchswürfels getrieben und so das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.

3. *Die Belastung trifft einen Körper mit gewölbter Oberfläche (Kugel, Zylinder).*

Die hier vorliegende allgemeine Aufgabe: Ermittlung der Beanspruchung und der Formänderung zweier beliebig gestalteter Körper, welche gegeneinander gedrückt werden und sich dabei nur in einem sehr kleinen Teile ihrer gewölbten Oberflächen berühren, ist trotz ihrer großen Schwierigkeit einer strengen Lösung zugänglich, wie zuerst Hertz (1881) gezeigt hat[1]). Ausgehend von den Voraussetzungen:

1. die Stoffe beider Körper sind in allen Punkten nach allen Richtungen hin gleich beschaffen (isotrop),
2. zwischen Dehnungen und Spannungen besteht Proportionalität, der Dehnungskoeffizient α besitzt gegenüber Druck denselben Wert wie gegenüber Zug,
3. die Größe der Druckflächen, in denen sich die Körper unter Einwirkung der Belastung infolge ihrer Elastizität berühren, ist sehr klein gegenüber den Oberflächen der Körper,
4. in den Druckflächen wirken nur Kräfte, welche senkrecht zu diesen gerichtet sind (Hertz denkt sich vollkommen glatte, also reibungsfreie Oberflächen),

und den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre (vergl. Abschnitt VIII) gelangt Hertz zu den im nachstehenden zusammengestellten Ergebnissen.

a) Zwei Kugeln

werden mit der Kraft P gegeneinander gedrückt. Es seien

r_1 r_2 die Halbmesser der beiden Kugeln,
α_1 α_2 die Dehnungskoeffizienten der Stoffe, aus denen die Kugeln bestehen,
m_1 m_2 die Zahlen, durch welche das Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung bei diesen Stoffen gemessen wird (§ 7, § 14).

---

[1]) H. Hertz, Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 155 u. f. oder auch Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen 1882, S. 449 u. f.
Eine Ergänzung der Hertzschen Arbeit liefert M. T. Huber in den Annalen der Physik, Bd. 14, 1904. S. 153 u. f.

Dann beträgt:

die Strecke y, um welche sich die beiden Kugeloberflächen unter der Belastung P einander nähern (Summe der Zusammendrückungen an beiden Oberflächen — S. 183 bei Hertz — strenggenommen nicht die Änderung von $r_1 + r_2$),

$$y = \sqrt[3]{\left[\frac{3}{4} P \left\{\left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right)\alpha_1 + \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right)\alpha_2\right\}\right]^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}, \quad 9)$$

der Halbmesser a der Druckfläche

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} P \frac{\alpha_1\left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right) + \alpha_2\left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}, \quad . \quad 10)$$

die größte Pressung σ_{max} in der Mitte der Druckfläche

$$\sigma_{max} = 1{,}5 \frac{P}{\pi a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

d. i. 1,5 mal so groß als bei gleichmäßiger Verteilung des Druckes P über die Berührungsfläche.

Mit

$$m_1 = m_2 = m \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

geht Gleichung 11 nach Einführung von a aus Gleichung 10 über in

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2}{\alpha^2\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11a)$$

und für $m = \frac{10}{3}$[1])

$$\sigma_{max} = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{P}{\alpha^2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11b)$$

[1]) Es empfiehlt sich, festzuhalten, daß selbst erhebliche Abweichungen hinsichtlich der Größe von m (vergl. § 7) einen bedeutenden Einfluß auf das Ergebnis nicht äußern; dies gilt auch für die folgenden Gleichungen.

Mit

$$m_1 = m_2 = \frac{10}{3} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

folgt aus den Gleichungen 9 und 10

$$y = 1{,}23 \sqrt[3]{P^2 \alpha^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \quad \ldots \quad 9a)$$

$$a = 1{,}11 \sqrt[3]{\frac{P \alpha}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \quad \ldots \quad 10a)$$

b) Kugel und ebene Platte.

Mit $r_1 = r$ und $r_2 = \infty$ folgt aus Gleichung 11a

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 r^2}},$$

somit

$$P = \frac{2}{3} \pi^3 \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 \sigma_{max}^3 r^2$$

und nach Einführung des Kugeldurchmessers $d = 2r$

$$P = k d^2, \quad \ldots \quad 12)$$

wenn

$$k = \frac{\pi^3}{6} \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 \sigma_{max}^3 \quad \ldots \quad 13)$$

c) Zwei Zylinder,

parallel liegend und von der Länge l, werden so stark gegeneinander gepreßt, daß auf die Längeneinheit die Kraft $P : l$ entfällt, gleichmäßige Verteilung der Belastung P über die Länge l vorausgesetzt. Es seien

r_1 r_2 die Halbmesser der beiden Zylinder,
α_1 α_2 die Dehnungskoeffizienten,
m_1 m_2 die bereits unter a bezeichneten Zahlenwerte.

Die Breite b der durch die Belastung erzeugten Berührungsfläche beträgt

$$b = 4\sqrt{\frac{P}{\pi l}\frac{\alpha_1\left(1-\frac{1}{m_1^2}\right)+\alpha_2\left(1-\frac{1}{m_2^2}\right)}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}}, \quad . \quad 14)$$

die größte Pressung in der Mitte der Berührungsfläche

$$\sigma_{max} = \frac{4}{\pi}\frac{P}{b\,l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

d. i. $\frac{4}{\pi}$ mal so groß als bei gleichmäßiger Druckverteilung.

Für gleiches Material, d. h. für

$$m_1 = m_2 = m \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

wird

$$b = 4\sqrt{\frac{2P}{\pi l}\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14a)$$

Die Bestimmung der Strecke, um welche sich die beiden Zylinderoberflächen einander nähern, unterläßt Hertz, indem er bemerkt, daß sie nicht allein abhängig von den Vorgängen an der Druckstelle ist, sondern wesentlich bedingt wird durch die Form des ganzen Körpers (a. a. O. S. 187).

d) Zylinder und ebene Platte.

Mit $r_1 = r$ und $r_2 = \infty$ ergibt sich aus Gleichung 14a

$$b = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}\alpha\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\frac{P}{l}r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14b)$$

und damit aus Gleichung 15

$$\sigma_{max} = \sqrt[3]{\frac{P}{2\pi\alpha\left(1-\frac{1}{m^2}\right)lr}}$$

Nach Einführung des Zylinderdurchmessers $d = 2r$

$$P = k l d, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

sofern

$$k = \pi \alpha \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \sigma_{max}^3 \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

Die Gleichungen 10 und 11, 14 und 15 werden zurzeit vielfach, namentlich im Bauingenieurwesen, als solche angesehen, welche die unmittelbare Ermittlung der zulässigen Belastung P ermöglichen, indem man für α sowie m die den betreffenden Materialien eigentümlichen Werte und für σ_{max} die größte, noch für zulässig erachtete Spannung gegenüber Druck einsetzt[1]).

Nun liegen aus neuester Zeit ausgedehnte und gründliche Versuche von Stribeck mit Stahlkugeln vor[2]), durch welche u. a. nachgewiesen wird, daß bei vorzüglicher Ausführung der Kugeln und ihrer Laufflächen (beiderseits gehärteter Stahl) die zulässige Belastung für ebene Laufflächen noch zu $P = 50\, d^2$ gewählt werden darf, sofern an der Druckstelle nur rollende Reibung auftritt. Nach Maßgabe der Gleichungen 12 und 13 entspricht diese Belastung mit

$$\alpha = \frac{1}{2\,120\,000},$$

welchen Wert Stribeck für das Stahlmaterial der Kugel bestimmte, und mit

$$m = \frac{10}{3}$$

zufolge

$$50 = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2\,120\,000^2} (1 - 0{,}3^2)^2 \sigma_{max}^3$$

---

[1]) Vergl. z. B. Zeitschrift des Hannoverschen Ingenieur- und Architektenvereins 1894, S. 131 u. f.

[2]) Stribeck, Mitteilungen aus der Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Untersuchungen, Heft 1, Mai 1900, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 73 u. f. sowie Schwinning, am gleichen Ort, S. 332 u. f., ferner Stribeck, Glasers Annalen für Gewerbe und Bauwesen, 1901, Bd. 49, No. 577.

einer Druckspannung von

$$\sigma_{max} = 37\,450 \text{ kg/qcm}.$$

Diese Zahl geht weit über das hinaus, was man bisher als zulässige Anstrengung angesehen hat, selbst wenn berücksichtigt wird, daß im vorliegenden Falle nicht die größte Pressung, sondern die betreffende Hauptdehnung als maßgebend anzusehen ist (§ 48, § 67 und § 68).

Stribeck bestimmte durch unmittelbare Druckversuche die Proportionalitätsgrenze für den in Wasser gehärteten Stahl zu rund 9000 kg/qcm (die Elastizitätsgrenze lag noch ein wenig tiefer). Dieser Wert wäre unter Berücksichtigung, daß im mittleren Element der Berührungsfläche zwischen Kugel und Platte drei Hauptspannungen

$$\sigma_{max} \qquad 0{,}8\,\sigma_{max} \qquad 0{,}8\,\sigma_{max}$$

vorhanden sind, infolgedessen die Hauptdehnung senkrecht zur Oberfläche nach Gleichung 1, § 67 mit $m = \frac{10}{3}$

$$\alpha\,(1 - 2\,.\,0{,}8\,.\,0{,}3)\,.\,\sigma_{max} = 0{,}52\,\alpha\,\sigma_{max},$$

also nur das 0,52 fache der Zusammendrückung beträgt, welche die Pressung σ_{max} für sich allein erzeugen würde, auf

$$\frac{9000}{0{,}52} = \sim 17\,300 \text{ kg/qcm}$$

zu erhöhen. Diese Größe führt (Gleichungen 12 und 13) zu

$$k = \frac{\pi^3}{6}\,\frac{1}{2\,120\,000^2}\,(1 - 0{,}3^2)^2\,.\,(17\,300)^3 = \sim 5,$$

somit

$$P = 5\,d^2,$$

gegenüber $P = 50\,d^2$, durch unmittelbaren Versuch ermittelt, d. h. wird in der Hertzschen Gleichung 11 in Verbindung mit 10 für die größte Druckspannung diejenige Zahl eingeführt, welche der

Zusammendrückung an der Proportionalitätsgrenze, die hier noch oberhalb der Elastizitätsgrenze liegend festgestellt worden ist, entspricht und die noch eine höhere Anstrengung liefert, als man nach bisheriger Auffassung für zulässig erachtet, so ergibt sich die zulässige Belastung P der Kugeln zu einem Zehntel derjenigen, die durch unmittelbaren Versuch noch als zulässig festgestellt worden ist.

Daraus folgt, daß die Hertzschen Gleichungen nicht in der eingangs bezeichneten Weise zur Bestimmung der zulässigen Belastung P benutzt werden können, d. h. daß der Wert k der Gleichung 12 nicht aus Gleichung 13 berechnet, sondern daß diese Belastung nur durch unmittelbare Versuche bestimmt werden kann. Daß diese Versuche unter solchen Verhältnissen anzustellen sind, die denjenigen entsprechen, unter welchen die Kugeln in den betreffenden Konstruktionen sich befinden, ist selbstverständlich.

Sodann ist in bezug auf die Verwendung der Hertzschen Gleichungen noch folgender Punkt im Auge zu behalten.

Werden gehärtete Stahlkugeln unter steigender Belastung gegeneinander gepreßt, so tritt zunächst ein die Druckfläche umgebender Kreissprung ein, zuweilen unter Belastungen, welchen noch weniger als ein Zehntel der Belastung entspricht, bei welcher die Kugel auseinanderbricht[1]). Meridianrisse treten erst später auf.

Das Entstehen der Umfangsrisse ist die Folge von Zugspannungen, welche sich nach dem Umfange der Druckfläche hin einstellen. In der Tat pflegen auch in Kugellagern stark überlastete Kugeln durch Absplittern kleiner Teilchen unbrauchbar zu werden, nicht aber durch Bruch.

Für die bezeichnete Zugbeanspruchung, durch welche die gehärtete Stahlkugel zuerst der Unbrauchbarkeit zugeführt wird, gibt Hertz eine Gleichung nicht; er hat die Rechnung nur für

[1]) Für gute Kugeln bis etwa $1^1/_4$" engl. (31,8 mm) Durchmesser ist $P = 550\,d^2$ bis $700\,d^2$ als Belastung zu fordern, bei welcher der Umfangssprung eintritt. Grenzzahlen: $^7/_8$" (22,2 mm)-Kugeln brechen erst bei $P = 38\,000$ bis 40 000 kg, entsprechend $P =$ rund $8000\,d^2$, während der erste Sprung bereits bei 2700 kg, also bei $550\,d^2$ eintrat. $1^1/_4$" (31,8 mm)-Kugeln, deren Bruchbelastung nur $P = 3500\,d^2 =$ rund 35 000 kg war, zeigten die hohe Sprungbelastung von $1000\,d^2 = 10\,000$ kg. (S. die in der Fußbemerkung 2, S. 176 angegebenen Quellen.)

das am stärksten gedrückte Flächenelement durchgeführt. Er sagt, nachdem er über das Verhalten plastischer Körper gesprochen hat (S. 167): „Schwieriger ist es, die Erscheinung in spröden Körpern wie hartem Stahl, Glas, Krystallen zu bestimmen, in welchen eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze nur als Entstehung eines Risses oder Sprunges, also nur unter dem Einflusse von Zugkräften auftritt. Von dem oben betrachteten Elemente, als von einem allseitig komprimierten, kann ein solcher Sprung nicht ausgehen, und es ist bei unserer heutigen Kenntnis von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht möglich, genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsendem Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere Diskussion soviel, daß in Körpern, welche in ihrem elastischen Verhalten dem Glase oder hartem Stahle ähnlich sind, bei weitem die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche, und zwar am Rande der Druckfläche auftreten[1])."

---

[1]) Wenn nun Hertz zur Bestimmung der Härte eines Materials den Vorschlag macht, aus ihm zwei Körper herzustellen und ihre Oberflächen dabei so zu wählen, daß die beim Aufeinanderpressen sich bildende Druckfläche kreisförmig ausfällt, sodann (S. 193) bestimmt: „Die Härte eines Körpers wird gemessen durch den Normaldruck auf die Flächeneinheit, welcher im Mittelpunkte einer kreisförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte der Körper die Spannungen eben die Elastizitätsgrenze erreichen", und dann später bemerkt (S. 195): „im Glase und allen ähnlichen Körpern besteht die erste Überschreitung der Elastizitätsgrenze in einem kreisförmigen Sprunge, der in der Oberfläche am Rande der Druckellipse entsteht", ohne festzustellen, in welchem Punkte des Körpers die Elastizitätsgrenze überschritten wird — der mittlere Punkt der Druckfläche ist es eben nicht — und von welchen Größen die Spannung in diesem Punkte beeinflußt wird, sowie welche Beziehungen zwischen diesen Größen bestehen, so tritt hier mindestens eine Lücke zutage; man gelangt damit auf ein Gebiet, das jedenfalls noch der Klarstellung bedarf. Ob diese zur Aufklärung der Tatsache, daß Versuche mit verschieden gekrümmten Körpern aus gleichem Material keine übereinstimmenden Pressungen für die Elastizitätsgrenze und somit keine übereinstimmenden Werte für die Härte des gleichen Materials ergaben, beitragen wird, mag zunächst dahingestellt bleiben.

Hinsichtlich der Versuche, die Härte auf dem von Hertz vorgeschlagenen Wege zu bestimmen, sei insbesondere auf die Arbeiten von Auerbach in Wiedemanns Annalen verwiesen.

In bezug auf die Härteprüfung von Kugeln s. die in der Fußbemerkung 2, S. 176 angegebenen Veröffentlichungen. Stribeck sagt hierüber: „Werden 2 Kugeln aus gleichem Material mit der Kraft P gegeneinander gedrückt, so

Vorbehaltlich der Prüfung durch Versuche wird man gut tun, anzunehmen, daß die Zugspannung, welche am Rande der Druckfläche sich einstellt, namentlich bei Materialien mit geringer Zugfestigkeit, die zulässige Druckbelastung beeinflussen, d. h. diese herabdrücken kann.

Versuche, welche Verfasser mit Quadern aus Granit[1]) und Sandstein[2]) zu Brückengelenken (Quader mit zylindrischer Fläche auf ebenem Quader) durchgeführt hat, lehren, daß die Zerstörung der Granit- bezw. Sandsteinkörper nicht durch die in der Mitte der Berührungsfläche sich einstellende, von Hertz bestimmte größte Druckspannung

$$\sigma_{max} = \frac{4}{\pi}\frac{P}{b\,l},$$

worin b durch Gleichung 14b bestimmt ist, sondern durch auftretende Zugspannungen herbeigeführt wird. Die photographischen Abbildungen Fig. 3 und 4, bezw. Fig. 4 und 9 in den Veröffentlichungen, welche die beiden Fußbemerkungen angeben, lassen das deutlich erkennen.

Wie sich aus dem Vorstehenden ergibt, ist die entwerfende und ausführende Technik genötigt, die Koeffizienten k der Gleichungen 12 und 16, welche von ihr schon seit

---

bildet sich eine kreisförmige Druckfläche aus, deren Halbmesser a mm beträgt. Läßt man die Belastung von Null an stetig wachsen, so nimmt die Druckfläche zunächst nach Maßgabe von $\sqrt[3]{P^2}$ „ (vergl. Gleichung 10) „und die durchschnittliche Pressung $\sigma = \frac{P}{\pi a^2}$ entsprechend $\sqrt[3]{P}$ zu. Aber schon nach Überschreitung der Proportionalitätsgrenze ändert sich die Abhängigkeit von P in dem Sinne, daß die Druckfläche rascher und demgemäß die Pressung langsamer zunimmt, und zwar solange, bis sich schließlich die Druckfläche im gleichen Verhältnis wie die Kraft ändert, und demzufolge die Pressung konstant bleibt. Diese konstante Pressung, die sich auch durch eine Steigerung der Belastung bis zum Eintritt des Bruches nicht mehr vergrößern läßt, wird die Druckhärte oder kurz die Härte der Kugeln (Widerstand gegen Eindringen) genannt. Sie ergibt sich für gute Kugeln aus gehärtetem Gußstahl zwischen 780 und 850 kg/qmm. Von kleinen Kugeln wird man die größere Härte, von 2″ (50,8 mm)-Kugeln noch etwa 780 erwarten dürfen. Bei Kugeln, die nach innen zu weicher werden, nimmt die Pressung, nachdem sie ihren größten Betrag erreicht hat, sogar wieder ab“.

[1]) Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 17.

[2]) Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 20.

langer Zeit auf Grund von gewissen Annahmen entwickelt worden waren, nach wie vor durch unmittelbare Versuche festzustellen.

Mit Rücksicht hierauf und in Anbetracht, daß den älteren Betrachtungen, die zu den Gleichungen 12 und 16 führten, schon wegen ihrer Einfachheit eine gewisse Bedeutung zuerkannt werden muß, sei im nachstehenden der Fall, daß Kugeln gegeneinander gepreßt werden, Fig. 7, in der älteren Weise behandelt.

Infolge der Zusammendrückbarkeit des Materials berühren sich die Kugeln unter der Einwirkung der Belastung in einer kleinen Kreisfläche gemäß der in übertriebenem Maße gegebenen

Fig. 7.

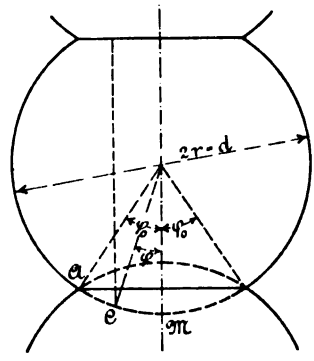


Fig. 8.

Darstellung Fig. 8, wobei wir die mittlere der drei Kugeln, welche gleichen Durchmesser besitzen, ins Auge fassen wollen.

Für den beliebigen Punkt C der ursprünglichen Kreislinie MCA sei die Zusammendrückung in Richtung der Belastung

$$x = r(1 - \cos\varphi_0) - r(1 - \cos\varphi) = r(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

woraus bei Beachtung, daß

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$$

und φ sowie φ_0 sehr kleine Winkel sind, also

$$\cos\varphi = \sim\sqrt{1 - \varphi^2} = \sim 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\cos\varphi_0 \qquad\qquad = \sim 1 - \frac{\varphi_0^2}{2},$$

folgt

$$x = r \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß sich diese Zusammendrückung gleichmäßig durch die Kugel hindurch fortpflanzt, fände sich die verhältnismäßige Zusammendrückung in C

$$\varepsilon = \frac{x}{r} = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2},$$

welcher die Normalspannung

$$\sigma = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2\,\alpha}$$

entsprechen würde, falls die bezeichnete Voraussetzung erfüllt wäre, und Kräfte senkrecht zur Richtung von x nicht einwirkten. Letzteres erkennt man sofort als unzutreffend, da die Faser, welche im Punkt C in Richtung der Belastung gedacht werden kann, durch das sie umschließende Material bei der Zusammendrückung gehindert ist, sich quer zu dehnen. Dieser seitliche Zusammenhang mit dem Material wird auch eine gleichmäßige Fortpflanzung der Zusammendrückung der Faser durch die Kugel hindurch hindern. Infolge dieser Umstände muß der Ausdruck für σ mit einem aus Versuchen zu bestimmenden Berichtigungskoeffizienten ψ multipliziert werden, der ganz allgemein den Abweichungen Rechnung zu tragen hat, welche zwischen der Wirklichkeit und den gemachten Voraussetzungen bestehen. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist ψ mit φ veränderlich, wohl auch sonst noch von den Umständen beeinflußt. Nichtsdestoweniger wurde der Koeffizient ψ, um die Rechnung überhaupt und einfach durchführen zu können, als Konstante angenommen und ihre mittlere Größe bis zur Ermittlung durch Versuche auf etwa 3 geschätzt.

Damit ergibt sich

$$\sigma = \psi \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Den größten Wert erlangt σ für $\varphi = 0$, d. i. in der Mitte,

$$\sigma_{max} = \psi \frac{\varphi_0^2}{2\,\alpha}.$$

Der Gleichgewichtszustand bedingt

$$P = \int_0^{\varphi_0} \sigma \,.\, 2\,\pi\, r\,\varphi \,.\, r\, d\,\varphi = \frac{\psi\,\pi}{\alpha}\, r^2 \int_0^{\varphi_0} (\varphi_0^2 - \varphi^2)\,\varphi\, d\,\varphi = \frac{\psi\,\pi}{4\,\alpha}\,\varphi_0^4\, r^2,$$

woraus mit

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2\,\alpha}{\psi}\,\sigma_{max}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

$$P = \frac{\pi}{\psi}\,\alpha\,\sigma_{max}^2\, r^2 = \frac{\pi}{4\,\psi}\,\alpha\,\sigma_{max}^2\, d^2 \,. \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

$$P = k\,d^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

sofern

$$k = \frac{\pi}{4\,\psi}\,\alpha\,\sigma_{max}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

Gleichung 21 stimmt mit Gleichung 12 vollständig überein.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Entwicklung für den Zylinder durchführen. Sie führt zu

$$P = k\,l\,d, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

wenn l die Länge des Zylinders ist und P die Gesamtbelastung für den Zylinder bedeutet, also ganz zum gleichen Ergebnis, wie oben in Gleichung 16 ausgesprochen. Für den Wert k der Gleichung 23 ergibt sich der Ausdruck

$$k = 0{,}94\sqrt{\frac{\alpha\,\sigma_{max}^3}{\psi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

Dabei ist jedoch die Größe von k ebensowenig aus Gleichung 22 bezw. 24 zu berechnen, wie dies aus Gleichung 13 oder 17 zu geschehen hat, k ist vielmehr durch Versuche unmittelbar zu bestimmen, wie S. 178, 180 und 181 angegeben wurde.

Daß die Gesetzmäßigkeit, wie sie in den Gleichungen 22 bezw. 24 für k zum Ausdruck gelangt, nicht beanspruchen kann, genau zu sein, folgt aus dem Gange der Rechnung.

Eine Beziehung für die größte am Rande der Druckfläche auftretende Zugbeanspruchung liefert die Annäherungsrechnung

ebensowenig wie die Hertzschen Entwicklungen; doch läßt, wie schon oben angedeutet, Fig. 9 deutlich erkennen, daß infolge der starken Abbiegung, welche die Körperelemente am Rande der Druckfläche (bei A) erfahren, bedeutende Zugspannungen auftreten werden, die bei spröden Materialien zu dem beobachteten Kreissprung (S. 178) führen können.

§ 14. Hinderung der Querdehnung.

Wie wir in § 11 sahen, wird der Widerstand, welchen ein auf Druck in Anspruch genommener Körper leistet, schließlich dadurch überwunden, daß das Material nach der Seite hin ausweicht. Daraus folgt, daß der Widerstand an sich unüberwindbar erscheint, wenn das Material gehindert wird, nach der Seite auszuweichen, d. h. wenn genügend große Druckkräfte auf die Mantelflächen wirken.

Dieser Satz gilt nicht bloß für feste, sondern auch für flüssige Körper. Denken wir uns beispielsweise einen genügend festen Hohlzylinder, zum Teil gefüllt mit Wasser, auf dem ein gegen die Zylinderwandung vollkommen abdichtender Kolben ruht. Wie stark wir auch — innerhalb der Widerstandsfähigkeit des Hohlzylinders — den Kolben belasten, das nach allen Seiten hin am Entweichen gehinderte Wasser trägt die Belastung, weist also trotz seiner tropfbar flüssigen Natur unter diesen Umständen eine große Widerstandsfähigkeit gegen Druck auf.

Die Erscheinung ist eine ähnliche wie die in § 7 erörterte. Dort handelt es sich um den Einfluß gehinderter Zusammenziehung, hier um denjenigen der Hinderung der Querdehnung, welche die Druckkraft zur Folge haben würde, wenn Kräfte auf die Mantelfläche senkrecht zur Achse nicht tätig wären. Die in § 7 enthaltenen Gleichungen gelten in sinngemäßer Weise auch hier. Insbesondere folgt daraus, daß die Beziehung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \alpha\,\sigma,$$

welche bei dem nur in Richtung der Achse gedrückten Stab zwischen der Spannung — σ (Pressung) und der Dehnung — ε

(Kürzung) sowie dem Dehnungskoeffizienten α gegenüber Druckbeanspruchung besteht, nicht mehr gültig ist, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse angreifen[1]). Solche Kräfte wirken bei den Versuchskörpern in der Regel auf die Stirnflächen; sie rühren hier her von der Reibung, welche bei der Pressung zwischen Druckplatte der Prüfungsmaschine und Stirnfläche des Probekörpers durch das Bestreben des letzteren, sich quer auszudehnen, wachgerufen wird. Infolge dieser Reibung, welche die volle Reinheit der Erscheinung der Druckelastizität und Druckfestigkeit mehr oder weniger beeinträchtigen muß[2]), beträgt die Querdehnung in der Mitte des Probekörpers mehr als an den Stirnflächen, wie die Fig. 2, Taf. VI, 3 und 4, Taf. VII, deutlich erkennen lassen; ferner muß infolge der an den Stirnflächen vorhandenen Hinderung der Querdehnung die Druckfestigkeit niederer Körper sich größer ergeben als diejenige höherer Körper, bei denen der Einfluß dieser Hinderung um so mehr zurücktritt, je größer die Höhe ist.

Ist ε die durch eine Druckkraft in Richtung der Stabachse veranlaßte Zusammendrückung für die Länge 1, so wird die hiermit verknüpfte Querdehnung ε_q nach allen zur Achse senkrechten

---

[1]) Damit hängt es dann auch zusammen, daß die zulässige Druckanstrengung im Falle gehinderter Querdehnung größer genommen werden darf. Die in Fig. 1 auf Druck beanspruchte Bleischeibe vom Durchmesser $d = 35$ mm und der

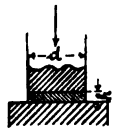


Fig. 1.

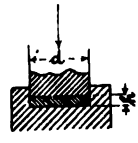


Fig. 2.

Höhe $h = 10$ mm würde nach den Versuchen § 13, Ziff. 1c, eine Belastung von 125 kg/qcm nicht mehr vertragen. Dieselbe Bleischeibe, nach Fig. 2 vertieft eingelegt, so daß das Blei nach der Seite nicht ausweichen kann, verträgt die doppelte Belastung und mehr.

[2]) Da die Körper, welche Druckversuchen unterworfen werden, verhältnismäßig kurz zu sein pflegen, so wird die Bestimmung der Querdehnung durch unmittelbare Messung derselben für die verschiedenen Querschnitte leicht zu verschiedenen Werten führen können. Man wird deshalb bei Dehnungsmessungen die Meßlänge ausreichend kleiner als die Stablänge, somit diese entsprechend groß wählen müssen.

Richtungen als gleich groß angesehen und, bezogen auf die Längeneinheit, gemessen durch

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Für ein und dasselbe Material pflegt man die Größe m in Gleichung 1, § 7, und 1, § 14, als gleich zu betrachten, also das Verhältnis der Dehnung (in Richtung der Stabachse) zur Zusammenziehung (senkrecht zur Achse) bei Zugbeanspruchung gleich zu setzen dem Verhältnis der verhältnismäßigen Zusammendrückung zur Querdehnung bei Druckbeanspruchung.

(Vergl. § 7.)

§ 15. Theorien der Druckfestigkeit.

Über den Vorgang des Zerdrückens sind zwei Hauptanschauungen geltend gemacht worden.

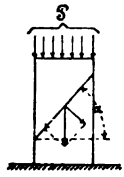


Fig. 1.

Die ältere, von Coulomb herrührende, denkt sich nach Maßgabe der Fig. 1 das Zerdrücken durch Abschieben erfolgend und dabei die Druckkraft P in zwei Seitenkräfte

$P \sin \alpha$, wirkend in der Gleitungsebene,

$P \cos \alpha$, senkrecht dazu,

zerlegt. Wird der Widerstand gegen Gleiten für das Quadratzentimeter mit K_s (Schubfestigkeit) bezeichnet, so findet sich, sofern f den Querschnitt des Prisma bedeutet:

$$P \sin \alpha = K_s \frac{f}{\cos \alpha}$$

$$\frac{P}{f} = K_s \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Das Gleiten wird die kleinste Kraft P erfordern, wenn $\sin 2\alpha$ am größten ausfällt, d. i., wenn $\alpha = 45°$; womit nach Einführung der Druckfestigkeit

$$K = \frac{P}{f}$$

sich ergibt

$$K = 2 K_s,$$

d. h. die Druckfestigkeit müßte gleich dem Doppelten der Schubfestigkeit sein.

Diese Theorie wurde später durch Hereinziehung der von $P \cos \alpha$ veranlaßten Reibung ergänzt.

Die zweite Anschauung faßt die Querdehnung ins Auge (§ 11) und nimmt an, daß das Zerdrücken stattfinde, wenn dieselbe so groß geworden wie die Längsdehnung beim Zerreißen im Falle von Zugbeanspruchung. Mit der Genauigkeit, mit welcher die Längsdehnung drei- bis viermal so groß angenommen werden darf wie die Querdehnung, findet sich auf diesem Wege die Druckfestigkeit gleich dem Drei- bis Vierfachen der Zugfestigkeit, was beispielsweise für das Gußeisen § 13, Ziff. 1a, mit Annäherung zutreffen würde.

Beide Lehren haben durch Druckversuche nicht die erforderliche Bestätigung erfahren.

Eine befriedigende Theorie der Druckfestigkeit würde diese jedenfalls als Funktion der Höhe geben müssen (§ 13) und, wenn sie vollkommen sein soll, auch den Fall der Knickung (§ 23) einzuschließen haben.

III. Biegung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden Kräfte treffen dessen Achse rechtwinklig und geben für jeden Querschnitt ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht auf demselben steht.

§ 16. Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaares den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet.

Bei der Entwicklung dieser Beziehungen pflegt man von der durch Fig. 1 dargestellten Sachlage aus in folgender Weise vorzugehen.

Der bei A als eingespannt vorausgesetzte Balken AB ist am freien Ende B durch die Kraft P belastet, hinsichtlich welcher angenommen wird, daß sie in die Ebene und Richtung der einen Hauptachse des Stabquerschnittes falle. (Über das Kennzeichen

der beiden Hauptachsen eines Querschnittes vergl. § 21, Ziff. 1.) Die Kraft P ergibt dann für den beliebigen, um x von A abstehenden Querschnitt CC ein Kräftepaar, dessen Moment $P\ (l - x)$ ist, und dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet, sowie eine in die Querschnittsebene fallende Kraft P. Die letztere wird als nicht vorhanden angesehen und damit die oben als Voraussetzung der

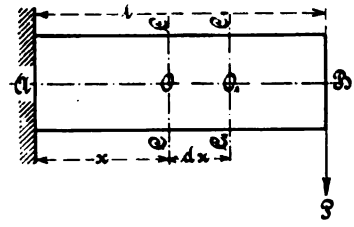


Fig. 1.

einfachen Biegung hingestellte Bedingung, daß sich die äußeren Kräfte für jeden Querschnitt durch ein Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene den letzteren rechtwinklig schneidet, erfüllt.

Es bezeichne mit Bezugnahme auf die Fig. 1 bis 5:

M_b das Moment des biegenden Kräftepaares hinsichtlich des in Betracht gezogenen Querschnittes,

η den Abstand eines Flächenstreifens $df = z\,d\eta$ im letzteren von derjenigen Hauptachse, welche senkrecht zur Ebene des Kräftepaares steht, d. i. hier OO (Fig. 5),

$\Theta = \int \eta^2 df = \int \eta^2 z\,d\eta$ das Trägheitsmoment des Querschnittes hinsichtlich dieser Hauptachse,

e_1 den größten positiven Wert von η (Abstand der am stärksten gezogenen oder gespannten Faser),

e_2 den größten negativen Wert von η (Abstand der am stärksten gedrückten Faser),

$e = e_1 = e_2$, sofern der Querschnitt so beschaffen ist, daß beide Abstände gleich groß sind,

σ die durch M_b im Abstand η, d. h. im Flächenstreifen $df = z\,d\eta$ hervorgerufene Spannung,

k_z bezw. k die zulässige Anstrengung des Materials auf Zug bezw. Druck,

x und y die Koordinaten des beliebigen Punktes O der elastischen Linie, d. h. der Kurve, in welche die ursprünglich

gerade Stabachse bei der Biegung übergeht, bezogen auf das aus Fig. 2 ersichtliche Koordinatensystem,

ϱ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie in dem beliebigen Punkte O,

α den Dehnungskoeffizienten, d. i. die Änderung der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung.

Unter der Einwirkung der Kraft P biegt sich der Stab, wie Fig. 2 erkennen läßt. Infolgedessen werden zwei ursprünglich parallele Querschnitte CC und C_1C_1, Fig. 1, welche um $dx = OO_1$ voneinander abstehen, diesen Parallelismus verloren haben und einen gewissen Winkel $CMC_1 = d\varphi$, Fig. 2 und 3, miteinander

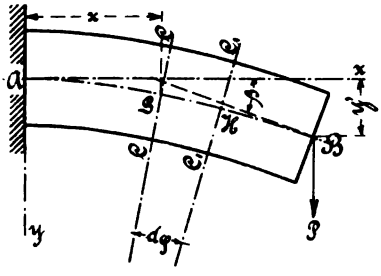


Fig. 2.

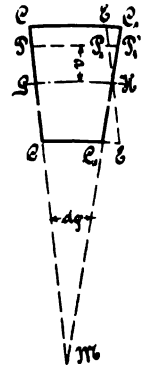


Fig. 3.

einschließen. Daß sie eben und senkrecht zur Mittellinie bleiben, wird vorausgesetzt. Die oberhalb einer gewissen Faserschicht, welche sich in $\overline{GH}$, Fig. 2 und 3, darstellt, liegenden Fasern haben sich gedehnt, die unterhalb gelegenen verkürzt. In der bezeichneten Faserschicht ist die Dehnung gleich Null, weshalb sie „neutrale Schicht“ genannt wird.

Für den in Betracht gezogenen Querschnitt CGC findet sich die verhältnismäßige Dehnung ε im Abstand v von der Geraden, die sich in G projiziert, aus der Erwägung, daß bei $EHP_1E \parallel CGPC$ die Strecke $\overline{PP_1} = \overline{CE} = \overline{GH} = dx$ infolge der Biegung übergegangen ist in $\overline{PP_1'}$, also

$$\varepsilon = \frac{\overline{PP_1'} - \overline{PP_1}}{PP_1} = \frac{\overline{P_1P_1'}}{GH} = \frac{v\,d\varphi}{dx} \quad . \; . \; 1)$$

Die hiermit verknüpfte Spannung σ ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff des Dehnungskoeffizienten α nach Gleichung 2, § 2, zu

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{v}{\alpha}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse auf die Faserschicht nicht einwirken (vergl. § 7 und § 14).

Die so im Innern des Stabes durch das Moment M_b wachgerufenen Kräfte müssen sich mit diesem im Gleichgewicht befinden. Dazu gehört, daß die algebraische Summe dieser inneren Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null, und daß sie ein Moment liefern, welches gleich und entgegengesetzt M_b ist.

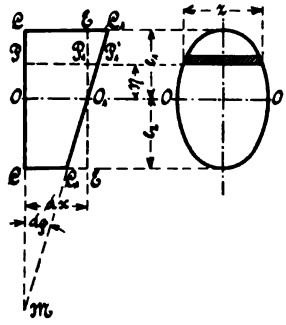


Fig. 4.

Fig. 5.

Die erste Forderung gibt, wenn der im Abstande v von der neutralen Schicht liegende Flächenstreifen mit df bezeichnet wird,

$$\int \sigma\, df = 0, \quad \ldots \quad 3)$$

genommen über den ganzen Querschnitt. Mit Rücksicht auf Gleichung 2 sowie in Anbetracht, daß der Quotient $\frac{d\varphi}{dx}$ für sämtliche Streifen eines und desselben Querschnittes den gleichen Wert besitzt, findet sich aus Gleichung 3

$$\int \frac{1}{\alpha} v\, df = 0. \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Dehnungskoeffizient α für alle Punkte des Querschnittes gleich groß, also unabhängig von der Größe und dem Vorzeichen der Spannung σ oder der Dehnung ε ist, folgt

$$\int v\, df = 0, \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

d. h. die Gerade, in welcher die Dehnungen und die Spannungen den Wert Null besitzen, die sogenannte „neutrale Achse“ oder „Nullachse“, geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes und ist, da die Ebene der äußeren Kräfte den letzteren in der einen

Hauptachse schneidet, die andere Hauptachse desselben. Somit ist unter Beachtung auf Fig. 4 und 5, worin $\overline{OO}$ die Nullachse bedeutet, zu setzen

$$v = \eta.$$

Die zweite Bedingung liefert

$$\int \sigma \, df \, . \, \eta = M_b \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 6)$$

und nach Maßgabe der Gleichung 2 unter der bezüglich α unmittelbar vorher ausgesprochenen Voraussetzung

$$M_b = \frac{1}{\alpha} \frac{d\varphi}{dx} \int \eta^2 \, df,$$

woraus mit

$$\int \eta^2 \, df = \Theta, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 7)$$

d. i. das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf OO,

$$M_b = \frac{\Theta}{\alpha} \frac{d\varphi}{dx} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 8)$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha \frac{M_b}{\Theta},$$

womit Gleichung 2 übergeht in

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} \eta. \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 9)$$

Hiernach sind die Spannungen proportional dem Abstande der Flächenelemente von der Nullachse, wie in Fig. 6 dargestellt ist.

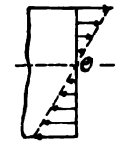


Fig. 6.

Damit ergibt sich die größte Zugspannung σ_1 für den größten positiven Wert von η, d. i. nach Fig. 5 für $\eta = +e_1$, zu

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{\Theta} e_1, \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 10)$$

die größte Druckspannung σ_2 für den größten negativen Wert von η, d. i. für $\eta = -e_2$, zu

$$\sigma_2 = -\frac{M_b}{\Theta} e_2, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 11)$$

so daß

$$\left.\begin{array}{ll} k_z \geqq \dfrac{M_b}{\Theta} e_1 & k \geqq \dfrac{M_b}{\Theta} e_2 \\ \text{oder} & \\ M_b \leqq k_z \dfrac{\Theta}{e_1} & M_b \leqq k \dfrac{\Theta}{e_2}. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 12)$$

Ist ϱ der Abstand des Punktes M, in welchem sich die Durchschnittslinie der beiden Querschnitte (Fig. 3 und 4) projiziert von dem Punkte O, Fig. 4, also der Krümmungshalbmesser der jetzt gekrümmten Stabachse, d. h. der elastischen Linie im Punkte O, so findet sich

$$dx = \varrho \, d\varphi$$

$$\varrho = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\Theta}{\alpha M_b}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{M_b}{\Theta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

Der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers, d. h. die Krümmung, ist hiernach proportional dem Dehnungskoeffizienten α, dem biegenden Moment M_b und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment Θ.

Mit der Annäherung, mit welcher der allgemein gültige Ausdruck

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\pm \frac{d^2 y}{dx^2}} = \varrho$$

ersetzt werden darf durch

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

was wegen $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sim 1$ zulässig erscheint für Durchbiegungen des Stabes, die klein sind im Verhältnis zur Stablänge, findet sich

$$M_b = \pm \frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

§ 17. Trägheitsmomente.

Die in § 16 entwickelten Hauptgleichungen setzen im Falle ihrer Benutzung die Kenntnis des betreffenden Trägheitsmomentes

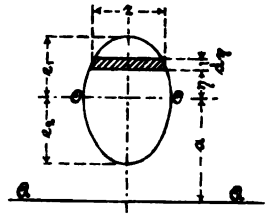


Fig. 1.

voraus. Hinsichtlich der Berechnung desselben sei folgendes bemerkt.

Ist

Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die Schwerpunktsachse $O\,O$, Fig. 1, also $\Theta = \int \eta^2\, df = \int \eta^2\, z\, d\eta$,

Θ_1 das Trägheitsmoment desselben Querschnittes in bezug auf die Achse $Q\,Q$, welche im Abstande a zu $O\,O$ parallel läuft, demnach $\Theta_1 = \int (\eta + a)^2\, df$,

f die Größe des Querschnittes,

so ergibt sich

$$\Theta_1 = \int (\eta + a)^2\, df = \int \eta^2\, df + 2\, a \int \eta\, df + a^2 \int df$$

und unter Beachtung, daß

$$\int \eta^2\, df = \Theta \qquad \int \eta\, df = 0 \qquad \int df = f$$

$$\Theta_1 = \Theta + a^2 f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Von diesem Hilfssatz, der ausspricht, daß das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse $Q\,Q$ gleich ist dem Trägheitsmoment hinsichtlich der zu $Q\,Q$ parallelen Schwerpunktsachse $O\,O$, vermehrt um das Produkt aus Querschnittsfläche und Quadrat des Abstandes der beiden Achsen, läßt sich oft mit Vorteil Gebrauch machen.

1. Rechteck, Fig. 2.

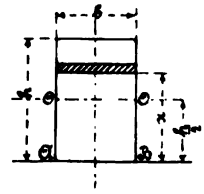


Fig. 2.

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Seite AB beträgt

$$\Theta_1 = \int_0^h x^2 b\, dx = \frac{1}{3} b h^3,$$

folglich in bezug auf die um $\frac{h}{2}$ davon abstehende Schwerpunktsachse OO

$$\Theta = \Theta_1 - a^2 f = \frac{1}{3} b h^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 b h = \frac{1}{12} b h^3 \quad . \quad . \quad 2)$$

und

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

2. Dreieck, Fig. 3.

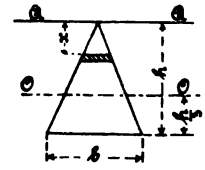


Fig. 3.

Für die Achse QQ

$$\Theta_1 = \int_0^h x^2 \left(b \frac{x}{h}\right) dx = \frac{1}{4} b h^3.$$

Für die um $\frac{2}{3}h$ davon abstehende Schwerpunktsachse OO

$$\Theta = \frac{1}{4} b h^3 - \left(\frac{2}{3} h\right)^2 \cdot \frac{1}{2} b h = \frac{1}{36} b h^3 \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

3. Kreis, Fig. 4.

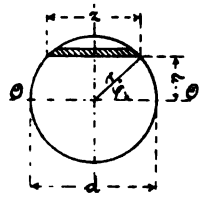


Fig. 4.

Für die Schwerpunktsachse OO wegen $\eta = r \sin\varphi$, $z = 2r\cos\varphi$

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} \eta^3 z \, d\eta = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$\Theta = \frac{\pi}{64} d^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{\Theta}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{32} d^3 = \sim\frac{1}{10} d^3 \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

4. Ellipse, Fig. 5.

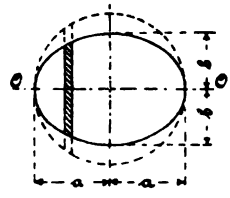


Fig. 5.

Wir denken uns die Ellipse in Verbindung gebracht mit dem sie umschließenden Kreis vom Radius a und beide Querschnitte

in unendlich schmale Streifen senkrecht zur Achse $O\,O$ geschnitten. Das Trägheitsmoment eines jeden Kreisstreifens verhält sich nach Gleichung 2 zu demjenigen des Ellipsenstreifens wie

$$1 : \left(\frac{b}{a}\right)^3.$$

Folglich ergibt sich das auf $O\,O$ bezogene Trägheitsmoment der Ellipse nach Gleichung 5 zu

$$\Theta = \frac{\pi}{64}(2a)^4\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\pi}{4}ab^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

5. Zusammengesetzte Querschnitte.

a) Rechnerische Bestimmung, Fig. 6.

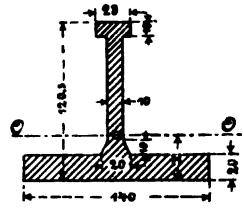


Fig. 6.

Der Querschnitt kann zusammengesetzt gedacht werden aus

dem	liegenden Rechteck	$14 \,.\, 2 = 28$ qcm,
-	Dreieck	$\frac{1}{2} \,.\, 1 \,.\, 1 = 0{,}5$ -
-	stehenden Rechteck	$1 \,.\, (12{,}05 - 2 - 1) = 9{,}05$ -
-	liegenden Rechteck	$2{,}8 \,.\, 1 = 2{,}8$ - .

Die Lage der Schwerpunktsachse $O\,O$ bestimmt sich aus

$$x = \frac{28\,\frac{2}{2} + 0{,}5\left(2 + \frac{1}{3}\right) + 9{,}05\,.\,(2 + 9{,}05\,.\,0{,}5) + 2{,}8\,.\,(12{,}05 - 0{,}5)}{28 + 0{,}5 + 9{,}05 + 2{,}8} = 2{,}99 \text{ cm}$$

und das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse nach Maßgabe der Gleichungen 2, 4 und 1 zu

$$\Theta = \frac{1}{12}14{,}0\,.\,2{,}0^3 + 14\,.\,2\,(2{,}99-1)^2$$

$$+\frac{1}{36}1\,.\,1^3 + \frac{1}{2}1\,.\,1\,(2{,}99-2{,}33)^2$$

$$+\frac{1}{12}1\,.\,9{,}05^3 + 1\,.\,9{,}05\,(6{,}025-2{,}99)^2$$

$$+\frac{1}{12}2{,}8\,.\,1^3 + 2{,}8\,.\,1\,(11{,}55-2{,}99)^2 = 500{,}7\ \text{cm}^4.$$

b) Zeichnerische Bestimmung, Fig. 7 bis 9.

Bei zusammengesetzten, insbesondere unregelmäßig begrenzten Querschnitten pflegt das folgende, von Mohr angegebene zeichnerische Verfahren rascher zum Ziele zu führen als der Weg der Rechnung.

Die Querschnittsfläche von der Größe f (im Falle des gewählten Beispieles Querschnitt einer Eisenbahnschiene) wird parallel zur Achse, in bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, in eine Anzahl Streifen zerlegt; hierauf trägt man die Querschnitte $f_1 f_2 f_3 \ldots . f_{10}$ dieser Streifen als Strecken $f_1 = \overline{0\,1}$, $f_2 = \overline{1\,2}$, $f_3 = \overline{2\,3}$ . . . . $f_{10} = \overline{9\,10}$ auf einer zur genannten Achse parallelen Geraden auf (Fig. 8) und stellt sich diese Flächen als Schwerkräfte vor, welche in den Schwerpunkten der Streifen angreifen; konstruiert mit dem symmetrisch zu 0 10 gelegenen und von dieser Linie um $\frac{f}{2}$ abstehenden Punkt O als Pol Kräfte- und Seilpolygon, Fig. 8, bezw. Fig. 9. In dem Schnittpunkt C (Fig. 9) der äußersten Polygonseiten 1 C und 10 C wird alsdann — wie ohne weiteres aus der Natur des Seilpolygons folgt — ein Punkt der gesuchten Schwerlinie CD erhalten, während die von dem Seilpolygon 1 2 3 . . . . 10 und den beiden Polygonseiten 1 C und 10 C eingeschlossene Fläche F_p (in Fig. 9 durch Strichlage, von links nach rechts ansteigend, bezeichnet) mit f multipliziert das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse CD liefert.

Beweis:

Auf den Knotenpunkt 1 des Seilpolygons, welchen wir uns herausgeschnitten denken, wirken in der Richtung $C1$ die Kraft S_0, in der Richtung 1 2 die Kraft S_1 und senkrecht abwärts die Schwerkraft f_1. Dieselben ergeben in bezug auf den Durchschnittspunkt A der Geraden $C1$ mit der beliebigen, zur Richtung der

Fig. 7.

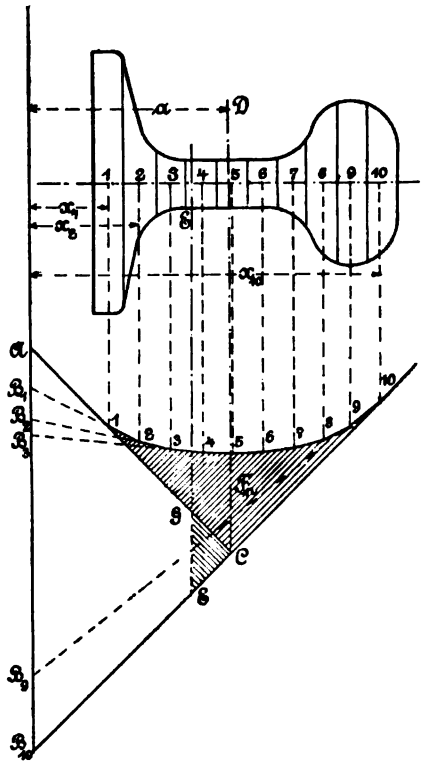


Fig. 8.

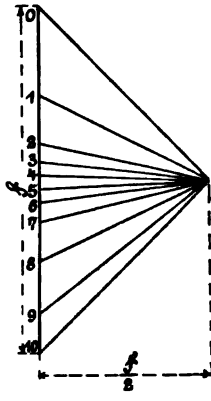


Fig. 9.

Streifen und der Schwerpunktsachse CD parallel laufenden Achse $\overline{AB_{10}}$ die Momentengleichung

$$f_1 x_1 = H \,.\, \overline{AB_1},$$

sofern S_1 in der eigenen Richtungslinie nach B_1 verlegt und hier in seine Vertikalkomponente und in seine wagrechte Seitenkraft

$$H = \frac{f}{2}$$

zerlegt wird.

Durch Multiplikation mit x_1 findet sich

$$f_1 x_1^2 = 2H\frac{\overline{AB_1}\cdot x_1}{2} = 2H.\ \text{Fläche}\ A\,1\,B_1 = f.\ \text{Fläche}\ A\,1\,B_1.$$

In ganz gleicher Weise folgt für den Knotenpunkt 2

$$f_2 x_2^2 = f.\ \text{Fläche}\ B_1\,2\,B_2,$$

für die folgenden Knotenpunkte

$$f_3 x_3^2 = f.\ \text{Fläche}\ B_2\,3\,B_3,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f_{10} x_{10}^2 = f.\ \text{Fläche}\ B_9\,10\,B_{10}.$$

Nun ist das Trägheitsmoment Θ_1 des ganzen Querschnitts in bezug auf die Achse AB_{10} — streng genommen allerdings nur unter Voraussetzung unendlich schmaler Streifen —

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + \ldots + f_{10} x_{10}^2\\ &= f.(\text{Fläche}\ A\,1\,B_1 + \text{Fläche}\ B_1\,2\,B_2 + \text{Fläche}\ B_2\,3\,B_3 + \ldots\\ &\quad + \text{Fläche}\ B_9\,10\,B_{10})\\ &= f.\ \text{Fläche}\ A\,1\,5\,10\,CB_{10}\end{aligned}$$

und in Hinsicht auf die Schwerpunktsachse $\overline{CD}$ nach Gleichung 1

$$\Theta = \Theta_1 - f a^2.$$

Unter Beachtung, daß Fläche $AB_{10}C = a^2$ (wegen $\sphericalangle\ ACB_{10} = 90^0$), wird

$$\begin{aligned}\Theta &= f.(\text{Fläche}\ A\,1\,5\,10\,CB_{10} - \text{Fläche}\ ACB_{10})\\ &= f.\ \text{Fläche}\ 1\,5\,10\,C = f.\ F_p,\end{aligned}$$

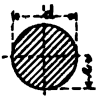
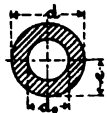
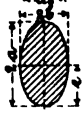
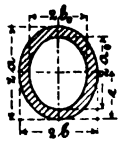
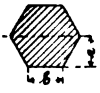
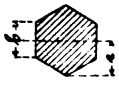
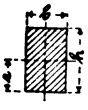
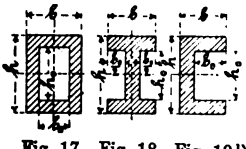
wie das Mohrsche Verfahren voraussetzt.

Für die Achse $EE \parallel CD$ ist, wie nach Maßgabe des Erörterten ohne weiteres klar, das Trägheitsmoment

$$f.(F_p + \text{Fläche}\ CEG),$$

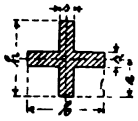
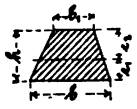
d. h. gleich dem Produkt aus Stabquerschnitt und der Summe der beiden in Fig. 9 durch Strichlage hervorgehobenen Flächen.

6. Zusammenstellung.

Querschnittsform	Trägheitsmoment Θ	Schwerpunktsabstand	Größe des Querschnittes f
Fig. 10. 	$\frac{\pi}{64} d^4$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} d^2$
Fig. 11. 	$\frac{\pi}{64}(d^4 - d_0^4)$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2)$
Fig. 12. 	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$e = a$	$\pi a b$
Fig. 13. 	$\frac{\pi}{4}(a^3 b - a_0^3 b_0)$	$e = a$	$\pi(a b - a_0 b_0)$
Fig. 14. 	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0{,}54\, b^4$	$e = 0{,}866\, b$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2{,}6\, b^2$
Fig. 15. 	$0{,}54\, b^4$	$e = b$	$2{,}6\, b^2$
Fig. 16. 	$\frac{1}{12} b h^3$	$e = \frac{h}{2}$	$b h$
Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19[1]). 	$\frac{1}{12}(b h^3 - b_0 h_0^3)$	$e = \frac{h}{2}$	$b h - b_0 h_0$

[1]) Vergl. die Darlegungen S. 220 u. f.

Biegungsversuche des Verfassers mit gußeisernen Balken, deren Querschnitte nach Fig. 19 gewählt waren, weisen nach, daß die Widerstandsfähigkeit unter sonst gleichen Umständen um so mehr hinter derjenigen zurückbleibt,

Querschnittsform	Trägheitsmoment Θ	Schwerpunktsabstand	Größe des Querschnittes f
Fig. 20. 	$\frac{1}{12}[h^3 s+(b-s)s^3]$	$e=\frac{h}{2}$	$h s+(b-s)s$
Fig. 21.	$\frac{1}{36} b h^3$	$e_1=\frac{h}{3}$ $e_2=\frac{2}{3}h$	$\frac{1}{2} b h$
Fig. 22. 	$\frac{1}{36}\frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{b+b_1}h^3$	$e_1=\frac{b+2b_1}{b+b_1}\frac{h}{3}$ $e_1=\frac{2b+b_1}{b+b_1}\frac{h}{3}$	$\frac{b+b_1}{2}h$
Fig. 23.	$0{,}0069\, d^4$	$e_1=0{,}212\, d$ $e_2=0{,}288\, d$	$\frac{\pi}{8} d^2$

Über die beiden Hauptträgheitsmomente eines Querschnittes vergl. § 21, Ziffer 1.

§ 18. Fälle bestimmter Belastungen.

1. Der Stab (vergl. Fig. 1, § 16, Fig. 2, § 16) ist an dem einen Ende eingespannt, am freien Ende mit P belastet. Außerdem trägt derselbe eine gleichmäßig über seine Länge l verteilte Belastung $Q = p\,l$.

Für den beliebigen Querschnitt CC, welcher um x von der Einspannstelle absteht, ergibt sich

$$M_b = P\,(l-x)+p\,\frac{(l-x)^2}{2}.$$

---

welche nach den Gleichungen 12, § 16, erwartet wird, je größer die Flanschen- oder Rippenbreite b im Verhältnis zur Stegstärke $b-b_0$ ist. Es entspricht dies ganz den Ergebnissen der Drehungsversuche mit Stäben, die Querschnitte nach Fig. 18 und 19 besaßen, worüber in § 35 berichtet wird.

Den größten Wert erlangt M_b für $x = 0$, nämlich

$$\max (M_b) = P\,l + \frac{p\,l^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) l.$$

Demnach findet nach den Gleichungen 12, § 16, die stärkste Anstrengung im Querschnitt der Einspannungsstelle A statt.

Zur Feststellung der elastischen Linie ergibt sich mit Gleichung 15, § 16,

$$\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = P\,(l - x) + p\,\frac{(l-x)^2}{2}$$

und für Materialien, für welche der Dehnungskoeffizient α konstant ist — Gleichung 15, § 16, gilt zunächst auch nur für solche — sowie unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Trägheitsmomentes Θ

$$\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = P\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2\,x - l\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

sofern die Integrationskonstante C genannt wird. Dieselbe bestimmt sich aus folgender Erwägung. Mit der Bezeichnung der Einspannung verknüpft man den Begriff, daß an der Einspannstelle die elastische Linie (in Fig. 2, § 16, $AGHB$) von der ursprünglich geraden Stabachse (AX) berührt wird[1]), d. h.

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Damit folgt $C = 0$, so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\Theta}\left[P\left(l - \frac{x}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2 - l\,x + \frac{x^2}{3}\right)\right] x. \quad . \quad 1)$$

Hieraus läßt sich für jeden beliebigen Punkt der elastischen Linie der Winkel berechnen, welchen die Tangente an letzterer in dem betreffenden Punkt mit der ursprünglich geraden Stab-

[1]) Über die Zulässigkeit dieser nur ausnahmsweise tatsächlich ganz erfüllten Voraussetzung vergl. § 53.

achse einschließt. Beispielsweise findet sich für das freie Ende B, Fig. 2, § 16, dieser Winkel β mit $x = l$ zu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha}{2\Theta}\left(P + \frac{Q}{3}\right) l^2$$

und angenähert, da es sich nur um sehr kleine Werte von β zu handeln pflegt,

$$\beta = \frac{\alpha}{2\Theta}\left(P + \frac{Q}{3}\right) l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Aus Gleichung 1 folgt unter Beachtung, daß

$$\text{für } x = 0 \text{ auch } y = 0,$$

die Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{\alpha}{\Theta}\left[\frac{P}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right) + \frac{p}{4}\left(l^2 - \frac{2}{3}lx + \frac{x^2}{6}\right)\right] x^2 \quad . \quad . \quad 3)$$

Die Durchbiegung y' des freien Endes beträgt, da hierfür $x = l$,

$$y' = \frac{\alpha}{\Theta}\left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8}\right) l^3 = \frac{\alpha}{\Theta}\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right) l^3 \quad . \quad . \quad 4)$$

2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen, Fig. 1. Er ist belastet durch die gleichmäßig über ihn verteilte Last $Q = p\,(a+b) = pl$ und durch die im Punkte C angreifende Kraft P.

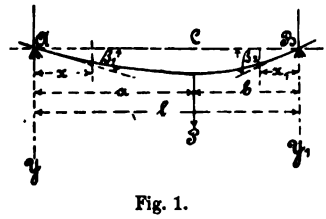


Fig. 1.

Die Auflagerdrücke der Stützen A und B sind

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}, \qquad B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Für den um x vom Auflager A abstehenden Querschnitt ist das biegende Moment

$$M_b = A x - p \frac{x^2}{2} = \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right) x - \frac{p x^2}{2}.$$

Dasselbe erlangt innerhalb der Strecke $\overline{AC} = a$ einen größten Wert für

$$P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} = p x$$

$$x = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2},$$

sofern

$$a > \frac{l}{2}.$$

Der gesuchte Querschnitt könnte hiernach nur in der größeren der beiden Strecken a und b liegen, und zwar zwischen der Balkenmitte und dem Angriffspunkt C der Kraft P, vorausgesetzt, daß

$$\frac{P}{Q} b < a - \frac{l}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} < \frac{2a - l}{2b} = \frac{a - b}{2b}$$

$$p a > P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

d. h. daß die über die Strecke a gleichmäßig verteilte Last größer ist als der Auflagerdruck in A.

Für den Fall, daß

$$\frac{P}{Q} \geq \frac{a - b}{2b},$$

liegt der durch die Biegung am stärksten beanspruchte Querschnitt im Angriffspunkte C der Kraft P.

Demnach ergibt sich,

$$\text{wenn } \frac{P}{Q} \geq \frac{a - b}{2b}, \text{ d. i. für den Querschnitt } C$$

$$\max (M_b) = \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right) a - \frac{p a^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{a b}{l}; \quad 5)$$

wenn

$$\frac{P}{Q} < \frac{a-b}{2b}, \text{ d. i. für } x = \frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}$$

$$\max(M_b) = \left(P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)\left(\frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \left(P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q} \quad \ldots\ldots 6)$$

Für $Q = 0$ wird

$$\max(M_b) = P\frac{b}{l}\,.\,a$$

und wenn

$$a = b = \frac{l}{2},$$

$$\max(M_b) = \frac{Pl}{4} \quad \ldots\ldots 7)$$

Für $P = 0$ wird

$$\max(M_b) = \frac{Ql}{8} = \frac{pl^2}{8} \quad \ldots\ldots 8)$$

Zur Bestimmung der elastischen Linie innerhalb der Strecke AC ergibt sich nach Gleichung 15, § 16,

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = Ax - p\frac{x^2}{2}$$

und unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von α und Θ[1]) (vergl. Ziff. 1)

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}px^3 + C_1,$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}y = \frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{24}px^4 + C_1x + C_2.$$

---

[1]) Ist der Querschnitt des Stabes stetig oder sprungweise veränderlich, so können zur Ermittlung der Durchbiegung und der Neigung der elastischen Linie verschiedene Wege eingeschlagen werden. Die Grundlage für rein rechnerisches Verfahren findet sich z. B. in der Arbeit von Weyrauch: „Die Gleichung der elastischen Linie willkürlich belasteter Stäbe“ unter III „Homogene Stäbe mit sprungweise veränderlichem Querschnitt“ (Zeitschrift für Mathematik

Wegen

$$y = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{wird} \quad C_2 = 0.$$

Für die Strecke BC findet sich entsprechend

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = B x_1 - p\frac{x_1^2}{2},$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2}B x_1^2 - \frac{1}{6}p x_1^3 + C',$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}y_1 = \frac{1}{6}B x_1^3 - \frac{1}{24}p x_1^4 + C' x_1 + C'',$$

$$C'' = 0.$$

Die Senkung im Punkte C muß für beide Strecken gleich erhalten werden, d. h.

$$\frac{1}{6}A a^3 - \frac{1}{24}p a^4 + C_1 a = \frac{1}{6}B b^3 - \frac{1}{24}p b^4 + C' b.$$

Ferner muß der Neigungswinkel der elastischen Linie im Punkte C der Strecke AC gleich dem negativen Wert des Neigungswinkels der elastischen Linie im Punkte C der Strecke BC sein, d. h.

$$\frac{1}{2}A a^2 - \frac{1}{6}p a^3 + C_1 = -\frac{1}{2}B b^2 + \frac{1}{6}p b^3 - C'.$$

---

und Physik 1874, S. 392 u. f.). Land (Zentralblatt der Bauverwaltung 1886, S. 249: „Die Durchbiegung voller Träger mit veränderlichem Querschnitt") und später unabhängig von ihm Ensslin (Dinglers polyt. Journal 1901, S. 341 u. f.: „Die Durchbiegung ungleich starker Wellen"; ferner: „Mehrfach gelagerte Kurbelwellen mit einfacher und doppelter Kröpfung. Ihre Formänderung und Anstrengung". Stuttgart 1902) gehen von dem Mohrschen Satz aus, daß die elastische Linie des ursprünglich geraden Stabes als Seilkurve aufgefaßt werden kann, während Kloß („Analytisch-graphisches Verfahren zur Bestimmung der Durchbiegung zwei- und dreifach gestützter Träger". Berlin 1902) Einfachheit der Lösung durch Verbindung von rechnerischem und zeichnerischem Verfahren auf etwas anderem Wege anstrebt. In nicht wenigen Fällen führt schätzungsweiser Ersatz des Stabes mit veränderlichem Querschnitt durch einen prismatischen zu genügend genauer Ermittlung der Durchbiegung und der Neigung der elastischen Linie.

Über das Bedürfnis, die Durchbiegung von Wellen oder auch die Winkel zu bestimmen, unter denen die elastische Linie der Welle in den Lagern gegen den Horizont geneigt ist, vergl. des Verfassers Maschinenelemente, 4. Abschnitt unter „B. Achsen und Wellen" (1892, S. 317 u. f., S. 324 u. f., 1903, S. 487 u. f., S. 494 u. f.).

Nach Beseitigung von C_1 und C' mittelst der beiden letzten Gleichungen findet sich

für die Strecke AC

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Theta}{\alpha}\left(\beta_1 - \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}A x^2 - \frac{1}{6}p x^3\\
&\frac{\Theta}{\alpha}(\beta_1 x - y) = \frac{1}{6}A x^3 - \frac{1}{24}p x^4\\
&\beta_1 = \left(P\frac{a b (a+2b)}{6 l} + \frac{Q l^2}{24}\right)\frac{\alpha}{\Theta};
\end{aligned}\right\} \quad \text{. . 9)}$$

für die Strecke BC

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Theta}{\alpha}\left(\beta_2 - \frac{dy_1}{dx_1}\right) = \frac{1}{2}B x_1^2 - \frac{1}{6}p x_1^3\\
&\frac{\Theta}{\alpha}(\beta_2 x_1 - y_1) = \frac{1}{6}B x_1^3 - \frac{1}{24}p x_1^4\\
&\beta_2 = \left(P\frac{a b (2a+b)}{6 l} + \frac{Q l^2}{24}\right)\frac{\alpha}{\Theta}.
\end{aligned}\right\}$$

Die Durchbiegung y' im Angriffspunkte C der Kraft P ergibt sich zu

$$y' = \left(P + \frac{l^2 + a b}{8 a b}Q\right)\frac{a^2 b^2}{3 l}\frac{\alpha}{\Theta} \text{ . . . . 10)}$$

Für den Fall, daß

$$a = b = \frac{l}{2},$$

folgt

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \left(P + \frac{2}{3}Q\right)\frac{\alpha}{\Theta}\frac{l^2}{16}, \text{ . . . 11)}$$

$$y' = \left(P + \frac{5}{8}Q\right)\frac{\alpha}{\Theta}\frac{l^3}{48} \text{ . . . . . 12)}$$

und sofern $Q = 0$

$$\beta = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta}, \text{ . . . . . 13)}$$

$$y' = \frac{\alpha}{48}\frac{P l^3}{\Theta} \text{ . . . . . 14)}$$

3. Der Stab ist beiderseits wagrecht eingespannt, Fig. 2, und belastet durch die gleichmäßig über ihn verteilte Last $Q = pl$ sowie durch die in der Mitte C angreifende Kraft P.

Wie bereits unter Ziff. 1 erörtert, wird mit der Bezeichnung der Einspannung der Begriff verknüpft, daß die elastische Lin

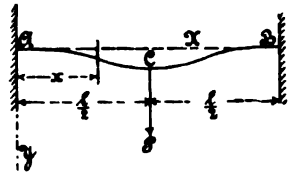


Fig. 2.

an der Einspannstelle die ursprünglich gerade Stabachse zur Tangente hat. Die vorausgesetzte Einspannung in A und B bedingt hiernach, daß die gerade Stabachse AB die elastische Linie ACB in A und B berührt. Inwieweit sich dies tatsächlich erreichen läßt, darüber wird in § 53 das Nötige erörtert werden. Bemerkt sei jedoch schon hier, daß nur in sehr seltenen Fällen von wirklicher Einspannung in dem bezeichneten Sinne gesprochen werden kann.

Bei der Symmetrie der Belastung genügt es, nur die Hälfte AC des Stabes in Betracht zu ziehen.

An der Einspannstelle A wirken auf den Balken

ein Kräftepaar vom Momente M_A

- Auflagerdruck $\qquad A = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}.$

Für den beliebigen, um x von der Einspannstelle A abstehenden Querschnitt ist das biegende Moment

$$M_b = M_A + A\,x - \frac{p\,x^2}{2}.$$

Hiermit liefert die Gleichung 15, § 16,

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = M_A + A\,x - \frac{p\,x^2}{2},$$

oraus unter Voraussetzung, daß α und Θ unveränderlich sind,

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = M_A x + \frac{1}{2} A x^2 - \frac{p x^3}{6}.$$

Die Integrationskonstante ist wegen der angenommenen Befestigungsweise der Stabenden, d. h. wegen

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für } x = 0,$$

benfalls gleich Null.

Die unbekannte Größe des Momentes M_A ergibt sich durch die Erwägung, daß für

$$x = \frac{l}{2} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

ein muß, aus der Gleichung

$$0 = M_A \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\right)\frac{l^2}{4} - p\frac{l^3}{48}$$

$$M_A = -\left(\frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12}\right) \quad \ldots\ldots \quad 15)$$

also links drehend, wie nach der Form der elastischen Linie erwartet werden mußte.

Hiermit das biegende Moment im Abstande x von A

$$M_b = -\left(\frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12}\right) + \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\right)x - \frac{p x^2}{2}.$$

Für die Stabmitte $x = \frac{l}{2}$ folgt

$$M_b = \frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{24}, \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

d. i. absolut genommen $\frac{Ql}{24}$ weniger als das Moment M_A an der Einspannstelle.

Da M_b für die Mitte C positiv ist, so muß das Moment für einen Querschnitt zwischen A und C Null sein, entsprechend einem Wendepunkt der elastischen Linie. (In Gleichung 13, § 16, wird $\varrho = \infty$ für $M_b = 0$.)

Für den Fall, daß $Q = 0$, ergibt sich das Moment

im Punkte A zu $\quad -\frac{Pl}{8}$,

- - C - $\quad +\frac{Pl}{8}$,

- Abstande $x = \frac{l}{4}$ (Wendepunkt) $\quad 0$.

Für den Fall, daß $P = 0$, wird das Moment

im Punkte A $\quad -\frac{Ql}{12} = -\frac{pl^2}{12}$,

- - C $\quad +\frac{Ql}{24} = +\frac{pl^2}{24}$,

- Abstande $x = 0{,}2113\, l$ (Wendepunkt) $\quad 0$.

Die Gleichung der elastischen Linie wird erhalten durch nochmalige Integration des für den ersten Differentialquotienten erlangten Ausdruckes unter Beachtung, daß für $x = 0$ auch $y = 0$

$$-\frac{\Theta}{\alpha} y = \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} A x^3 - \frac{p x^4}{24}.$$

Hieraus findet sich die größte Durchbiegung y' für $x = \frac{l}{2}$ zu

$$y' = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^3}{192} \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

§ 19. Körper von gleichem Widerstande.

Körper dieser Art sind so geformt, daß die Belastung in sämtlichen Querschnitten eines und desselben Körpers die gleiche Größtspannung hervorruft. Unter Bezugnahme auf die Beziehungen 12, § 16, heißt dies, daß für sämtliche Querschnitte

$$k_z = \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_1}}, \quad \text{bezw.} \quad k = \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_2}}$$

konstant ist. Daraus folgt, daß die Querschnitte mit M_b sich derart ändern müssen, daß der Quotient

$$M_b : \frac{\Theta}{e_1}, \quad \text{bezw.} \quad M_b : \frac{\Theta}{e_2}$$

für alle Querschnitte gleich bleibt.

Hiermit führt Gleichung 13, § 16, zu

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{M_b}{\Theta} = \alpha \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_1}} \frac{1}{e_1} = \alpha \frac{k_z}{e_1},$$

woraus ersichtlich, daß im Falle eines konstanten Abstandes e_1 und bei Unveränderlichkeit von α die elastische Linie zum Kreise wird.

1. Der einerseits eingespannte, andererseits freie Körper mit rechteckigem Querschnitt von konstanter Breite b ist am freien Ende durch P belastet, Fig. 1.

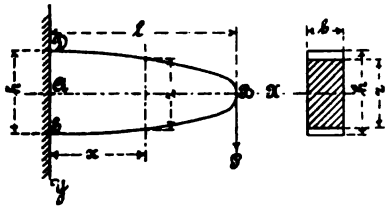


Fig. 1.

Für den um x von A abstehenden Querschnitt beträgt

$$M_b = P(l - x), \quad \Theta = \frac{1}{12} b z^3, \quad e_1 = e_2 = \frac{z}{2}, \quad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{1}{6} b z^2.$$

Folglich

$$k_z = \frac{P(l - x)}{\frac{1}{6} b z^2} = \text{konstant},$$

woraus mit $l - x = x_1$

$$z^2 = \frac{6P}{k_z b}(l - x) = \frac{6P}{k_z b} x_1,$$

d. i. die Gleichung einer Parabel. Demnach ist in Fig. 1 die Begrenzung EBD nach einer Parabel zu gestalten, für welche BA die Hauptachse, B der Scheitel und E (D) ein zweiter Punkt ist, dessen Lage bestimmt erscheint durch

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6Pl}{k_z b}}.$$

Die Durchbiegung y' am freien Ende ergibt sich unter Zugrundelegung des Koordinatensystems xy (vergl. Fig. 2, § 16) nach Gleichung 12 und 15, § 16, unter Beachtung des S. 211 oben Bemerkten aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha k_z}{e_1} = \frac{\alpha k_z}{\frac{z}{2}} = \frac{\alpha k_z}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6P}{k_z b}(l-x)}} = \frac{2\alpha k_z \sqrt{l}}{h\sqrt{l-x}},$$

$$y = \alpha\left(\frac{16 Pl\sqrt{l}}{b h^3}\sqrt{(l-x)^3} + \frac{24 Pl^3}{b h^3}x - \frac{16 Pl^3}{b h^3}\right),$$

sofern α als unveränderlich betrachtet und im Auge behalten wird, daß für

$$x = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad y = 0,$$

zu

$$y' = \alpha\frac{8 Pl^3}{b h^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Für den gleichbelasteten, jedoch prismatischen Stab ergab Gleichung 4, § 18,

$$y' = \frac{\alpha}{\frac{1}{12} b h^3}\frac{Pl^3}{3} = \alpha\frac{4 Pl^3}{b h^3},$$

d. i. genau die Hälfte des Wertes von Gleichung 1.

Nach Maßgabe der vorstehenden Rechnung würde der Querschnitt im Angriffspunkte der Kraft P gleich Null sein. Dieses natürlich unzulässige Ergebnis ist die Folge der Vernachlässigung der Schubkraft.

Unter „Biegung und Schub“ wird in § 52 das zur Feststellung der Querschnittsabmessungen gegen das Ende des Stabes hin Erforderliche bemerkt werden.

2. Der Stab wie unter 1, jedoch von konstanter Höhe h, Fig. 2.

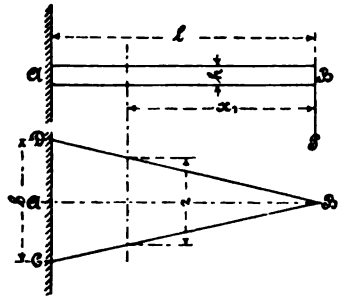


Fig. 2.

Für den um x_1 vom freien Ende B abstehenden Querschnitt ergibt sich

$$M_b = P x_1, \qquad \Theta = \frac{1}{12} h^3 z, \qquad e_1 = e_2 = \frac{h}{2}, \qquad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{1}{6} h^2 z,$$

$$k_z = \frac{P x_1}{\frac{1}{6} h^2 z} = \text{konstant},$$

$$z = \frac{6 P}{k_z h^2} x_1,$$

d. h. die Begrenzungslinien BC und BD sind Gerade, deren Lage durch

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \frac{b}{2} = \frac{3 P l}{k_z h^2}$$

bestimmt wird.

Die elastische Linie ist nach Maßgabe der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{k_z}{e_1} = 2\,\alpha \frac{k_z}{h}$$

infolge der konstanten Höhe des Stabes ein Kreis vom Halbmesser

$$\varrho = \frac{h}{2\,\alpha\, k_z}.$$

Die Durchbiegung y' am freien Ende B wird daher

$$y' = \frac{l^2}{2\,\varrho} = \alpha\, k_z \frac{l^2}{h} = \alpha \frac{6\,P\,l^3}{b\,h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

d. i. 1,5mal so groß, wie die Durchbiegung (nach Gleichung 4, § 18) unter sonst gleichen Verhältnissen bei konstanter Breite sein würde.

Vergl. Schlußbemerkung zu Ziff. 1.

3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen, Fig. 3, und ist durch die im Punkte C angreifende Kraft P belastet.

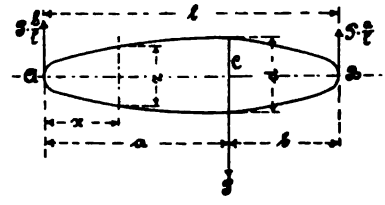


Fig. 3.

Der Teil AC verhält sich wie ein bei C eingespannter und bei A durch $P\frac{b}{l}$ belasteter Stab, der Teil BC wie ein bei C eingespannter und bei B mit $P\,\frac{a}{l}$ belasteter Balken (Fall wie bei Ziff. 1 und 2).

Ist der Querschnitt kreisförmig, so findet sich für den beliebigen, um x von A abstehenden Querschnitt der Strecke AC

$$M_b = P\frac{b}{l}x, \qquad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{\pi}{32}z^3.$$

Damit wird

$$k_z = \frac{P\frac{b}{l}x}{\frac{\pi}{32}z^3} = \text{konstant},$$

$$z^3 = \frac{32\,P\,b}{\pi\,k_z\,l}x,$$

d. i. die Gleichung einer kubischen Parabel, für welche AC die Hauptachse, A der Scheitel ist, und deren Ordinate im Querschnitt bei C durch die Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,P\,a\,b}{\pi\,k_z\,l}}$$

bestimmt wird.

Da sich für die Strecke BC ein ganz entsprechendes Ergebnis findet, so besteht der gesuchte Körper AB aus zwei nach kubischen Parabeln, welche sich im Querschnitt bei C schneiden, geformten Umdrehungskörpern.

Vergl. Schlußbemerkung zu Ziff. 1.

§ 20. Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit. Der durch Biegung in Anspruch genommene Stab auf Grund des Gesetzes $\varepsilon = a\,\sigma^m$.

Die Voraussetzungen, welche in § 16 zur Bestimmung der Biegungsanstrengung, Gleichung 12, führten, sind:

1. Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen senkrecht schneidet.
2. Die Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, wirken nicht aufeinander ein, sind also unabhängig voneinander.
3. Die ursprünglich ebenen Querschnitte des Stabes bleiben eben.

4. Der Dehnungskoeffizient ist für alle Fasern gleich groß, also auch unabhängig von der Größe und dem Vorzeichen der Dehnungen oder Spannungen.

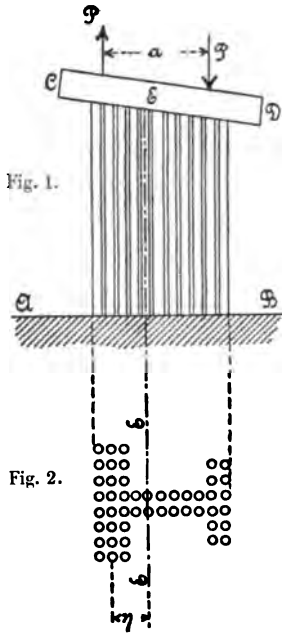


Fig. 1.

Fig. 2.

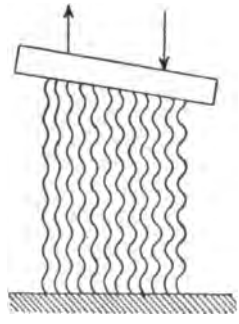


Fig. 3.

Diese Annahmen treten am deutlichsten vor das Auge, wenn wir uns einen Körper so ausgeführt und beansprucht denken, daß sie erfüllt sind. Zu dem Zwecke stellen wir uns vor, der Stab bestehe aus einzelnen, voneinander unabhängigen, ursprünglich gleichlangen Fasern, etwa wie die Fig. 1 und 2 (Durchschnitt) erkennen lassen. Mit dem einen Ende seien dieselben im Boden AB befestigt, mit dem anderen an der Platte CD. Die letztere, welche wir uns gewichtslos denken wollen, werde in der Mittelebene von einem Kräftepaar PP, dessen Moment $M_b = Pa$ ist, ergriffen. Sie dreht sich infolgedessen um eine Achse EE. Die links von dieser gelegenen Fasern werden gedehnt, die rechts davon befindlichen erfahren eine Verkürzung. Von den gedrückten Fasern werde vorausgesetzt, daß sie sich nach der Seite hin nicht ausbiegen. Die Auffassung der Fasern als vollkommen gleicher Spiralfedern, etwa wie in Fig. 3 gezeichnet, wird diese Vorstellung erleichtern.

Wie ohne weiteres ersichtlich, sind bei dieser Sachlage die Verlängerungen bezw. Verkürzungen der Fasern proportional dem Abstande von der Achse EE.

Bedeutet λ die Längenänderung, welche die ursprünglich l langen und im Abstande η von der Achse EE gelegenen Fasern erfahren haben, so ist

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$$

die verhältnismäßige Längenänderung, d. h. die Dehnung im Abstande η. Wird diese Größe im Abstande 1 mit ε' bezeichnet, so findet sich

$$\varepsilon = \varepsilon' \eta.$$

Hiermit ist eine Spannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta$$

verknüpft, welcher bei dem Querschnitt f_0 der im Abstande η gelegenen Fasern eine Kraft

$$\sigma f_0 = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta f_0$$

entspricht.

Die Gesamtheit dieser inneren Kräfte muß sich mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht befinden. Infolgedessen muß sein:

die algebraische Summe dieser inneren Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null, d. h.

$$\Sigma \sigma f_0 = \Sigma \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta f_0 = 0,$$

und ferner die Summe der Momente dieser inneren Kräfte gleich dem Moment des Kräftepaares $P a = M_b$, d. h.

$$\Sigma \sigma f_0 . \eta = \Sigma \frac{\varepsilon'}{\alpha} f_0 \eta^2 = M_b.$$

Aus der ersten Bedingungsgleichung folgt bei Unveränderlichkeit von α

$$\Sigma f_0 \eta = 0,$$

d. h. die Nullachse EE geht durch den Schwerpunkt sämtlicher Faserquerschnitte, bildet also die zweite Hauptachse des Gesamtquerschnittes.

Die zweite Bedingungsgleichung führt unter der soeben genannten Voraussetzung, α betreffend, und bei Beachtung, daß $\Sigma f_0 \eta^2 = \Theta$, zu

$$M_b = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \Theta.$$

Beträgt der Abstand η der am stärksten gezogenen Fasern e_1, der am stärksten gedrückten — e_2, so erfahren diese Fasern die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon'}{\alpha} e_1 \quad \text{bezw.} \quad \sigma_2 = -\frac{\varepsilon'}{\alpha} e_2,$$

woraus folgt

$$\frac{\varepsilon'}{\alpha} = \frac{\sigma_1}{e_1} \qquad \frac{\varepsilon'}{\alpha} = -\frac{\sigma_2}{e_2}$$

und hiermit

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1} \qquad M_b = -\sigma_2 \frac{\Theta}{e_2}.$$

Bei Berücksichtigung, daß

$$\sigma_1 \leqq k_z \qquad -\sigma_2 \leqq k,$$

folgt

$$M_b \leqq k_z \frac{\Theta}{e_1}, \qquad M_b \leqq k \frac{\Theta}{e_2}$$

oder

$$k_z \geqq \frac{M_b}{\Theta} e_1, \qquad k \geqq \frac{M_b}{\Theta} e_2,$$

d. s. die in § 16 entwickelten Gleichungen 12.

Wir bemerken — wie hervorgehoben sei —, daß bei der vorausgesetzten Sachlage die Stabachse gerade bleibt, daß also das Kräftepaar PP mit dem Momente Pa eine Krümmung derselben nicht veranlaßt.

An die Stelle der Krümmungsachse, welche sich im Krümmungsmittelpunkt projiziert, tritt hier der Durchschnitt der Ebenen CD und AB[1]).

---

[1]) Der Winkel ψ, den beide Ebenen miteinander einschließen, läßt sich durch folgende Erwägung leicht feststellen.

Es beträgt die Spannung im Abstande 1 von der Nullachse $\frac{M_b}{\Theta}$ und die Dehnung dieser Faser $\varepsilon' = \alpha \frac{M_b}{\Theta}$, somit die Längenänderung der ursprünglich l langen Faser im Abstande 1 von der Nullachse

$$\alpha \frac{M_b}{\Theta} l,$$

Weiter bemerken wir, daß hier die Ebene CD aufhört, senkrecht zur Faserrichtung und zur Stabachse zu stehen.

Die Beziehung 1, § 16, welche für den gebogenen Stab, Fig. 2, § 16, unter der Voraussetzung abgeleitet worden war, daß die Querschnitte senkrecht zur gekrümmten Mittellinie stehen, gilt eben auch dann, wenn die Achse gerade bleibt, Fig. 1, nur müssen dann die einzelnen Querschnitte sich gegen die Achse derart neigen, daß ihre Ebenen sich sämtlich in derselben Geraden schneiden, welche den Durchschnitt der Ebenen AB und CD bildet.

Die Tangente des Neigungswinkels eines beliebigen, zwischen AB und CD gelegenen Querschnittes ist proportional dem Abstand des Schwerpunktes desselben über AB. ϱ hat dann hierbei allerdings nicht mehr die Bedeutung des Krümmungshalbmessers, sondern bezeichnet den Abstand der Schwerachse EE von der Durchschnittslinie der Ebenen AB und CD. Eine Ersetzung von $\frac{1}{\varrho}$ durch $\pm \frac{d^2y}{dx^2}$ ist dann natürlich unzulässig.

1. Was nun zunächst die Voraussetzung unter 1 betrifft, daß die auf den Stab wirkenden äußeren Kräfte für

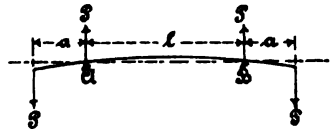


Fig. 4.

jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar liefern, so ist festzustellen, daß dieselbe nicht erfüllt zu sein pflegt. Die Erzeugung des biegenden Momentes erfordert Kräfte, welche nur ganz ausnahmsweise, etwa wie im Falle der Fig. 1, wobei die Stabachse gerade bleibt, oder im Falle der Fig. 4 für den mittleren Teil AB, der dann wegen $M_b =$ konstant nach einem Kreise gekrümmt ist, nicht mehr als ein Kräftepaar ergeben. In der Regel ist immer

---

d. i. aber auch gleich das Maß des Drehungswinkels der einen Ebene gegen die andere, also

$$\psi = \alpha \frac{M_b}{\Theta} l \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

eine Schubkraft vorhanden (vergl. Einleitung zu § 16), deren Einfluß allerdings in vielen Fällen in den Hintergrund tritt.

Hinsichtlich der Fälle, in denen die Schubkraft Bedeutung erlangt, muß auf „Biegung und Schub“ in § 52 verwiesen werden.

2. Was sodann die unter 2 genannte Voraussetzung anbelangt, daß die Fasern eine gegenseitige Wirkung aufeinander nicht ausüben, so erkennt man sofort, daß dieselbe für einen aus dem Ganzen bestehenden Stab nicht erfüllt ist. Wie wir in § 1 bezw. § 7 und 11 sahen, ist verbunden: mit der Dehnung in Richtung der Stabachse eine Zusammenziehung senkrecht zu derselben, also eine Verminderung des Faserquerschnittes, und mit der Verkürzung eine Querdehnung, demnach eine Vergrößerung des Faserquerschnittes. Diese Formänderungen senkrecht zur Stabachse sind um so bedeutender, je mehr die Dehnungen (positive wie negative) in Richtung der Fasern betragen. Da nun hier diese Längsdehnungen mit dem Abstande von der Nullachse in absoluter Hinsicht zunehmen, so werden die von der letzteren weiter abstehenden Fasern sich quer auch mehr zusammenziehen bezw. mehr dehnen wollen als die unmittelbar benachbarten und nach der Nullachse hin gelegenen. Infolgedessen werden diese der angestrebten Querzusammenziehung bezw. Querdehnung zu einem Teile hinderlich sein. Dieser gegenseitige Einfluß der Fasern senkrecht zu ihrer Richtung muß nach dem Früheren (§ 7 bezw. 14) die Beziehung $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, also im Falle der Unveränderlichkeit von α die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen beeinträchtigen und die Festigkeit etwas erhöhen (§ 9, Ziff. 1, bezw. § 14).

Außerdem werden aber auch die fest miteinander verbundenen Fasern noch dadurch aufeinander einwirken müssen, daß sich die weiter von der Nullachse abstehenden mehr ausdehnen bezw. verkürzen und deshalb gegenüber den unmittelbar benachbarten, dieser Achse näher gelegenen, ein Bestreben zu gleiten haben.

In bezug auf den gegenseitigen Einfluß der Fasern werden sich verschiedene Querschnittsformen verschieden verhalten (vergl. auch § 9). Vergleichen wir beispielsweise den rechteckigen Querschnitt (Fig. 5) mit dem ⊢┤-förmigen Fig. 6, so erkennt man sofort, daß die auf der Linie GG liegenden Fasern des ersteren von

ihren benachbarten inneren Fasern mehr beeinflußt werden müssen als die in gleichem Abstand liegenden Fasern $BCCB$ des anderen Querschnittes. Diese sind eben zum größten Teile nach innen frei.

Wird z. B. aus einem und demselben Material ein Stab vom Querschnitt Fig. 5 und ein solcher vom Querschnitt Fig. 6 hergestellt, alsdann für beide auf Grund der Gleichung

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1}$$

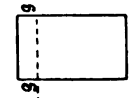


Fig. 5.

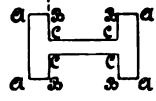


Fig. 6.

die bei der Bruchbelastung eintretende größte Faserspannung σ_1 ermittelt, so muß sich für den ersteren Stab ein etwas größerer Wert, d. h. eine etwas größere Biegungsfestigkeit, ergeben als für den letzteren.

Aus dem Erörterten folgt weiter beispielsweise für die breitbasige Eisenbahnschiene, Fig. 7, daß die im Kopfe des Querschnittes zusammengedrängte Masse der Dehnung (positiven wie negativen) einen verhältnismäßig (im Vergleich zu dem, was bei den Entwicklungen im § 16 vorausgesetzt wird) größeren Wider-

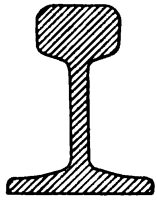


Fig. 7.

Fig. 8.

stand entgegensetzt als das Material in dem breiten, wenig hohen Fuß, und daß infolgedessen die tatsächliche Nullachse oberhalb der horizontalen Schwerpunktsachse des Querschnittes gelegen sein muß. Wird der letztere so bestimmt, daß diese Achse in halber Höhe liegt, so kann hiernach der Querschnitt nicht als ganz zweckmäßig bezeichnet werden, namentlich dann nicht, wenn der Fuß sehr breit ist. In solchem Falle muß die wagrechte Hauptachse des Querschnittes entsprechend tiefer als in halber Höhe sich befinden. Hierdurch erklärt sich auch eine verhältnismäßig größere Widerstandsfähigkeit starkköpfiger Stahlschienen u. s. w.

sowohl gegenüber gewöhnlicher Biegungsbeanspruchung als auch gegenüber Schlagproben.

Je mehr sich die Querschnittsfläche in zwei schmale, der Nullachse parallele Streifen zusammendrängt, Fig. 8, um so geringer wird der gegenseitige Einfluß der Fasern aufeinander, um so zutreffender erscheinen unter sonst gleichen Verhältnissen die Beziehungen, welche auf Grund der Voraussetzung Ziff. 2 entwickelt wurden, vorausgesetzt daß nicht ein anderer Umstand in Betracht kommt, der sofort erörtert werden wird.

Ohne den Querzusammenhang der Fasern müßten diejenigen von ihnen, welche gedrückt werden, in der Mitte nach der Seite ausweichen (Fall der Knickung, vergl. § 23). In der Tat kann diese Neigung der gedrückten Fasern, nach der Seite auszuweichen, bei verhältnismäßig großer Länge des auf Biegung beanspruchten Stabes und bei entsprechender Querschnittsform des letzteren, wie z. B. Fig. 8, dessen Widerstandsfähigkeit erheblich vermindern.

Der Querzusammenhang der Fasern kann infolge des örtlichen Angriffs der Kräfte, welche das biegende Moment liefern, noch einen weiteren, zunächst die Form des Querschnittes und sodann auch die Widerstandsfähigkeit des Stabes ändernden Einfluß äußern,

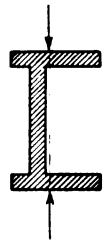


Fig. 9.

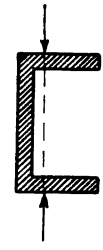


Fig. 10.

insbesondere wenn der Stabquerschnitt in bezug auf die Kraftebene unsymmetrisch ist. Ein Blick auf Fig. 9 und 10 läßt deutlich erkennen, daß die in eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes fallende Kraft auf eine Änderung der Form des letzteren hinwirkt derart, daß der Steg sich wölbt, infolgedessen die Widerstandsfähigkeit des Stabes vermindert wird.

Überblicken wir das hinsichtlich des gegenseitigen Einflusses der Fasern Gefundene, so erkennen wir, daß im allgemeinen die

Anstrengungen k_z bezw. k, wie sie sich nach den Gleichungen 12, § 16, ergeben, nicht mehr den Charakter der reinen Zug- bezw. Druckbeanspruchung besitzen, und daß es deshalb im allgemeinen als richtig erscheint, bei Ermittlung der Abmessungen eines auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes als zulässige Anstrengung des Materials Werte einzuführen, welche aus Biegungsversuchen gewonnen wurden. Inwieweit es zutreffend ist, wenn an Stelle dieser Biegungsanstrengung die aus Zugversuchen abgeleitete Größe k_z gesetzt wird, muß — streng genommen — durch Vergleichung der Ergebnisse von Zug- und von Biegungsversuchen für jedes Material und die einzelnen Querschnittsformen festgestellt werden. Hierbei ist im Auge zu behalten, daß es sich empfiehlt, die Versuche in der Regel unter solchen Verhältnissen anzustellen, wie sie bei den technischen Anwendungen vorliegen, auf welche die ermittelten Zahlen übertragen werden sollen. Der Beschreitung dieses Weges können sich allerdings in manchen Fällen sehr erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

Bei zusammengesetzten Körpern wie Gitterträgern u. s. w., welche so konstruiert sind, daß die einzelnen Teile fast nur Zug und Druck erfahren, ist naturgemäß mit k_z und k (falls nicht Knickung in Betracht kommt) zu rechnen.

3. Was die oben unter 3 aufgeführte Voraussetzung anlangt, daß die Querschnitte eben bleiben, so ist festzustellen, daß auch sie nicht genau zutrifft; die Schubkraft, welche mit dem biegenden Moment unvermeidlich verknüpft zu sein pflegt, wirkt auf Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte hin (vergl. „Biegung und Schub“ in § 52). Doch scheint, soweit das bis heute vorliegende Material ein Urteil gestattet, die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bei ausschließlich oder wenigstens in entschieden vorwiegender Weise auf Biegung beanspruchten Stäben, welche aus einem Material bestehen, für welches die Voraussetzung Ziff. 4 erfüllt ist, zulässig zu sein.

Für einen Stab aus weichem Bessemerstahl von 140 mm Höhe und 55 mm Breite und 1200 mm Länge, welcher sich bei einer Auflagerentfernung von 1000 mm um 241,5 mm durchgebogen hatte, ohne zu brechen, stellte Bauschinger fest, daß bei dieser ganz bedeutenden Durchbiegung die ursprünglich ebenen Querschnitte eben sowie senkrecht zur elastischen Linie geblieben waren,

und die Länge der früher geraden, 1000 mm langen elastischen Linie sich nicht geändert hatte.

Versuche des Verfassers mit allerdings weniger hohen Stäben aus Schmiedeisen führten zu dem gleichen Ergebnis.

Wie es sich mit dem Ebenbleiben der Querschnitte bei Materialien verhält, welche Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen überhaupt nicht aufweisen, muß zunächst noch dahingestellt bleiben. Immerhin scheint nach dem, was bis heute geschlossen werden kann, auch hier die Annahme des Ebenbleibens wenigstens mit Annäherung zulässig zu sein (vergl. Fußbemerkung 2, S. 245 und 246).

4. Die Voraussetzung 4, daß der Dehnungskoeffizient α konstant ist, also gleich für Zug und für Druck, sowie unabhängig von der Größe der Spannungen oder Dehnungen, erscheint nach Maßgabe der in § 4 niedergelegten Versuchsergebnisse und der hierauf bezüglichen Darlegungen in § 5 nur für manche Materialien, beispielsweise für Schmiedeisen und Stahl, zulässig. Bei Gußeisen z. B. ist sie dagegen nicht zutreffend; hier wachsen die Dehnungen rascher als die Spannungen. Dasselbe ist der Fall bei Kupfer; auch bei Legierungen desselben wie Bronze, Messing u. s. w. wird rascheres Wachstum der Dehnungen beobachtet. Gleich verhält sich Sandstein, Granit, Zementmörtel, Beton u. s. w.

Nach Maßgabe des Gesagten werden für einen auf Biegung beanspruchten Stab aus Gußeisen unter der Annahme, daß die Querschnitte eben bleiben, zwar die Dehnungen proportional mit dem Abstande η von der Nullachse wachsen, nicht aber die Spannungen; letztere müssen vielmehr langsamer zunehmen, entsprechend dem Umstande, daß α in $\sigma = \varepsilon : \alpha$ mit wachsender Dehnung (Spannung) zunimmt (vergl. z. B. S. 19). Fig. 11 veranschaulicht dies unter Voraussetzung starker Beanspruchung des Stabes. Für die beliebig um η von der in X sich projizierenden Nullachse[1]) abstehende Faserschicht sei $\overline{PP_1}$ die Dehnung und $\overline{PP_2}$ die Spannung; dann ist für Gußeisen der geometrische Ort aller

[1]) Daß diese hier nicht mehr durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, folgt unmittelbar aus dem, was S. 190 und S. 217 in bezug auf die Gleichung $\int v\,df = 0$ bezw. $\Sigma f_0 \eta = 0$ gesagt ist. Dieselben werden nur erhalten unter der Voraussetzung, daß der Dehnungskoeffizient α konstant ist.

Punkte P_2 eine gegen die Achse der η gekrümmte, in $D_2 X P_2 Z_2$ sich projizierende Fläche, wenn auch die Punkte P_1 auf der durch die Nullachse gehenden Ebene $D_1 X Z_1$ liegen. Bei Proportionalität zwischen ε und σ, d. h. auf Grund der gewöhnlichen Biegungsgleichung

$$M_b = \sigma \frac{\Theta}{\eta},$$

würde sich die Spannungsverteilung nach Maßgabe der gestrichelt eingetragenen Geraden $D O Z$ gestalten. Wie ersichtlich, weicht

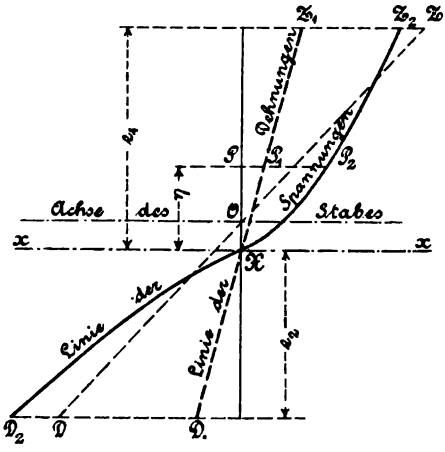


Fig. 11.

die Spannungsverteilung, wie sie sich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Dehnungen mit den Spannungen ergibt, bedeutend ab von derjenigen, welche unter der üblichen Voraussetzung der Unveränderlichkeit von α gewonnen wird. Die Abweichung ist — unter der Voraussetzung größerer Beanspruchung — hinsichtlich der Lage der Nullachse derart, daß das Material auf der Seite der größeren Dehnung, der größeren Nachgiebigkeit (der geringeren Festigkeit) zur Übertragung des Momentes einen größeren Querschnitt bietet als auf der anderen Seite, und in bezug auf die Zunahme der Spannungen zeigt sich, daß das nach der Nullachse hin gelegene Material besser ausgenutzt wird, indem die Spannungskurve der senkrechten Abszissenachse ihre hohle Seite zukehrt, also die Spannungen nicht mit der

ersten Potenz von η zunehmen, sondern langsamer wachsen. Beides hat zur Folge, daß die Widerstandsfähigkeit eines solchen Balkens gegenüber Biegung größer sein muß, als es die übliche Biegungsgleichung erwarten läßt. Infolgedessen liefern die Gleichungen 10 und 12, § 16, die Zugspannungen größer, als sie tatsächlich sind. Ein und dasselbe Gußeisen muß deshalb bei Biegungsversuchen eine höhere Festigkeit ergeben als bei Zugversuchen, wenn dieselbe auf Grund der Gleichung 10, § 16, berechnet wird.

Aus dem Erörterten folgt dann weiter, daß Stäbe mit Querschnitten, bei denen sich das Material nach der Nullachse hin zusammendrängt, widerstandsfähiger sein müssen, als nach Gleichung 12, § 16, zu schließen ist. Beispielsweise wird ein Stab mit kreisförmigem Querschnitt eine größere Bruchbelastung, bestimmt nach Gleichung 10, § 16, liefern müssen als ein Stab mit quadratischem Querschnitt, dieser wird dagegen eine größere Biegungsfestigkeit aufzuweisen haben als der I-förmige Querschnitt u. s. w.[1]).

Will man den Einfluß der Veränderlichkeit der Elastizität mit der Spannung schärfer verfolgen, so hat das unter Zugrundelegung der Gesetzmäßigkeit zu geschehen, welche zwischen ε und σ besteht. Im nachfolgenden soll das in Kürze ausgeführt und demgemäß

der durch Biegung in Anspruch genommene Stab auf Grund des Gesetzes

$$\varepsilon = \alpha \sigma^m$$[2])

rechnerischer Betrachtung unterworfen werden.

---

[1]) Hiermit stehen die Ergebnisse der vom Verfasser in den Jahren 1885 u. f. durchgeführten Biegungsversuche mit Gußeisen in voller Übereinstimmung. Siehe Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 193 u. f., S. 221 u. f., S. 1089 u. f., oder auch „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 60 u. f., sowie § 22, Ziff. 2 dieses Buches.

[2]) Wie Verfasser bei Veröffentlichung betreffend das Potenzgesetz $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 248 u. f. am Schlusse ausgesprochen, erscheint durch dasselbe eine Grundlage gewonnen, um an Entwicklungen heranzutreten, welche sich die Aufgabe zu stellen haben, die Anstrengung von solchen auf Biegung oder Drehung beanspruchten Körpern zu ermitteln, für deren Material Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen nicht besteht. Verfasser hoffte, durch diese Hervorhebung noch be-

a) Allgemeine Gleichungen.

Wir gehen von der zu Anfang des § 16 dargestellten Sachlage aus.

Der einerseits eingespannte und am freien Ende mit P belastete prismatische Stab biegt sich unter Einwirkung dieser Kraft. Hierdurch werden zwei ursprünglich parallele, um $dx = \overline{O O_1}$ von-

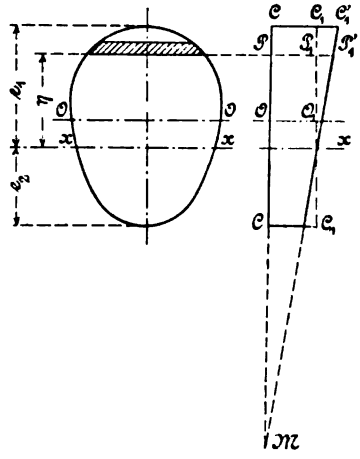


Fig. 12. Fig. 13.

einander abstehende Querschnitte CC und C_1C_1, Fig. 1, § 16, sowie Fig. 12 und 13, sich unter einem gewissen Winkel CMC_1 gegen-

---

sonders zu dahingehenden Arbeiten anzuregen. In der Tat erwies sich diese Erwartung als berechtigt, denn bereits im Juni 1897 wurde ihm von Ingenieur Ensslin eine Arbeit vorgelegt, welche sich mit der Biegungsaufgabe auf Grund des Gesetzes $\varepsilon = \alpha \sigma^m$ und insbesondere mit der Untersuchung des auf Biegung beanspruchten gußeisernen Balkens mit rechteckigem Querschnitt beschäftigte, und in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Nummer vom 14. August 1897, S. 941 u. f. behandelt Latowski die gleiche Aufgabe unter Anwendung der allgemeinen Sätze auf Granitbalken. Beide Arbeiten gelangen in der Hauptsache zu den gleichen Ergebnissen. Eine weitere Darlegung von Latowski s. Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1898, S. 56, und am gleichen Ort, S. 249, den Aufsatz von W. Carling.

Vergl. auch die Arbeit von L. Geusen in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1898, S. 463 u. f., sowie S. 516; ferner die Arbeit von Fr. Engesser am gleichen Ort, S. 903 u. f.: „Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungs- und Spannungsgesetz".

einander neigen. Daß sie eben bleiben, werde vorausgesetzt; mit welcher Berechtigung, ergibt sich aus dem am Schlusse von Ziff. 3, S. 224 Bemerkten.

Die oberhalb einer gewissen Linie, welche mit xx bezeichnet sein möge, liegenden Fasern haben sich gedehnt, die unterhalb liegenden zusammengedrückt. Demgemäß sind im Querschnitt oberhalb xx Zugspannungen σ_z und unterhalb xx Druckspannungen σ_d wachgerufen worden, für welche im allgemeinen die Beziehungen gelten

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha_1 \sigma_z^{m_1} \\ \varepsilon &= \alpha_2 \sigma_d^{m_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Wird der Abstand des Punktes M, in welchem sich die Durchschnittslinie der beiden Querschnitte projiziert, von der Linie xx, in welcher die Spannungen gleich Null sind, und die deshalb „Nullachse" genannt werden soll, mit ϱ bezeichnet, so ergibt sich für den Querschnitt COC die verhältnismäßige Dehnung im Abstande η von xx zu

$$\varepsilon = \frac{\overline{PP_1'} - \overline{PP_1}}{\overline{PP_1}} = \frac{\overline{PP_1'}}{\overline{PP_1}} - 1 = \frac{\varrho + \eta}{\varrho} - 1 = \frac{\eta}{\varrho}.$$

Infolge dessen findet sich für die beliebige um η von der Nullachse xx abstehende Faserschicht

auf der Zugseite

$$\varepsilon = \alpha_1 \sigma_z^{m_1} = \frac{\eta}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \sigma_z = \left(\frac{\eta}{\alpha_1 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_1}},$$

auf der Druckseite

$$\varepsilon = \alpha_2 \sigma_d^{m_2} = \frac{\eta}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \sigma_d = \left(\frac{\eta}{\alpha_2 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_2}} \quad \ldots \quad 3)$$

und für die äußersten, um e_1 bezw. e_2 von der Nullachse abstehenden Fasern, sofern deren Dehnungen mit ε_1 bezw. ε_2 und deren Spannungen mit σ_1 bezw. σ_2 bezeichnet werden,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{e_1}{\alpha_1 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_1}} \\ \sigma_2 &= \left(\frac{e_2}{\alpha_2 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_2}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

woraus durch Division

$$\frac{\sigma_2^{m_2}}{\sigma_1^{m_1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\frac{e_2}{e_1}$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\frac{e_2}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \sigma_1^{\frac{m_1}{m_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Das Gleichgewicht zwischen dem äußeren biegenden Moment M_b — von dem Einfluß der Schubkraft P werde abgesehen — und den inneren, durch dasselbe wachgerufenen Kräften verlangt, sofern der im Abstande η liegende und in Fig. 12 durch Strichlage hervorgehobene Flächenstreifen mit df bezeichnet wird,

$$\int_0^{e_1} \sigma_z\, df - \int_0^{e_2} \sigma_d\, df = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

und

$$M_b = \int_0^{e_1} \sigma_z\, df \,.\, \eta + \int_0^{e_2} \sigma_d\, df \,.\, \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Aus Gleichung 6 folgt unter Beachtung der Gleichung 3

$$0 = \int_0^{e_1} \left(\frac{\eta}{\alpha_1 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_1}} df - \int_0^{e_2} \left(\frac{\eta}{\alpha_2 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_2}} df$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_1 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_1}} \int_0^{e_1} \eta^{\frac{1}{m_1}} df - \left(\frac{1}{\alpha_2 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_2}} \int_0^{e_2} \eta^{\frac{1}{m_2}} df$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung 4 sowie Gleichung 5

$$0 = \frac{\sigma_1}{e_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{e_1} \eta^{\frac{1}{m_1}} df - \frac{\sigma_2}{e_2^{\frac{1}{m_2}}} \int_0^{e_2} \eta^{\frac{1}{m_2}} df$$

$$= \frac{\sigma_1}{e_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{e_1} \eta^{\frac{1}{m_1}} df - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \sigma_1^{\frac{m_1}{m_2}} \int_0^{e_2} \eta^{\frac{1}{m_2}} df \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Diese Gleichung bestimmt durch den Abstand e_1 die Lage der Nullachse. Sie zeigt, daß dieselbe hier abhängt von der Größe der Spannung σ_1, also von der Größe des biegenden Momentes. Da nun dieses für die verschiedenen Querschnitte des Stabes verschieden ist, so muß bei gleichbleibender Belastung derselben die Nullachse ihre Lage von Querschnitt zu Querschnitt ändern. Wird die Belastung des Balkens eine andere, d. h. ändert sich die belastende Kraft P, so verschiebt sich auch die Nullachse in den auf Biegung beanspruchten Querschnitten.

Bei Voraussetzung von Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen (§ 16) war die Lage der Nullachse unabhängig von der Spannung; sie fiel mit der einen Hauptachse zusammen; sie änderte sich deshalb nicht von Querschnitt zu Querschnitt und auch nicht mit der Belastung, wie dies hier der Fall ist.

Infolge der Abhängigkeit der Lage der Nullachse, d. h. der Größe e_1 von dem biegenden Moment, muß Gleichung 7 zur Bestimmung herangezogen werden. Dieselbe ergibt unter Berücksichtigung der Gleichungen 3 und 4

$$M_b = \left(\frac{1}{\alpha_1 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_1}} \int_0^{e_1} \eta^{1+\frac{1}{m_1}} df + \left(\frac{1}{\alpha_2 \varrho}\right)^{\frac{1}{m_2}} \int_0^{e_2} \eta^{1+\frac{1}{m_2}} df$$

$$= \frac{\sigma_1}{e_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{e_1} \eta^{1+\frac{1}{m_1}} df + \frac{\sigma_2}{e_2^{\frac{1}{m_2}}} \int_0^{e_2} \eta^{1+\frac{1}{m_2}} df$$

und nach Ersetzung von σ_2 durch den Wert Gleichung 5

$$M_b = \frac{\sigma_1}{e_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{e_1} \eta^{1+\frac{1}{m_1}} df + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \sigma_1^{\frac{m_1}{m_2}} \int_0^{e_2} \eta^{1+\frac{1}{m_2}} df. \quad . \quad 9)$$

Für den Fall der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen, d. h. für

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad \text{und} \quad m_1 = m_2 = 1$$

geht Gleichung 9 über in

$$M_b = \frac{\sigma_1}{e_1}\left(\int_0^{e_1} \eta^2 \, df + \int_0^{e_2} \eta^2 \, df\right),$$

d. i. die bekannte Biegungsgleichung, da der Klammerausdruck das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die Hauptachse OO bedeutet.

b) Rechteckiger Querschnitt.

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe $h = e_1 + e_2$ gehen die Gleichungen 8 und 9 unter Beachtung, daß $df = b\, d\eta$, über in

$$0 = \frac{\sigma_1}{e_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{e_1} \eta^{\frac{1}{m_1}} d\eta - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \sigma_1^{\frac{m_1}{m_2}} \int_0^{e_2} \eta^{\frac{1}{m_2}} d\eta,$$

$$M_b = \frac{\sigma_1}{e_1^{\frac{1}{m_1}}} b \int_0^{e_1} \eta^{\frac{m_1+1}{m_1}} d\eta + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \sigma_1^{\frac{m_1}{m_2}} b \int_0^{e_2} \eta^{\frac{m_2+1}{m_2}} d\eta.$$

Für die Integralwerte wird erhalten

$$\int_0^{e_1} \eta^{\frac{1}{m_1}} d\eta = \frac{m_1}{m_1+1} e_1^{\frac{m_1+1}{m_1}}, \qquad \int_0^{e_2} \eta^{\frac{1}{m_2}} d\eta = \frac{m_2}{m_2+1} e_2^{\frac{m_2+1}{m_2}},$$

$$\int_0^{e_1} \eta^{\frac{m_1+1}{m_1}} d\eta = \frac{m_1}{2m_1+1} e_1^{\frac{2m_1+1}{m_1}}, \qquad \int_0^{e_2} \eta^{\frac{m_2+1}{m_2}} d\eta = \frac{m_2}{2m_2+1} e_2^{\frac{2m_2+1}{m_2}}.$$

Damit folgt aus der ersten der beiden Gleichungen

$$\sigma_1 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1 - m_2}} \left[\frac{m_1 (m_2 + 1)}{m_2 (m_1 + 1)}\right]^{\frac{m_2}{m_1 - m_2}} \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^{\frac{m_2 + 1}{m_1 - m_2}} \quad . \quad 10)$$

oder

$$\frac{e_1}{e_2} = \left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[\frac{m_2 (m_1 + 1)}{m_1 (m_2 + 1)}\right]^{m_2} \sigma_1^{m_1 - m_2}\right\}^{\frac{1}{m_2 + 1}} \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Aus der zweiten Gleichung wird

$$M_b = \sigma_1 b \left\{\frac{m_1}{2 m_1 + 1} e_1^2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{e_2}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \frac{m_2}{2 m_2 + 1} \sigma_1^{\frac{m_1 - m_2}{m_2}} e_2^2\right\}$$

und nach Beseitigung von σ_1 mittels der Gleichung 10

$$M_b = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1 - m_2}} m_1 \left[\frac{m_1 (m_2 + 1)}{m_2 (m_1 + 1)}\right]^{\frac{m_2}{m_1 - m_2}} b \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^{\frac{m_2 + 1}{m_1 - m_2}} \left\{\frac{1}{2 m_1 + 1}\right.$$

$$\left. + \frac{m_2 + 1}{(m_1 + 1)(2 m_2 + 1)} \frac{e_2}{e_1}\right\} e_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

Sind für ein bestimmtes Material die Werte α_1 α_2 m_1 und m_2 bekannt, so liefert Gleichung 11 mit einem bestimmten Wert von σ_1 das Verhältnis $\frac{e_1}{e_2} = \varphi$, womit die Lage der Nullachse bestimmt erscheint; denn es ist

$$\frac{e_1}{e_2} + 1 = \varphi + 1$$

$$\frac{e_1 + e_2}{e_2} = \varphi + 1 = \frac{h}{e_2}$$

$$e_2 = \frac{h}{1 + \varphi} \quad \text{und} \quad e_1 = h \frac{\varphi}{1 + \varphi}.$$

Durch Einführung von e_1 und e_2 in Gleichung 12 erhält man den Wert des Biegungsmomentes, welches in dem betrachteten Querschnitt die Zugspannung σ_1 im Abstande e_1 hervorruft.

Mit dem angenommenen Werte von σ_1 (gleich der zulässigen Zuganstrengung) ergibt Gleichung 5 die größte Druckspannung σ_2.

Behufs Gewinnung eines anschaulichen Bildes hinsichtlich der Spannungsverteilung über den Querschnitt ist auf die Gleichungen 3 und 4 zurückzugehen, nach denen

$$\sigma_z = \sigma_1 \left(\frac{\eta}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_1}}, \quad \sigma_d = \sigma_2 \left(\frac{\eta}{e_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}.$$

Fig. 11, S. 225, gibt ein solches Schaubild für Materialien, z. B. Gußeisen (vergl. das auf S. 224 bis 226 zu dieser Abbildung Bemerkte).

Wie oben erkannt wurde, hängt die Lage der Nullachse in dem prismatischen Stab, Fig. 2, § 16, von der Größe des biegenden Momentes für den betreffenden Querschnitt ab[1]). Denkt man sich den Stab stark belastet, so zeigt sich bei näherer Verfolgung, daß ein um so größerer Teil des Querschnittes an der Übertragung der Zugspannungen, gegenüber welchen das Gußeisen, der Sandstein, der Granit u. s. w. weniger widerstandsfähig sind, teilnimmt, je größer das biegende Moment ist: Die Nullachse rückt aus der Mitte des Querschnittes nach der Druckseite hin, wie in Fig. 11 angenommen ist[2]). Je nach den Zahlenwerten,

---

[1]) Eine kritische Besprechung über „die bis jetzt vorliegenden Versuche zur unmittelbaren Bestimmung der Lage der neutralen Achse im gebogenen Stab aus Stein und Gußeisen" von E. Roser findet sich in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 205 u. f., und dazu gehörig die hieran sich schließende Auseinandersetzung am gleichen Ort, S. 371 und 372. Aus neuester Zeit ist die Arbeit von O. Hönigsberg: „Über die unmittelbare Beobachtung der Spannungsverteilung und Sichtbarmachung der neutralen Schichte an beanspruchten Körpern" (Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines 1904, No. 11) hervorzuheben.

[2]) Die Strecke, um welche die Nullachse in dem am stärksten beanspruchten Querschnitt selbst bei hoher Belastung des Stabes aus der Mitte gelegen ist, ergibt sich für Stoffe wie Gußeisen und Sandstein u. s. w. nicht sehr groß. Sie beträgt — soweit das Versuchsmaterial des Verfassers reicht — gegen den Bruch hin noch keine 10 % der Höhe des rechteckigen Querschnittes.

Indem man z. B. für ein und dasselbe Gußeisen durch Zugversuche den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Zugspannungen sowie die Zugfestigkeit, durch Druckversuche die Beziehung zwischen Zusammendrückungen und Druck-

welche die Größen $\alpha_1 m_1 \alpha_2 m_2$ der Beziehungen 2 besitzen, kann die Nullachse zu Anfang, d. h. für kleinere Beanspruchung nach der Zugseite hin aus der Mitte gelegen sein und erst mit Steigerung der auf Biegung wirkenden Last durch die Mitte nach der Druckseite hin sich bewegen.

Die auf S. 225 erörterte Abweichung der Spannungsverteilung fällt demnach um so größer aus, je stärker die Beanspruchung wird. Die gewöhnliche Biegungsgleichung $M_b = \sigma \frac{\Theta}{e}$ wird deshalb um so weniger zutreffende Ergebnisse liefern, je mehr sich die Anstrengung derjenigen beim Bruche nähert.

5. Zusammenfassung.

Bedeutet

k_b die im allgemeinen aus Biegungsversuchen abgeleitete zulässige Anstrengung des Materials,

e den Abstand der am stärksten angestrengten Faser des auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes,

so wird nach Maßgabe des unter 2 und 4 Erkannten an Stelle der Beziehungen 12, § 16, zu setzen sein

$$M_b \leqq k_b \frac{\Theta}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

---

spannungen, durch Biegungsversuche die zu den einzelnen Belastungen gehörigen Durchbiegungen und schließlich die Bruchbelastung feststellt, erhält man das zu einer Prüfung nötige Versuchsmaterial. Durch die Zug- und Druckversuche sind $\alpha_1 m_1 \alpha_2 m_2$ der Gleichung 2 und damit auch die Durchbiegungen bestimmt, welche bei dem Biegungsstab für gewisse Belastungen erwartet werden dürfen. Da nun diese Durchbiegungen beim Biegungsversuch unmittelbar gemessen worden sind, so ist eine Vergleichung, d. h. eine Prüfung gegeben. Eine zweite Prüfung ermöglicht der Umstand, daß aus den Zugversuchen die Zugfestigkeit und bei den Biegungsversuchen die Bruchbelastung ermittelt worden ist. Das setzt allerdings voraus, daß die Werte $\alpha_1 m_1 \alpha_2 m_2$ für genügend hoch gesteigerte Belastungen, d. h. daß insbesondere $\alpha_1 m_1$ noch für Zugkräfte bestimmt worden sind, die nahe an diejenige Belastung heranreichen, welche das Zerreißen herbeiführt.

Der Natur der Sache nach sind der vorstehend angedeuteten Untersuchung die gesamten Dehnungen, Zusammendrückungen und Durchbiegungen zugrunde zu legen.

Statt des Potenzgesetzes kann eine andere Funktion zugrunde gelegt werden, welche den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen aus-

Hierin ist k_b — streng genommen für alle Materialien — abhängig von der Querschnittsform. Von größerer Bedeutung wird diese Abhängigkeit — wie das vorliegende Versuchsmaterial schließen läßt — jedoch erst bei solchen Materialien, für welche der Dehnungskoeffizient α veränderlich ist (Gußeisen); bei Materialien mit konstantem α (Schmiedeisen, Stahl) tritt sie zurück.

Die Feststellung der elastischen Linie auf Grund der Gleichung 15, § 16, liefert für den Fall, daß α konstant ist, befriedigende Ergebnisse. Trifft jedoch diese Voraussetzung nicht zu, so kann bei starker Beanspruchung des Materials der Unterschied zwischen Rechnung und tatsächlichem Ergebnis erheblich ausfallen[1]).

Streng genommen, wären für Stäbe aus Materialien mit veränderlichen Dehnungskoeffizienten die in §§ 16, 18 und 19 gegebenen Entwicklungen unter Beachtung der zwischen ε und σ bestehenden Gesetzmäßigkeit (Gl. 1, § 4, S. 20) durchzuführen, wie es beispielsweise oben für Gußeisen geschehen ist. Die Rücksicht auf die erforderliche Einfachheit unserer technischen Rechnungen hält jedoch im allgemeinen zurzeit noch davon ab, in dieser Weise vorzugehen; nur in denjenigen Fällen, in welchen die Anforderungen der Technik das bisherige Verfahren nicht mehr gestatten, wird die strengere Rechnung anzulegen sein. Hinsichtlich des vom Verfasser vor rund 19 Jahren eingeschlagenen Annäherungsweges, der Veränderlichkeit von α bei Gußeisen Rechnung zu tragen, sei auf § 22, Ziff. 2, verwiesen.

---

reichend genau zum Ausdruck bringt und die Durchführung der Rechnungen ermöglicht.

S. 254 u. f. ist die zweite Prüfung ohne Zuhilfenahme einer Funktion auf graphischem Wege durchgeführt.

[1]) Nach Gleichung 14, § 18,

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{\Theta}$$

kommt es bezüglich der Durchbiegung y' eines in der Mitte mit P belasteten Stabes nur auf das Trägheitsmoment Θ des Querschnittes an; infolgedessen es z. B. gleichgültig erscheint, ob bei einem Querschnitte wie Fig. 6, § 17, die breite oder die schmale Flansche als die gezogene auftritt, wenn nur P und l die gleichen Werte besitzen. Tatsächlich erweist sich bei gußeisernen Trägern wegen der Veränderlichkeit von α die Durchbiegung im letzteren Falle entschieden größer als im ersteren. (Vergl. des Verfassers Arbeit „Die Biegungslehre und das Gußeisen“ in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 224, oder auch „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 72 und 73.)

§ 21. Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaares keine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält.

1. Hauptachsen eines Querschnittes. Hauptträgheitsmomente.

In der durch Fig. 1 dargestellten Fläche sei O ein beliebiger Punkt, OX und OY ein rechtwinkliges, sonst jedoch beliebig gelegenes Achsenkreuz; die Koordinaten des mit dem Flächenpunkte P zusammenfallenden Flächenelementes df seien x und y. Dann ist das Trägheitsmoment der Fläche

$$\text{in bezug auf die } X\text{-Achse } \Theta_x = \int y^2\, df,$$
$$\text{- - - - } Y\text{- - } \Theta_y = \int x^2\, df$$

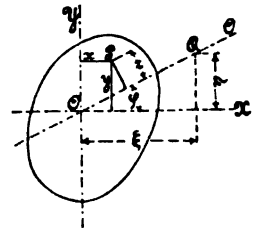


Fig. 1.

und hinsichtlich der unter dem Winkel φ gegen die X-Achse geneigten Geraden OO, von welcher P, demnach auch df, um $z = y\cos\varphi - x\sin\varphi$ absteht,

$$\Theta = \int z^2\, df = \int (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2\, df$$

$$\Theta = \Theta_x \cos^2\varphi + \Theta_y \sin^2\varphi - 2\,Z\sin\varphi\cos\varphi, \quad . \quad . \quad 1)$$

sofern

$$Z = \int x\,y\,df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Auf der Achse OO werde nun von O aus die Strecke $\overline{OQ} = r = \sqrt{\frac{1}{\Theta}}$ aufgetragen und den Koordinaten des so erhaltenen

Punktes Q in bezug auf OX und OY die Bezeichnung ξ und η erteilt, so daß

$$\xi = r\cos\varphi \qquad \eta = r\sin\varphi.$$

Aus Gleichung 1 folgt dann mit Rücksicht darauf, daß

$$\Theta = \frac{1}{r^2}$$

$$1 = \Theta_x r^2\cos^2\varphi + \Theta_y r^2\sin^2\varphi - 2Zr^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$1 = \Theta_x \xi^2 + \Theta_y \eta^2 - 2Z\xi\eta.$$

Diese Beziehung zwischen den Veränderlichen ξ und η ist die Gleichung einer Ellipse. Hiernach findet sich der geometrische Ort aller derjenigen Punkte Q, welche erhalten werden, wenn auf jeder durch O möglichen Geraden die Wurzel aus dem reziproken Werte des für diese Gerade sich ergebenden Trägheitsmomentes aufgetragen wird, als Ellipse, mit O als Mittelpunkt, d. i. die sogenannte Trägheitsellipse. Nun sind in einer Ellipse zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen vorhanden — die große und die kleine Achse —, für welche das Glied mit dem Produkt der beiden Koordinaten verschwindet. Dies tritt ein, wenn $Z = O$. Werden demnach diese beiden Achsen zu Achsen der x und der y gewählt, so wird der Ausdruck Gleichung 2 zu Null.

Ferner ist bekannt, daß die große Halbachse der Ellipse der größte und die kleine Halbachse der kleinste der möglichen Werte von r ist. Diese beiden ausgezeichneten Richtungen werden als die beiden Hauptachsen der Fläche für den Punkt O bezeichnet. Sie sind nach Maßgabe des Vorstehenden gekennzeichnet durch

$$Z = \int xy\,df = 0$$

und

$$\Theta_x = \text{Max.}, \qquad \Theta_y = \text{Min.} \quad \text{oder} \quad \Theta_x = \text{Min.}, \qquad \Theta_y = \text{Max.}$$

Dieser kleinste und dieser größte Wert unter den Trägheitsmomenten, welche sich für alle Geraden ergeben, die durch den Punkt O in der Ebene der Fläche gezogen werden können, heißen die beiden Hauptträgheitsmomente der Fläche für den Punkt O derselben.

Werden die beiden Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 bezeichnet, so findet sich das Trägheitsmoment Θ für eine beliebige durch O gehende Gerade, welche mit der Achse des Hauptträgheitsmomentes Θ_1 den Winkel φ einschließt, nach Gleichung 1 zu

$$\Theta = \Theta_1 \cos^2 \varphi + \Theta_2 \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Besitzen Θ_1 und Θ_2 gleiche Größe, so folgt

$$\Theta = \Theta_1 = \Theta_2,$$

d. h. die Trägheitsmomente für alle durch O möglichen Geraden sind einander gleich. Die Trägheitsellipse geht dann in einen Kreis über.

Das Vorstehende gilt für einen beliebigen Punkt der Fläche. Dementsprechend hat eine Fläche unendlich viele Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente. Wird von den Hauptachsen oder den Hauptträgheitsmomenten eines Querschnittes kurzhin gesprochen, so sind hierunter die entsprechenden Größen für den Schwerpunkt des letzteren verstanden.

2. *Biegungsanstrengung.*

Wir wählen die beiden Hauptachsen des Querschnittes Fig. 2 zu Achsen der y und z. Θ_1 gelte als das Trägheitsmoment in bezug auf die Hauptachse OY und Θ_2 als dasjenige hinsichtlich

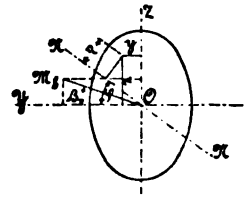


Fig. 2.

der Hauptachse OZ. Ferner sei $\overline{OM_b}$ die Paarachse des biegenden Kräftepaares vom Momente M_b, d. h. diejenige Gerade, welche in O senkrecht zur Paarebene steht, mit ihrer Größe OM_b das Moment M_b darstellt und derart eingetragen wird, daß, von M_b nach O hin gesehen, das Moment M_b rechts drehend erscheint. Die

zur Krümmungsachse, welche um ϱ von O absteht, parallele Nullachse besitze die Lage NN, schließe also mit OY den Winkel φ ein, während OM_b um β gegen OY geneigt ist.

Nach Gleichung 2, § 16, ist die Spannung σ in dem Flächenelement df, dessen Lage durch y und z bestimmt ist,

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\frac{\eta}{\varrho} = \frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho}.$$

Je die Summe der Momente, welche diese Spannung für alle Flächenelemente in bezug auf die y- und die z-Achse ergibt, muß sich im Gleichgewicht befinden mit den Komponenten des Kräftepaares M_b, d. i. mit

$$M_b\cos\beta \quad \text{bezw.} \quad M_b\sin\beta.$$

Folglich

$$M_b\cos\beta = \int \sigma\, df\,.\, z = \int \frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho} z\, df,$$

$$M_b\sin\beta = -\int \sigma\, df\,.\, y = -\int \frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho} y\, df.$$

Unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten α und unter Beachtung, daß OY und OZ die Hauptachsen des Querschnittes sind, für welche die Größe Z (Gleichung 2) verschwindet, ergibt sich

$$M_b\cos\beta = \frac{1}{\alpha\varrho}\Theta_1\cos\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{\cos\varphi}{\varrho} = \alpha\frac{M_b}{\Theta_1}\cos\beta,$$

$$M_b\sin\beta = \frac{1}{\alpha\varrho}\Theta_2\sin\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\varphi}{\varrho} = \alpha\frac{M_b}{\Theta_2}\sin\beta,$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\operatorname{tg}\beta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha M_b\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\Theta_1^2} + \frac{\sin^2\beta}{\Theta_2^2}}, \quad \ldots \quad 5)$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\frac{\eta}{\varrho} = M_b\,\eta\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\Theta_1^2} + \frac{\sin^2\beta}{\Theta_2^2}}, \quad \ldots \quad 6)$$

oder

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho} = M_b\left(\frac{z\cos\beta}{\Theta_1} - \frac{y\sin\beta}{\Theta_2}\right). \quad 7)$$

Die Gleichung 6 geht in die Gleichung 9, § 16, über, wenn

$$\beta = 0,$$

d. h. wenn die Paarachse mit einer der beiden Hauptachsen zusammenfällt, oder wenn

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta,$$

d. h. wenn die Hauptträgheitsmomente und damit alle Trägheitsmomente gleich sind, was beispielsweise zutrifft für den Kreis, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, überhaupt für alle regelmäßigen Vielecke, für den kreuzförmigen Querschnitt bei gleichen Abmessungen der Rippen u. s. f.

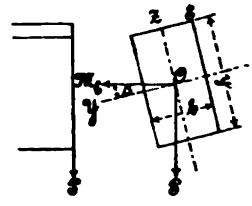


Fig. 3.

Für den besonderen Fall des Rechteckes, Fig. 3, folgt wegen

$$\Theta_1 = \frac{1}{12}\,b\,h^3 \qquad \Theta_2 = \frac{1}{12}\,b^3\,h$$

aus Gleichung 4

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \operatorname{tg}\beta.$$

Die größte Spannung σ_{max} wird auftreten im Punkte E, für welchen $z = 0{,}5\,h$, $y = -0{,}5\,b$

$$\sigma_{max} = \frac{6\,M_b}{b\,h}\left(\frac{\cos\beta}{h} + \frac{\sin\beta}{b}\right)$$

und mit Rücksicht auf § 20, Ziff. 5,

$$k_b \geqq \frac{6\,M_b}{b\,h}\left(\frac{\cos\beta}{h} + \frac{\sin\beta}{b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

3. Durchbiegung.

Die Durchbiegung eines Stabes, dessen Belastungsebene die Querschnitte nicht in einer der beiden Hauptachsen schneidet, pflegt nur insofern praktisches Interesse zu haben, als unter Umständen der Stab gehindert sein kann, sich in der Richtung zu bewegen, in welcher er sich durchbiegen will, wodurch Zusatzkräfte wachgerufen werden. Denken wir uns beispielsweise einen l langen Stab von dem in Fig. 4 gezeichneten Querschnitt an einem Ende

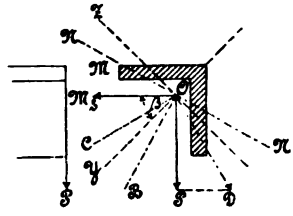


Fig. 4.

eingespannt und am anderen Ende mit P belastet, so ergibt sich für die senkrechte Belastungsebene OP die horizontale Paarachse $\overline{OM_b} = M_b = Pl$. Unter der Voraussetzung, daß der winkelförmige Querschnitt gleiche Schenkel besitzt, werden die beiden Hauptachsen OY und OZ unter 45° gegen den Horizont geneigt sein. Bezeichnet nun Θ_1 das Trägheitsmoment in bezug auf die eine Hauptachse OY und Θ_2 dasjenige hinsichtlich der zweiten Hauptachse OZ, so folgt die Lage der Nullachse NN nach Gleichung 4 unter Beachtung, daß $\beta = 45°$. Da die Krümmungsachse parallel zu NN läuft, so ergibt sich die Durchbiegungsrichtung in der zu NN senkrechten Geraden OB. Hiermit wird sich das eine Ende

des Stabes unter Einwirkung der vertikalen Belastung P in der Richtung OB durchbiegen.

Wenn nun zwei solche Stäbe miteinander verbunden sind, wie z. B. Fig. 5 erkennen läßt, so wird diese Durchbiegung infolge der Verbindung mehr oder minder vollständig gehindert, d. h. auf die beiden Stäbe wirkt noch je eine horizontale, nach innen gerichtete Kraft H, welche unter Umständen, namentlich dann, wenn

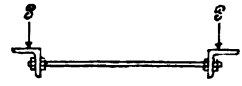


Fig. 5.

sie nicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht — und damit auch auf Verdrehung hinwirkt —, die Anstrengung des Materials wesentlich beeinflussen kann.

Unter der Annahme, daß die Abweichung der Träger in horizontaler Richtung durch ihre Verbindung vollständig gehindert wird, würde sich H aus der Erwägung ergeben, daß die Durchbiegungsrichtung mit OP zusammenfallen muß. Damit dies eintritt, müßte $\measuredangle\ YON = \varphi = 45^0$ sein, also nach Gleichung 4

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}.$$

Die hierdurch bestimmte Lage der Paarachse OC lieferte in der zu ihr Senkrechten OD die Richtung der Belastung (für vertikale Durchbiegung) und damit in $\overline{PD}$ die gesuchte Horizontalkraft H.

§ 22. Biegungsversuche.

1. Biegungsversuche im allgemeinen.

Biegungsversuche werden in der Regel nach Maßgabe der Fig. 1, § 18, angestellt, und zwar derart, daß die Belastung P in der Mitte des Stabes angreift. Mit der Genauigkeit, mit welcher das Eigengewicht desselben vernachlässigt werden darf, ergibt sich alsdann für den mittleren Querschnitt die Durchbiegung y' der Mittellinie des Stabes nach Gleichung 14, § 18, zu

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{P l^3}{\Theta}$$

und die Spannung σ_1 der um e_1 von der Nullachse abstehenden und am stärksten gespannten Fasern nach Gleichung 7, § 18, und Gleichung 10, § 16, zu

$$\sigma_1 = \frac{P l}{4\Theta} e_1,$$

unter den Voraussetzungen, welche zu diesen beiden Gleichungen führten: Ebenbleiben der Querschnitte und Unabhängigkeit des Dehnungskoeffizienten α von der Größe und dem Vorzeichen der Spannungen oder Dehnungen.

Durch Beobachtung der zu einer gewissen Belastung P gehörigen Durchbiegung y' läßt sich für einen bestimmten Stab der Dehnungskoeffizient

$$\alpha = 48 \frac{\Theta}{l^3} \frac{y'}{P}$$

oder auch dessen reziproker Wert (Elastizitätsmodul)

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{l^3}{48\Theta} \frac{P}{y'}$$

innerhalb des Spannungsgebietes, für welches α als unveränderlich angesehen werden kann, ermitteln.

Es ist bis vor nicht zu langer Zeit allgemein üblich gewesen, α bezw. $\frac{1}{\alpha}$ in dieser Weise zu bestimmen, gleichgültig, wie groß

die Höhe des Stabes im Verhältnis zur Entfernung der Auflage war. Ist sie verhältnismäßig bedeutend, so verliert die Gleichung 14, § 18, an Genauigkeit, da die Durchbiegung des Stabes nicht bloß von dem biegenden Moment, sondern auch von der Schubkraft abhängt. Die Vernachlässigung des Einflusses der Schubkraft liefert α zu groß und $\frac{1}{\alpha}$ zu klein. Wie Verfasser in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 222 u. f., erstmals nachgewiesen hat, beträgt der hierdurch begangene Fehler in Fällen stattgehabter Ermittlung des Wertes $\frac{1}{\alpha}$ über 30%.

Diese Außerachtlassung der Schubkraft vorzugsweise ist es gewesen, welche zu dem Irrtum Veranlassung gegeben hat, daß der Elastizitätsmodul, d. i. $\frac{1}{\alpha}$ für Biegung entschieden geringer sei als für Zug und Druck[1]). Die Erwägung des in § 20 unter 2 Erörterten führt übrigens ohne weiteres zu der Erkenntnis, daß genaue Biegungsversuche und strenge Rechnung α eher ein wenig kleiner, also $\frac{1}{\alpha}$ eher etwas größer als Zug- und Druckversuche liefern müssen.

Unter Umständen kann der nach Gleichung 14, § 18, ermittelte Wert von α noch durch einen anderen Einfluß ungenau geworden sein. Infolge der Durchbiegung gleitet die Staboberfläche auf den Auflagern; hierdurch werden Reibungskräfte wachgerufen, welche auf die Größe des biegenden Momentes je nach den Verhältnissen mehr oder minder abändernd einwirken. (Vergl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 224 u. f.)

Im vierten Abschnitt unter „Biegung und Schub“ (§ 52) sowie unter „Zug, Druck, Biegung“ (§ 46, Ziff. 1) wird auf den Einfluß der Schubkraft bezw. der zuletzt erwähnten Reibung näher einzugehen sein.

Die Beobachtung der Belastung P_{max}, bei welcher der Bruch des durchgebogenen Stabes erfolgt, führt mittelst der Gleichung

---

[1]) Hiernach ist auch die ältere Angabe zu beurteilen, daß der Elastizitätsmodul für Biegung um etwa ein Zehntel geringer als für Zug und Druck zu wählen sei.

$$K_b = \frac{P_{max}\, l}{4\,\Theta}\, e_1$$

zur Biegungsfestigkeit K_b, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt.

In Hinsicht auf diese Bestimmung der Biegungsfestigkeit sei nachstehendes zur Klarstellung hervorgehoben, wobei zähes und nicht zähes Material unterschieden werden soll.

a) Zähes Material, wie z. B. Flußeisen.

Der der Biegungsprobe unterworfene Körper, den wir uns der Einfachheit der Betrachtung wegen als Prisma mit rechteckigem Querschnitt vorstellen wollen, sei so belastet, daß die Spannung in der äußersten Faser gerade der Proportionalitätsgrenze entspricht. Dann erfolgt die Spannungsverteilung im Querschnitt nach Maßgabe der Fig. 1. Steigern wir die Belastung derart, daß in den äußersten Fasern die Streck- bezw. Quetschgrenze überschritten wird, so geben die außen gelegenen Fasern verhältnismäßig rasch nach[1]). Die nach innen gelegenen Fasern werden dagegen verhältnismäßig stark zur Übertragung des biegenden Momentes herangezogen: die Spannungsverteilung gestaltet sich etwa, wie in Fig. 2 dargestellt, gleiche Verhältnisse für Zug und Druck vorausgesetzt[2]). Sie weicht weit ab von denjenigen in Fig. 1, welche bei Entwicklung der oben angegebenen Gleichung

---

[1]) Vergl. die Dehnungslinien § 4, Fig. 10, 12, 13 u. s. w. (S. 44 bezw. 48 u. f.). Dieses Nachgeben erfolgt allerdings nicht ganz so rasch, als diese Linien schließen lassen, da die nach außen liegenden Fasern durch die benachbarten inneren, noch nicht über die Streck- und Quetschgrenze hinaus beanspruchten Fasern im Fließen eine gewisse Hinderung und damit eine gewisse Erhöhung der Widerstandsfähigkeit erfahren. Biegungsversuche mit Stäben, deren Material bei Zugversuchen Dehnungslinien wie in Fig. 10 oder 12 liefert, also sehr deutlich die Fließgrenze hervortreten läßt, ergeben keine derart ausgeprägte Streck- oder Quetschgrenze; es wird eben zunächst nur in der Mitte des Stabes und hier wieder nur in der äußersten Faserschicht die dieser Grenze entsprechende Spannung eintreten.

[2]) Es ist von Interesse zu beachten, daß, wie Versuche Bauschingers und des Verfassers nachweisen, die Querschnitte von Stäben aus zähem Stahl oder Schmiedeisen (Fluß- oder Schweißmaterial) selbst bei sehr weit getriebener Durchbiegung eben und senkrecht zur Mittellinie bleiben. Wenigstens läßt sich dies mit großer Annäherung aussprechen. Dieses Verhalten — bei einer Span-

für K_b vorausgesetzt wurde. Durch weitere Erhöhung der Belastung wird diese Abweichung noch gesteigert werden. In dem Maße, wie die Durchbiegung fortschreitet, also die gezogenen Fasern gedehnt, die gedrückten verkürzt werden, beginnt auch noch die Querzusammenziehung der ersteren und die Querdehnung der letzteren eine Änderung der Querschnittsform des Stabes im

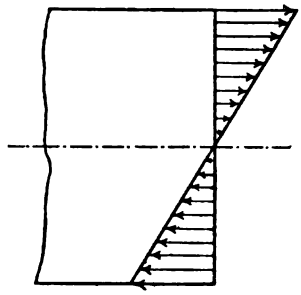


Fig. 1.

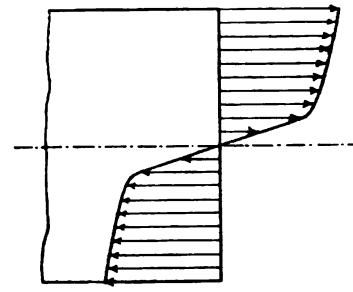


Fig. 2.

mittleren Teil herbeizuführen derart, daß sie trapezförmig wird: auf der Zugseite nimmt die Breite ab, auf der Druckseite wächst sie. Ein Bruch tritt meist überhaupt nicht ein, nur eine große Durchbiegung. Dabei erlangt die Belastung eine Höhe, welche bei der Beurteilung mittelst der Gleichung

$$K_b = \frac{P_{max}\, l}{4\,\Theta}\, e$$

zu Biegungsfestigkeiten führt, die nach den vorstehenden Darlegungen — der Versuch lehrt das gleiche — mehr oder minder weit über die Zugfestigkeit des gleichen Materials hinausgehen müssen.

Streng genommen, läuft dieses Verfahren darauf hinaus, daß man die Dehnungslinie bis zum Eintritt der größten Belastung

---

nungsverteilung, wie in Fig. 2 dargestellt — läßt vermuten, daß auch bei Materialien, bei welchen Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen überhaupt nicht besteht, Ebenbleiben der Querschnitte mit Annäherung wird vorausgesetzt werden dürfen, insoweit es sich um den Einfluß eines biegenden Momentes handelt.

als Gerade ansieht, also beispielsweise im Falle der Fig. 1, § 3, auf S. 9 (gültig für Flußeisen) die Kurve $OBCE$ als gerade Linie auffaßt.

b) Material, wie z. B. Gußeisen, Granit, Sandstein und dergl.

Biegungsversuche mit Körpern aus solchen Stoffen führen zum Bruch, infolgedessen hier die Beobachtung einer tatsächlichen Bruchbelastung möglich ist. Auch zeigen die Dehnungslinien dieser Materialien einen gleichmäßigeren, stetigeren Verlauf (§ 4, Fig. 8) als zähe Materialien wie Flußeisen (§ 4, Fig. 10, 12, 13 u. s. w.), bei denen an der Fließgrenze eine Stetigkeitsunterbrechung auftritt. Die Formänderung, welche der Stab bis zum Bruch erleidet, ist eine weit geringere.

Infolge dieser Umstände gestatten die Ergebnisse von Biegungs-Bruchversuchen mit Körpern aus solchen Materialien — trotz der Veränderlichkeit von α — in der einen oder anderen Hinsicht meist eher einen — wenn auch beschränkten — Schluß auf die Widerstandsfähigkeit eines Körpers innerhalb der üblichen Anstrengung als die Ergebnisse von Biegungs-Bruchversuchen mit zähen Körpern. (Vergl. die Spannungsverteilung § 20, Fig. 11, mit derjenigen in Fig. 2, hier.) Immerhin müssen solche Schlüsse auch hier mit großer Vorsicht und mit Rücksicht auf die wesentlichen Einfluß nehmenden Verhältnisse gezogen werden (vergl. S. 234, oben); es sei denn, daß man die Veränderlichkeit von α in der Rechnung oder zeichnerischen Ermittlung berücksichtigt (vergl. Fußbemerkung 2, S. 233 bis 235).

2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform.

Nach § 20, Ziff. 4, muß Gußeisen infolge der Veränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten gegenüber den Konstruktionsmaterialien, welche innerhalb gewisser Spannungsgrenzen konstante Dehnungskoeffizienten besitzen, ein abweichendes Verhalten bei Biegungsversuchen zeigen; namentlich muß trotz der vergleichs-

weise geringen Formänderungen, welche Gußeisen erfährt, die Biegungsfestigkeit K_b, berechnet auf Grund der Gleichung 10, § 16,

$$M_b = K_b \frac{\Theta}{e_1}$$

wesentlich größer sich ergeben als die Zugfestigkeit und in bedeutendem Maße abhängig sein von der Querschnittsform.

In diese Verhältnisse gewähren die vom Verfasser angestellten Versuche Einblick. Ausführlich ist hierüber berichtet in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 193 bis 199, S. 221 bis 226, S. 1089 bis 1094; 1889, S. 137 bis 145.

Die im folgenden je unter einer Bezeichnung aufgeführten Versuchskörper sind aus dem gleichem Material bei einem und demselben Gusse hergestellt worden.

Gußeisen A.

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

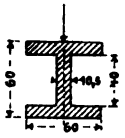
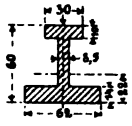
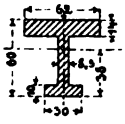
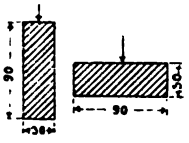
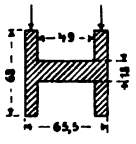
Zugversuche zur Ermittelung der Zugfestigkeit.

$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{1445 + 1355 + 1409 + 1377}{4} = 1396 \text{ kg/qcm}$$

$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{1369 + 1303 + 1355}{3} = 1342 \text{ -}$$

$$K_z = 1369 \text{ kg/qcm.}$$

47 Biegungsversuche zur Bestimmung der Biegungsfestigkeit.

No.	Querschnittsform	Biegungsfestigkeit $K_b = \frac{P_{max}\, l}{4\,\Theta}\, e_1$ absolut in kg/qcm	Biegungsfestigkeit in Teilen der Zugfestigkeit	$\frac{6}{5}\sqrt{\frac{e}{z_0}}$, bezw. $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{e}{z_0}}$	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6
1		1979	1,45	1,43	
2		2081	1,52	1,49	
3		2076	1,52	1,49	Es zerreißt die schmale Flansche, die breite bleibt unverletzt.
4		2395	1,75	1,70	
5		2372	1,73	1,70	
6		2905	2,12	2,05	
7		2929	2,14	2,06	
8		3218	2,35	2,31	

Die in der bezeichneten Weise ermittelte Biegungsfestigkeit überschreitet hiernach die für dasselbe Gußeisen ermittelte Zugfestigkeit um so bedeutender, je mehr sich das Material verhältnismäßig nach der Nullachse hin zusamendrängt. (Vergl. § 20, Ziff. 4.)

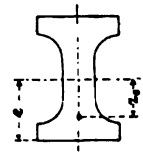


Fig. 8.

Die hiernach festgestellte Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit K_b von der Querschnittsform und der Zugfestigkeit K_z läßt sich mit guter Annäherung zum Ausdruck bringen durch die Beziehung

$$K_b = \mu_0 \sqrt{\frac{e}{z_0}} . K_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Hierin bedeutet

z_0 den Abstand des Schwerpunktes des auf der einen Seite der Schwerlinie (Nullachse) gelegenen Teiles der Querschnittsfläche von dieser Linie, Fig. 3,

μ_0 einen Koeffizienten, der im vorliegenden Falle (vergl. die Werte der Spalte 4 und 5, S. 249) gewählt werden darf

a) für diejenigen Querschnitte, welche oben und unten durch eine wagrechte Gerade begrenzt sind, wie No. 1, 2, 3, 4, 5 und 7, etwa $\frac{6}{5} = 1{,}2$,

b) für die beiden Querschnitte No. 6 und 8, welche oben und unten nicht durch wagrechte Gerade begrenzt sind, bei denen — streng genommen — nur eine einzige Faser am stärksten gespannt ist, etwa $\frac{4}{3} = 1{,}33$.

Über den Einfluß der Gußhaut auf μ_0 vergl. Ziff. 3, Schluß.

Gußeisen B_1 von hoher Festigkeit.

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

Querschnitt kreisförmig, 36 mm Durchmesser.

Zugfestigkeit = (1893 + 1847 + 1805 + 1846) : 4 = 1848 kg/qcm.

Biegungsfestigkeit = (4321 + 4148 + 4073 + 3930 + 4295 + 3903 + 4513 + 3920) : 8 = 4139 kg/qcm = 2,24 . Zugfestigkeit.

Gußeisen B_2 von hoher Festigkeit[1]).

Biegungsstäbe von 30 mm Quadratseite mit Gußhaut.
Zugstäbe von 20 mm Kreisdurchmesser bearbeitet.

Material 1.

Zugfestigkeit = (2535 + 2312 + 2334) : 3 = 2394 kg/qcm.

Biegungsfestigkeit = (4294 + 4347 + 4305) : 3 = 4315 kg/qcm = 1,80 . Zugfestigkeit[2]).

Arbeitsvermögen = (0,120 + 0,126 + 0,132) : 3 = 0,126 kgm/ccm.

Material 2.

Zugfestigkeit = (2379 + 2354 + 2261) : 3 = 2331 kg/qcm.

Biegungsfestigkeit = (4392 + 4442 + 4472) : 3 = 4435 kg/qcm = 1,90 . Zugfestigkeit[2]).

Arbeitsvermögen = (0,142 + 0,136 + 0,116) : 3 = 0,131 kgm/ccm.

Über die Abnahme der Zugfestigkeit dieses Gußeisens für Temperaturen bis 570° C. findet sich berichtet in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1900, S. 168 u. f. (Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 1, S. 61 u. f.)

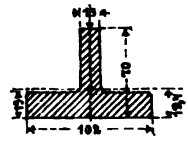
---

[1]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1900, S. 409 u. f. (Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Berlin, Heft 1, S. 49.)

[2]) Diese Verhältniszahlen 1,8 und 1,9 sind ganz erheblich größer, als sie sich für gewöhnliches Maschinen-Gußeisen ergeben (Quadratische Biegungsstäbe mit Gußhaut, kreisförmige Zugstäbe ohne Gußhaut).

Gußeisen C.

Zugstäbe bearbeitet, Biegungsstab unbearbeitet (also mit Gußhaut).



Zugfestigkeit	1310 kg/qcm,
Biegungsfestigkeit	2114 kg/qcm,
Verhältnis beider	2114 : 1310 = 1,61 : 1.

Gußeisen D.

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

a) Querschnitt: Fig. 6, § 17.

Die schmale Flansche ist die gezogene, die breite die gedrückte.

Beim Biegungsversuch reißt die schmale Flansche, die breite bleibt unverletzt.

Zugfestigkeit	1418 kg/qcm,
Biegungsfestigkeit	2077 kg/qcm,
Verhältnis beider	2077 : 1418 = 1,46 : 1.

b) Quadratischer Querschnitt:

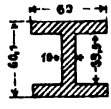
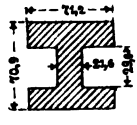
Biegungsfestigkeit	2539 kg/qcm,
Verhältnis	2539 : 1418 = 1,78 : 1.

3. Einfluß der Gußhaut.

Gußeisen E.

Zugstäbe (3 Stück) bearbeitet.
Biegungsstäbe (14 Stück), zum Teil bearbeitet (5 Stück), zum Teil unbearbeitet (9 Stück).

$$\text{Zugfestigkeit } K_z = \frac{1560 + 1586 + 1640}{3} = 1595 \text{ kg/qcm.}$$

No.	Querschnittsform	Biegungsfestigkeit $K_b = \frac{P_{max}\, l}{4\,\Theta}\, e_1$			
		Stäbe bearbeitet		Stäbe unbearbeitet	
		absolut in kg/qcm	in Teilen von K_z	absolut in kg/qcm	in Teilen von K_z
1	2	3	4	5	6
1		2765	1,73	—	—
2		—	—	2295	1,44
3		—	—	2390	1,50
4		2254	1,41	—	—
5		—	—	2026	1,27

Der Vergleich der Spalten 4 und 6 zeigt deutlich, daß die Biegungsfestigkeit der bearbeiteten, also von der Gußhaut befreiten Stäbe entschieden größer ist als diejenige der unbearbeiteten Stäbe. Das Vorhandensein der Guß-

haut wirkt demnach auf Verminderung der Biegungsfestigkeit hin.

Diese Erscheinung läßt sich erklären einmal durch den Einfluß etwa vorhandener Gußspannungen und zweitens dadurch, daß der Dehnungskoeffizient für das Gußhautmaterial geringer ist als derjenige für das weiter nach dem Innern des Stabes zu gelegene Gußeisen[1]). Für die letztere Erklärung spricht insbesondere die Beobachtung, daß die Durchbiegungen, namentlich die bleibenden, bei den bearbeiteten Stäben verhältnismäßig weit größer sind als bei den unbearbeiteten. Die geringere Nachgiebigkeit der an und für sich am stärksten beanspruchten äußeren Fasern hat zur Folge, daß die Festigkeit der inneren Fasern weniger ausgenützt wird[1]).

Die Größe des hiermit festgestellten Einflusses der Gußhaut auf die Biegungsfestigkeit hängt jedenfalls auch z. B. davon ab, ob die Gußstücke in frischem Sand oder in getrockneten Formen gegossen werden. Unter Umständen wird dieser Einfluß sehr bedeutend werden können[2]).

Demgemäß ergibt sich der Koeffizient μ_0 der Gleichung 1 für unbearbeitete Stäbe kleiner als für bearbeitete. Den Werten in Spalte 6 würde ein Wert μ_0 im Mittel reichlich 1 entsprechen, d. i. nahezu $^1/_6$ kleiner als für die bearbeiteten Stäbe.

4. Versuche zur Klarstellung des Zusammenhangs zwischen Zug- und Biegungsfestigkeit von Gußeisen und der Spannungsverteilung über den Querschnitt des gebogenen Stabes.

Zu diesen Versuchen wurden von Gußeisen bei dem gleichen Guß (aus derselben Pfanne), also aus dem gleichen Material, soweit sich dies überhaupt erreichen läßt, hergestellt:

---

[1]) Den vom Verfasser aus Biegungsversuchen in der Mitte der achtziger Jahre gezogenen Schluß, daß die Gußhaut einen kleineren Dehnungskoeffizienten besitze als das weiter nach dem Stabinnern gelegene Material, haben unmittelbare Zugversuche, über welche er in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 857 u. f. (Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 1, S. 1 u. f.) berichtet, bestätigt.

[2]) Hieraus folgt, daß nur bearbeitete Stäbe der Prüfung unterworfen werden sollten, falls man Zahlen erhalten will, welche unter sich mit Berechtigung verglichen werden können.

Zylinder von 90 mm Durchmesser und rund 950 mm Länge,
Quadratische Stäbe von 90 mm Seite - - 1100 - -

Durch Bearbeitung dieser Körper auf der Drehbank bezw. Hobelmaschine fand Überführung derselben in Zylinder von 80 mm Durchmesser bezw. in quadratische Stäbe von 80 mm Seitenlänge statt.

Von den Zylindern wurden sodann Stücke in der Länge von ungefähr 320 mm abgestochen und aus ihnen zu Zugversuchen je 4 Rundstäbe von 20 mm Durchmesser im mittleren Teile herausgearbeitet. Das jeweils verbleibende Zylinderstück von rund 620 mm Länge wurde zu Druckversuchen verwendet.

Die quadratischen Stäbe dienten den Biegungsuntersuchungen.

Die Belastung wurde von Stufe zu Stufe gesteigert und dabei — ohne Zurückgehen auf die erste Belastungsstufe — jeweils die gesamte Längenänderung bezw. Durchbiegung festgestellt.

Sowohl bei den Zug- als auch bei den Druck- und Biegungsversuchen wurden die Verlängerungen bezw. Zusammendrückungen und Durchbiegungen je nach 5 Minuten Belastungsdauer abgelesen.

Von den Ergebnissen seien die folgenden hier mitgeteilt.

a) Zugversuche.

Belastungsstufe in kg/qcm	Gesamte Verlängerungen in $^1/_{1000}$ cm auf 10 cm Länge	Unterschied der Verlängerungen
159,15 und 318,3	2,14	
		2,85
159,15 - 477,5	4,99	
		3,84
159,15 - 636,6	8,83	
		5,32
159,15 - 795,8	14,15	
		7,45
159,15 - 954,9	21,60	
		11,71
159,15 - 1114,1	33,31	
		22,27
159,15 - 1273,2	55,58	

Die Zugfestigkeit des Stabes ergab sich zu

$$K_z = 1315 \text{ kg/qcm},$$

diejenige von zwei anderen Stäben zu

1289 und 1273 kg/qcm.

b) Druckversuche.

Belastungsstufe in kg/qcm	Gesamte Zusammendrückungen in $^1/_{200}$ cm auf 29,0 cm	Unterschied der Zusammendrückungen
0,46 und 298,4	2,13	
0,46 - 596,8	4,63	2,50
0,46 - 895,2	7,20	2,57
0,46 - 1193,6	10,45	3,25
0,46 - 1531,9	14,54	4,09
0,46 - 1790,4	18,51	3,97
0,46 - 2088,8	24,10	5,59
0,46 - 2387,2	31,08	6,98
0,46 - 2685,6	41,20	10,12
0,46 - 2984,0	56,72	15,52

c) Biegungsversuche.

Stabbreite $b = 8{,}01$ cm, Stabhöhe $h = 8{,}005$ cm.
Entfernung der Auflager $l = 1000$ mm.
Belastung erfolgt in der Mitte durch die Kraft P.

Belastung P kg	$\frac{0{,}25\,P\,l}{\frac{1}{6}\,b\,h^2}$	Gesamte Durchbiegungen der Stabachse in der Mitte in mm	Unterschied der Durchbiegungen in mm
500	146,1	0	
1000	292,2	0,355	0,355
2000	584,4	1,227	0,872
3000	876,6	2,226	0,999
4000	1168,8	3,392	1,166
5000	1461,0	4,830	1,438
6000	1753,2	6,698	1,868
7000	2045,4	9,143	2,445

Der Bruch erfolgt bei $P = 7380$ kg. Die für Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen gültige Gleichung auf S. 245 würde liefern

$$K_b = \frac{25 \,.\, 7380}{\frac{1}{6} \,.\, 8{,}01 \,.\, 8{,}005^2} = 2157 \text{ kg/qcm.}$$

d) Prüfung des Zusammenhanges der Versuchsergebnisse.

Es liegt nahe, die Prüfung in der Art auszuführen, daß auf die Entwicklungen S. 227 u. f. zurückgegriffen und ermittelt wird:

aus den Zugversuchen α_1 und m_1
- - Druckversuchen α_2 - m_2
- Gl. 11 (S. 232) mit $\sigma_1 = 1315$ kg/qcm die Lage der Nullachse,
- Gl. 12 (S. 232) die Größe des biegenden Momentes, welches mit $\sigma_1 = 1315$ kg/qcm den Bruch herbeiführen würde.

Dieses Moment wäre sodann mit dem tatsächlichen Bruchmoment

$$\frac{P\,l}{4} = \frac{100}{4} \,.\, 7380 = 184\,500 \text{ kg} \,.\, \text{cm}$$

zu vergleichen.

Die Beschreitung dieses Weges führt zunächst zu der Erkenntnis, daß das Potenzgesetz $\varepsilon = \alpha\,\sigma^m$ für die gesamten Dehnungen bis zum Bruch den tatsächlichen Verlauf der Dehnungslinie weder bei Zug noch bei Druck zutreffend genug zum Ausdruck bringt. In Fig. 4 sind auf Grund der unter a und b angegebenen Versuchsergebnisse zu den Spannungen als wagrechte Abszissen die jeweils erhaltenen Dehnungen als senkrechte Ordinaten aufgetragen und dadurch die ausgezogenen Kurven erhalten worden: $0Z_1Z$ gilt für Zug und OE_1ED für Druck.

Der Linienzug, wie ihn das Potenzgesetz mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{24\,956\,000\,000}, \qquad m_1 = 2{,}623,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{20\,000\,000}, \qquad m_2 = 1{,}491$$

liefert, ist strich-punktiert eingetragen. Man erkennt deutlich, daß, wenn auch die Werte von $\alpha_1 m_1$ bezw. $\alpha_2 m_2$ anders als geschehen

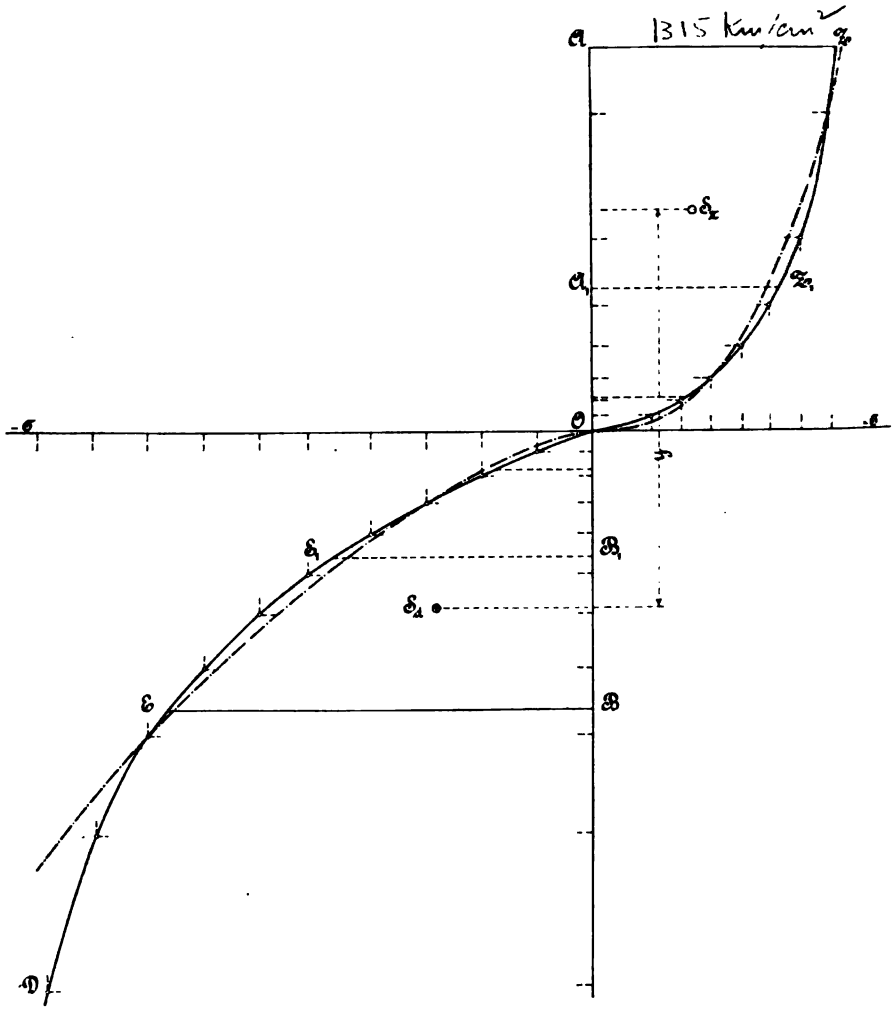


Fig. 4.

gewählt werden, bedeutende Abweichungen der beiden Linienzüge bestehen bleiben.

Unter diesen Umständen verzichten wir auf die Benutzung des Potenzgesetzes sowie auf die Heranziehung einer anderen Funktion und verfahren in einer anderen, schon von W. Schüle

angedeuteten Weise. Die in Fig. 4 ausgezogene Kurve OZ_1Z liefert für $\sigma_z = 1315$ kg/qcm $= \overline{AZ}$ in der Ordinate $\overline{OA}$ die zugehörige Dehnung. Unter der Voraussetzung, daß der Stabquerschnitt bei der Biegung eben bleibt[1]), ergibt die Linie OZ_1Z die Verteilung der Zugspannungen von der durch O gehenden Nullachse bis zu der am stärksten gespannten Faser in A. Die Größe der Fläche OAZ bildet unter Berücksichtigung der Breite des rechteckigen Querschnittes das Maß für die Summe der inneren Kräfte auf der Zugseite. Da nun diese Summe, welche mit N bezeichnet sei, gleich sein muß der Summe der inneren Kräfte auf der Druckseite (Gl. 6, S. 229), so ist auf letzterer eine Fläche $OBE =$ Fläche OAZ abzugrenzen, was sich mittelst des Polarplanimeters ziemlich rasch ausführen läßt. $\overline{BE}$ ist alsdann die größte Spannung, welche auf der Druckseite eintritt, wenn die größte Spannung auf der Zugseite $\overline{AZ} = 1315$ kg/qcm beträgt. Die zeichnerische Darstellung liefert die größte Druckspannung $\overline{BE} =$ 2270 kg/qcm, d. i. um $100\,\frac{2270 - 1315}{1315} = 73\,\%$ größer als die größte Zugspannung.

Die Nullachse ist in dem rechteckigen Querschnitt von der Höhe $\overline{AOB}$ so gelegen, daß die Abstände von außen

$$e_1 = \overline{OA} \qquad \text{und} \qquad e_2 = \overline{OB}$$

betragen. Dies gibt, da der für die Dehnungen — zunächst ohne Rücksicht auf die Höhe des Stabquerschnittes — gewählte Maßstab in der ursprünglichen Zeichnung Fig. 4 zur Strecke $\overline{OA}$ $= 20{,}3$ cm und zur Strecke $OB = 14{,}7$ cm, also zu $\overline{AB} = 20{,}3 + 14{,}7 = 35{,}0$ cm geführt hat, bei der Querschnittshöhe $h = 8{,}005$ cm

$$e_1 = 20{,}3\,\frac{8{,}005}{35{,}0} = 4{,}64 \text{ cm},$$

$$e_2 = 14{,}7\,\frac{8{,}005}{35{,}0} = 3{,}36 \text{ cm}.$$

Die Nullachse liegt somit im Augenblick des Bruches um 0,64 cm, d. i. um 8 % der Querschnittshöhe aus der Mitte nach der Druckseite hin.

[1]) Vergl. Fußbemerkung 2, S. 245 und 246.

Sind S_z und S_d die Schwerpunkte der beiden Flächen OAZ bezw. OBE, so findet sich zunächst in der Strecke y der Abstand, in welchem die beiden resultierenden Innenkräfte N wirkend anzunehmen sind, und damit das Moment der inneren Kräfte gleich Ny.

Aus der Zeichnung entnehmen wir unter Berücksichtigung, daß die Stabbreite 8,01 cm beträgt,

$$N = 37\,160 \text{ kg} \qquad y = 21{,}0\,\frac{8{,}005}{35{,}0} = 4{,}8 \text{ cm},$$

folglich

$$Ny = 37\,160 \,.\, 4{,}8 = 178\,368 \text{ kg} \,.\, \text{cm}.$$

Das Moment der äußeren Kräfte, welches zum Bruche führte, betrug — wie oben ermittelt — 184 500 kg . cm. Somit findet sich der Unterschied zwischen diesem Bruchmoment und dem Moment der inneren Kräfte, wie es in vorstehendem festgestellt worden ist, zu

$$100\,\frac{184\,500 - 178\,368}{184\,500} = 3{,}3\,\%.$$

Dieser Unterschied hält sich nicht bloß innerhalb der Grenzen der Abweichungen, welche in solchen Fällen zu erwarten sind, sondern er muß sogar als recht klein bezeichnet werden. Hiernach erscheint die Spannungsverteilung im Querschnitt des gebogenen gußeisernen Stabes im Augenblick des Bruches und damit auch der Zusammenhang zwischen der Biegungsfestigkeit und der Zugfestigkeit klargestellt. Man erkennt, daß in dem gebogenen Stabe wesentlich höhere Zugspannungen nicht auftreten, als sie der unmittelbare Zugversuch liefert.

Für ein unterhalb des Bruchmomentes liegendes Biegungsmoment, etwa für ein solches, das $\sigma_z = \overline{A_1 Z_1}$ liefert, welchem Werte dann gemäß der Gleichgewichtsbedingung, daß Fläche OA_1Z_1 = Fläche OB_1E_1 sein muß, die Druckspannung $\sigma_d = \overline{E_1 B_1}$ entspricht, verschiebt sich wegen des flacheren Verlaufs der Drucklinie OE_1E gegenüber demjenigen der Zuglinie OZ_1Z die Nullachse nach der Mitte hin, für noch kleinere Momente kann sie aus der Mitte des rechteckigen Querschnittes nach der Zugseite hin gelegen sein[1]).

[1]) Diese Feststellung gibt nicht nur eine weitgehende Aufklärung über die Anstrengung von auf Biegung beanspruchten Körpern, deren Material stark ver-

Beispielsweise findet sich

$$\text{für } \sigma_z = 1000 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_d = 1388 \text{ kg/qcm}, \qquad e_1 = 4{,}27 \text{ cm}, \qquad e_2 = 3{,}73 \text{ cm},$$

somit die Nullachse um 0,27 cm, d. i. 3,4 % der Höhe aus der Mitte nach der Druckseite gelegen,

$$\text{für } \sigma_z = 500 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_d = 525 \text{ kg/qcm}, \qquad e_1 = 3{,}77 \text{ cm}, \qquad e_2 = 4{,}23 \text{ cm},$$

somit die Nullachse um 0,23 cm, d. i. 2,9 % der Höhe aus der Mitte nach der Zugseite gelegen.

Um für kleine Momente, welche auch nur geringe Spannungen (Dehnungen) geben, die Lage der Nullachse auf dem zeichnerischen Wege ausreichend genau feststellen zu können, müssen bei den Zug- und Druckversuchen die Dehnungen und Zusammendrückungen für geringere Spannungen mit entsprechend niedrigeren Belastungsstufen ermittelt und muß für die Dehnungen ein größerer Maßstab gewählt werden, als dies im Falle der Fig. 4 geschehen ist, mit welcher nur die Aufgabe zu lösen war, die Verhältnisse für den Bruch zu untersuchen.

Zur weiteren Klarstellung sind Versuche mit verschiedenen Gußeisensorten, mit Steinen, Beton u. s. w. durchzuführen; ebenso wird der Einfluß zu ermitteln sein, den Wechsel der Belastungen (Spannungen) äußert.

änderlichen Dehnungskoeffizienten besitzt, wie Gußeisen, Sandstein, Beton u. s. w., sondern sie beleuchtet auch die Mitteilungen, welche in neuerer Zeit hinsichtlich der Lage der Nullachse bei Biegungsbalken aus solchen Stoffen gemacht worden sind. Je nach der verhältnismäßigen Größe des biegenden Momentes konnte man die Nullachse in der Stabachse oder auch mehr oder minder weit außerhalb gelegen ermitteln, ohne damit der eigentlichen Erkenntnis der Spannungsverteilung über den Querschnitt näher zu kommen. Über diese gibt Fig. 4, S. 258, vollen Aufschluß.

Herr G. Tiraspolsky, Professor in Tomsk, welcher 1901/1902 in dem Laboratorium des Verfassers tätig war, hat auf dessen Anregung die weitere Verfolgung dieses Verfahrens aufgenommen und eine dahingehende Arbeit veröffentlicht, zufolge der er bei Gußeisen Abweichungen um 4,3 % und 3,3 % (gegen 3,3 % oben) ermittelte.

IV. Knickung.

§ 28. Wesen der Knickung.

Es sei AB, Fig. 1, ein prismatischer Stab von großer Länge und geringen Querschnittsabmessungen, belastet durch die Kraft P. Wenn nun die Voraussetzungen,

1. daß die Kraft P genau mit der Stabachse zusammenfällt,
2. daß diese tatsächlich eine gerade Linie bildet, daß das Material des Stabes durchaus gleichartig ist und an allen Stellen in dem gleichen Zustande sich befindet,
3. daß seitliche Kräfte auf den Stab nicht einwirken, daß derselbe überhaupt Einflüssen, welche solche hervorrufen würden, nicht unterworfen ist,

zuträfen, so würde der Stab nach § 11 nur eine Zusammendrückung in Richtung der Achse und senkrecht dazu eine Querschnittsvergrößerung erfahren. Eine Veranlassung, mit dem freien Ende seitlich auszuweichen, läge dann nicht vor.

In Wirklichkeit sind die genannten Voraussetzungen, namentlich diejenigen unter Ziff. 1 und 2, genau überhaupt nicht zu erfüllen und angenähert um so weniger leicht, je größer die Länge des Stabes im Verhältnis zu seinen Querschnittsabmessungen ist. Infolgedessen zeigt die Erfahrung, daß ein solcher Stab mit seinem freien Ende auszuweichen bestrebt ist, daß er eine Biegung erleidet. Um uns über das, was hierbei eintritt, ein richtiges Bild zu verschaffen, führen wir folgende Versuche durch.

a) Wir nehmen einen sorgfältig gerade gerichteten Stahldraht von 3,5 mm Durchmesser, spannen denselben möglichst genau senkrecht in den Schraubstock so ein, daß er eine freie Länge von $l = 850$ mm besitzt, Fig. 2. Hierauf belasten wir ihn in Richtung seiner Achse mit $P = P_1 = 0{,}4$ kg. Sobald Draht und Belastung sich selbst überlassen werden, beginnt das freie Ende des ersteren auszuweichen, bis er bei $y' =$ rund 25 mm zur Ruhe gelangt. In dieser Lage befindet sich das biegende Moment Py' (sofern von dem Einfluß des Eigengewichtes des Drahtes abgesehen wird) im

Gleichgewicht mit den durch dasselbe im Innern des Stabes wachgerufenen Elastizitätskräften. Die wiederholte Zurückführung des ausgewichenen Drahtes in die senkrechte Lage erwidert derselbe durch erneute Ausbiegung um y'. Wird das freie Ende des Stabes mit der Hand noch etwas weiter, d. h. um mehr als y' ausgebogen und alsdann sich selbst überlassen, so kehrt er in die Lage $y' = 25$ mm zurück. Der Gleichgewichtszustand ist demnach ein stabiler.

Die Belastung $P_1 = 0{,}4$ kg wird entfernt und durch $P = P_2 = 1{,}1$ kg ersetzt. Sobald der Drahtstab mit der Belastung sich

Fig. 1.

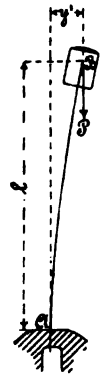


Fig. 2.

Fig. 3.

selbst überlassen bleibt, beginnt das freie Ende auszuweichen, der Draht biegt sich fortgesetzt, bis das belastende Gewicht die Werkbank, an welcher der Schraubstock befestigt ist, erreicht hat, Fig. 3.

Die Biegung ist naturgemäß an der Einspannstelle am stärksten. Der Stab ist hierbei nicht gebrochen. Nach der Entlastung verschwindet ein ziemlich bedeutender Teil der erlittenen Formänderung wieder; namentlich erlangt die nach dem freien Ende hin gelegene Strecke die Geradlinigkeit wieder.

b) Ein schlanker Holzstab von quadratischem Querschnitt, Seitenlänge 7,5 mm, wird möglichst genau senkrecht in den Schraubstock gespannt, alsdann am freien Ende mit $P = P_1 = 1{,}1$ kg belastet, wobei $l = 850$ mm. Das freie Ende beginnt auszuweichen und gelangt schließlich bei $y' =$ rund 150 mm zur Ruhe.

Die Belastung $P_1 = 1{,}1$ kg wird entfernt und durch $P = P_2 = 1{,}3$ kg ersetzt. Der hierauf sich selbst überlassene Stab beginnt mit dem freien Ende auszuweichen, auch nach wiederholter Zurückführung in die senkrechte Lage, und biegt sich, bis er bei y' etwa gleich 550 mm bricht.

Die Erscheinungen, welche die beiden Stäbe bei der Belastung mit $P = P_2$ zeigen, werden unter dem Namen Knickung des Stabes zusammengefaßt: im ersten Falle tritt eine Biegung ein, welche — abgesehen von der Möglichkeit, daß es sich um eine Feder handelt — mit dem Zwecke des Stabes, ein widerstandsfähiger Konstruktionsteil zu sein, unvereinbar ist; im zweiten Falle erfolgt ein Bruch, der gleichfalls unzulässig erscheint.

Aus den Versuchen a und b erkennen wir folgendes.

Bei der Belastung P_1 weicht der Stab nur um y' aus und gelangt zur Ruhe. Wird das freie Ende des Stabes mit der Hand noch etwas weiter ausgebogen und sich dann selbst überlassen, so kehrt der Stab in diese Lage zurück. In derselben herrscht demnach stabiles Gleichgewicht zwischen dem biegenden Moment, welches die auf den Stab wirkenden äußeren Kräfte, d. h. die Schwerkräfte der Belastung und der eigenen Masse, liefern, und den hierdurch im Innern des Stabes wachgerufenen Elastizitätskräften. Bei der Belastung P_2 dagegen besteht überhaupt ein Gleichgewichtszustand nicht, der Stab biegt sich aus, bis die Belastung zum Aufruhen gelangt, also zum Teil aufgehoben wird (Versuch a), beziehungsweise bis sie zum Bruche führt (Versuch b). In beiden Fällen muß es hiernach eine zwischen P_1 und P_2 gelegene Belastung $P = P_0$ geben, für die der stabile Gleichgewichtszustand, welcher bei $P = P_1$ noch zu beobachten war, gerade aufhört, zu bestehen.

Diese Kraft P_0 wird als Knickbelastung bezeichnet.

§ 24. Knickbelastung.

(Eulersche Gleichung.)

Für den Stab Fig. 1 bezeichne

P die in der Richtung der ursprünglich geraden Stabachse wirkende Kraft,

P_0 die Knickbelastung, d. h. diejenige Größe von P, welche die Knickung herbeizuführen imstande ist,

Θ das der Biegung gegenüber in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes (in der Regel das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente),
l die Länge des Stabes,
α den Dehnungskoeffizienten.

In bezug auf den durch den Abstand x bestimmten Querschnitt ist, da die zu x gehörige Ordinate der elastischen Linie y beträgt, das biegende Moment, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneide,

$$M_b = P(a + y' - y)$$

und damit unter der Voraussetzung, welche in § 16 zu Gleichung 14 führt, nach Gleichung 15 daselbst

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\Theta}(a + y' - y).$$

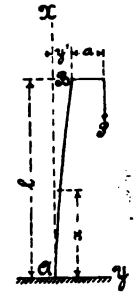


Fig. 1.

Wird gesetzt

$$\frac{\alpha P}{\Theta} = n^2 \qquad a + y' - y = -z,$$

so folgt

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = -n^2 z.$$

Dieser Gleichung entspricht unter Voraussetzung, daß α und Θ konstant sind, das Integral

$$z = C_1 \sin(n\,x) + C_2 \cos(n\,x)$$

oder

$$y - a - y' = C_1 \sin(n\,x) + C_2 \cos(n\,x),$$

sofern die beiden Integrationskonstanten mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Dieselben sind bestimmt dadurch, daß für den Punkt A, also für $x = 0$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h.

$$C_2 = -a - y' \qquad C_1 = 0.$$

Hiermit folgt

$$y = (a + y')\,[1 - \cos(n\,x)] \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Für $x = l$ wird $y = y'$, also

$$y' = (a + y')\,[1 - \cos(n\,l)]$$

$$y' = a\,\frac{1 - \cos(n\,l)}{\cos(n\,l)} = a\left[\frac{1}{\cos(n\,l)} - 1\right]$$

$$= a\left[\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha\,P}{\Theta}}\right)} - 1\right], \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

und damit findet sich die Gleichung der elastischen Linie

$$y = a\,\frac{1 - \cos(n\,x)}{\cos(n\,l)} = a\,\frac{1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{\alpha\,P}{\Theta}}\right)}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha\,P}{\Theta}}\right)} \quad \ldots \quad 3)$$

Denken wir beispielsweise die Gleichung 2 angewendet auf einen schmiedeisernen Stab von 100 cm Länge und 1 cm Durchmesser, so findet sich mit

$$\alpha = \frac{1}{2\,000\,000} \qquad \Theta = \frac{\pi}{64}\,d^4 = \sim\frac{1}{20}\,d^4 = \frac{1}{20} \qquad l = 100$$

$$y' = a\left[\frac{1}{\cos 100\sqrt{\frac{20\,P}{2\,000\,000}}} - 1\right] = a\left[\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{P}{10}}} - 1\right].$$

Für den Hebelarm a wollen wir uns einen kleinen Betrag vorstellen, etwa daher kommend, daß der Stab schon ursprünglich nicht genau gerade war und daß P nicht genau durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht.

Es ergibt sich

$$\text{für } P = 5 \text{ kg} \qquad y' = a\left(\frac{1}{\cos\ 0{,}707} - 1\right) = 0{,}32\,a,$$

für $P = 10$ kg $\quad y' = a\left(\frac{1}{\cos 1} - 1\right) = 0{,}85\,a,$

für $P = 15$ kg $\quad y' = a\left(\frac{1}{\cos 1{,}225} - 1\right) = 1{,}95\,a,$

für $P = 20$ kg $\quad y' = a\left(\frac{1}{\cos 1{,}4142} - 1\right) = 5{,}54\,a,$

für $P = 22{,}5$ kg $\quad y' = a\left(\frac{1}{\cos 1{,}5} - 1\right) = 13{,}16\,a.$

Wir erkennen, daß y' anfangs langsam, dann aber außerordentlich rasch mit P wächst; für $P = 24{,}674$ kg wird sogar

$$y' = a\left(\frac{1}{\cos 1{,}5708} - 1\right) = a\left(\frac{1}{0} - 1\right) = a \cdot \infty = \infty.$$

Wie klein also auch a sein mag — sofern es nur nicht Null ist —, für $P = 24{,}674$ kg liefert die Rechnung $y' = \infty$. Dieses Ergebnis ist natürlich nicht so aufzufassen, daß die Ausbiegung des Stabes, der eine endliche Länge besitzt, tatsächlich unendlich sich ergibt, sondern es wird damit nur ausgesprochen: erreicht P den Wert 24,674 kg, so wird bei der geringsten Abweichung der Belastung von der Stabachse oder bei nicht vollkommener Geradlinigkeit derselben oder bei nicht vollständiger Gleichartigkeit des Stabmaterials oder endlich bei der geringsten seitlichen Einwirkung auf den Stab dieser umknicken, das Gleichgewicht zwischen der äußeren Kraft P und den inneren Elastizitätskräften wird aufhören, zu bestehen. Dabei ist P selbstverständlich nur mit derjenigen Genauigkeit bestimmt, welche den Voraussetzungen der Rechnung entspricht[1]).

Dieser Wert von P kann demnach als diejenige Kraft bezeichnet werden, welche imstande ist, die Knickung herbeizuführen, und welche sie auch herbeiführen wird, da die Voraussetzungen unter Ziff. 1 und 2 in § 23 nicht streng erfüllbar sind, und deshalb stets ein biegendes Moment vorhanden sein muß.

Diese Kraft ist die Knickbelastung P_0.

---

[1]) Eine strengere Entwicklung gibt Schneider in der Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1901, S. 633 u. f.

Allgemein läßt sich dieselbe aus der Gleichung 2 durch die Erwägung bestimmen, daß

$$P = P_0 \quad \text{für} \quad y' = a \,.\, \infty,$$

d. h.

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\Theta}}\right) = 0$$

$$l\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\Theta}} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

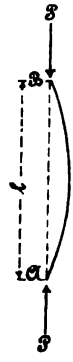


Fig. 2.

Fig. 3.

Für den Fall der Fig. 2, nach Maßgabe welcher der Stab gezwungen ist, mit seinen sonst beweglichen Enden A und B in der ursprünglich geraden Stabachse zu bleiben, verhält sich jede der beiden Stabhälften genau so wie der ganze Stab in Fig. 1. Demnach ergibt sich für die Kraft, durch welche hier die Knickung erfolgen wird, mittelst Einführung von 0,5 l in die Gleichung 4 an Stelle von l

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{(0{,}5\,l)^2} = \pi^2\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{l^2}\,^1), \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

---

[1]) Eine einfache, elementare Ableitung dieser Gleichung gibt R. Land in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1896, S. 99 u. f. In anderer, auf die Vorgänge bei der Knickungsbeanspruchung eingehender Weise behandelt W. Schüle diese Aufgabe, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 779.

d. i. ein viermal so großer Wert wie für den Stab mit freiem Ende.

Die Beziehung 5 wird nach ihrem Urheber als die Eulersche Gleichung bezeichnet.

Wenn der Stab, Fig. 3, an beiden Enden A und B so eingeklemmt ist, daß bei etwaiger Ausbiegung die Gerade AB Tangente in den Punkten A und B der elastichen Linie bleibt — was übrigens in Wirklichkeit nur sehr selten zutreffen wird (vergl. § 53) —, so liegen in den Mitten C und E der Stabstrecken AD und BD Wendepunkte. Die hierdurch entstehenden Endstücke AC und BE verhalten sich wie der ganze Stab im Falle der Fig. 1 ($a = 0$ gesetzt), während das Mittelstück CDE dem Stabe in Fig. 2 entspricht. Diese Erwägung ergibt für die beiden Endstücke je von der Länge $\frac{l}{4}$ nach Gleichung 4

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2},$$

für das Mittelstück, dessen Länge $\frac{l}{2}$, nach Gleichung 5

$$P_0 = \pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2}.$$

Folglich gilt für den ganzen Stab, Fig. 3,

$$P_0 = 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Hiernach verhalten sich die Knickbelastungen für die Stäbe Fig. 1, 2 und 3 unter sonst gleichen Verhältnissen wie

$$\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} : \pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} : 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} = 1:4:16.$$

Die drei Gleichungen 4 bis 6 lassen sich zusammenfassen in die eine

$$P_0 = \omega\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi^2}{4} \text{ für die Befestigungsweise Fig. 1} \\ \omega &= \pi^2 \text{ für diejenige Fig. 2 und} \\ \omega &= 4\,\pi^2 \text{ für diejenige Fig. 3.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 8)$$

§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung.

Als zulässige Gesamtbelastung P der in § 24 besprochenen Stäbe wird der $\mathfrak{S}$-te Teil von P_0 genommen, d. h.

$$P = \frac{P_0}{\mathfrak{S}}.$$

Insbesondere

$$\left.\begin{aligned} &\text{für Stab Fig. 1, § 24,} \quad P = \frac{\pi^2}{4\,\mathfrak{S}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}, \\ &\text{- - - 2, -} \quad P = \frac{\pi^2}{\mathfrak{S}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}, \\ &\text{- - - 3, -} \quad P = \frac{4\,\pi^2}{\mathfrak{S}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 1)$$

oder allgemein

$$P = \frac{\omega}{\mathfrak{S}} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

worin ω einen von der Befestigungsweise der Stabenden abhängigen Koeffizienten, den Befestigungskoeffizienten, bedeutet, dessen Größe für bestimmte Fälle am Schlusse von § 24 angegeben ist. Hinsichtlich $\omega = 4\,\pi^2$ sei nochmals darauf hingewiesen, daß es nur äußerst selten der Wirklichkeit entsprechen wird, den Stab als beiderseits eingespannt anzusehen (vergl. § 53).

Die Benützung der Gleichungen 1 oder 2 bei Feststellung der Querschnittsabmessungen einer Stütze kommt nach Maßgabe des Erörterten darauf hinaus, diese so zu wählen, daß erst durch das $\mathfrak{S}$-fache der wirkenden Kraft P die Knickung herbeigeführt wird. Mehr ist hierdurch zunächst nicht erreicht. Insbesondere erscheint es unzutreffend, bei Verwendung dieser Gleichungen zu schließen, daß erst durch das $\mathfrak{S}$-fache der Kraft P die Möglichkeit einer

Biegung eintreten würde. Die beiden, in § 23 unter a und b angegebenen Versuche zeigen deutlich eine ganz bedeutende Ausbiegung bei $P = P_1 < P_0$. Die tägliche Erfahrung lehrt ebenfalls, daß Ausbiegung von schlanken Stäben schon bei verhältnismäßig sehr geringer Belastung eintritt. (Vergl. auch die in § 27 unter Ziff. 1 am Schlusse von a gemachten Angaben.) Aus der Unmöglichkeit, die in § 23 unter Ziff. 1 und 2 angegebenen Voraussetzungen genau zu erfüllen, was darauf hinauskommt, daß die Größe a in Gleichung 2, § 24, größer als Null ist, erklärt sich diese Erscheinung ohne weiteres.

Will man das Eintreten solcher weit unterhalb der Knickungsgefahr liegenden Ausbiegungen nach Möglichkeit verhindern, so wird das unter sonst gleichen Verhältnissen um so erfolgreicher geschehen, je größer man $\mathfrak{S}$ in die Gleichungen 1 oder 2 einführt.

Bei gewissen stangenartigen Maschinenteilen wechseln Zug und Druck, so daß die Stange zunächst auf Zug, hierauf auf Knickung beansprucht ist u. s. f. Folgen nun — wie häufig der Fall — Zug und Druck so rasch aufeinander, daß von einer Ausbildung der Formänderung, wie sie die Entwicklung der Gleichungen voraussetzt, nicht die Rede sein kann, so wird ein geringerer Wert von $\mathfrak{S}$ genügen, als wenn der genannte Vorgang langsamer vor sich geht[1]).

Ferner kommt in Betracht, daß in den meisten Fällen selbst der Anordnung Fig. 2, § 24, schon infolge der Reibung in den Gelenken bei A und B ein (wenn auch nicht bedeutendes) Biegungsmoment vorhanden zu sein pflegt. Bei nicht senkrechter Lage der Stange tritt noch hinzu der auf Biegung wirkende Einfluß des Eigengewichts und im Falle ungleichförmiger Bewegung noch derjenige des Trägheitsvermögens. Nicht selten wird der Wärmezustand des Stabes ein einseitig verschiedener sein, welcher Umstand für eiserne Stützen Bedeutung erlangen kann. Auch diesen Einflüssen, wenn sie sich innerhalb gewisser Grenzen halten, wird in der Regel bei Wahl von $\mathfrak{S}$ Rechnung getragen.

Unter diesen Verhältnissen ist es natürlich ausgeschlossen, daß für $\mathfrak{S}$ ein bestimmter Wert angegeben werden kann; es werden vielmehr jeweils die besonderen Umstände in Erwägung zu

---

[1]) Vergl. z. B. des Verfassers Maschinenelemente, 1. Aufl. (1881), S. 311, oder 2. Aufl. (1891/92), S. 493, 9. Aufl. (1903), S. 719 und 720.

ziehen sein. Hierzu gehört insbesondere auch die Befestigung der Enden der gedrückten Stange. Eine Säule mit großer und kräftiger Fuß- und Kopfplatte wird sich anders verhalten als eine sonst gleiche Säule mit kleinen Endplatten. Die erstere Säule erscheint in höherem Maße als an den Enden eingespannt wie die letztere und insofern tragfähiger; dagegen wird die belastende Kraft um so mehr von der Achse der Säule abweichen, d. h. die Säule voraussichtlich mit einem um so größeren Hebelarm belasten können, je größer die Kopf- und die Fußplatte sind (vergl. auch Fig. 1 und Fig. 2, § 27). Bei Bleiunterlage wird sich die gleiche Säule leichter nach Fig. 2, § 24, krümmen können, als wenn sie mit Zement untergossen worden ist, der vor der Einwirkung der Belastung genügend erhärtet, u. s. w. Streng genommen, wäre allerdings diesen Umständen bei Feststellung des Befestigungskoeffizienten ω Rechnung zu tragen; doch kommt es, da P proportional dem Quotienten $\omega : \mathfrak{S}$, tatsächlich auf dasselbe hinaus, wenn ω, wie es für Stützen, deren Enden seitlich nicht ausweichen können, zu geschehen pflegt, mit n^2 eingeführt und $\mathfrak{S}$ entsprechend kleiner gewählt wird, falls man nicht, durch Erwägungen besonderer Art veranlaßt, vorzieht, statt der ganzen Säulenlänge einen Bruchteil derselben in Rechnung zu stellen. (Vergl. Schluß von § 27.)

Für Säulen von Gußeisen darf, ganz abgesehen von der selbstverständlichen Rücksichtnahme auf die Herstellungsweise (liegend oder stehend gegossen), nicht außer Acht bleiben, daß α, welches bei der Entwicklung in § 24 als konstant vorausgesetzt wurde, tatsächlich veränderlich ist, und zwar zunimmt mit wachsender Spannung oder Dehnung (vergl. § 20, Ziff. 4) sowie überdies für die Gußhaut weniger beträgt als für das im Innern gelegene Material (vergl. § 22, Ziff. 3).

Schließlich wird auch dem Umstand Beachtung geschenkt werden müssen, daß in der Regel schon frühzeitig, d. h. unter verhältnismäßig geringer Belastung, bleibende Formänderungen eintreten (vergl. § 4), weshalb die Durchbiegung des auf Knickung beanspruchten Stabes größer sich ergeben muß, als es der Dehnungskoeffizient der Federung α erwarten läßt, und infolgedessen der einmal durchgebogene Stab sich so verhält, als ob der Hebelarm a (Fig. 1) von vornherein um die bleibende Durchbiegung größer gewesen wäre.

Unter allen Umständen muß bei einem Stabe, welcher auf Knickung berechnet wird, die in § 12 aufgestellte Forderung bei einfacher Druckbeanspruchung

$$P \leqq kf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

befriedigt sein.

§ 26. Naviersche (Schwarzsche) Knickungsformel.

Die in den §§ 24 und 25 erörterte Grundgleichung zur Berechnung eines Stabes, welcher der Gefahr des Knickens ausgesetzt ist, hat bis auf unsere Tage in den Kreisen der Techniker des Hochbau- und Bauingenieurwesens vielfach Bemängelung erfahren, deren Wurzel namentlich in dem Umstande zu suchen sein dürfte, daß in ihr nicht die Spannung auftritt, welche man sich gewöhnt hat, als Maßstab der Sicherheit einer Konstruktion aufzufassen, und von der man deshalb bei Feststellung der Abmessungen immer auszugehen pflegt[1]).

---

[1]) Im Maschineningenieurwesen war nichts oder verhältnismäßig nur wenig von einer solchen Bemängelung zu bemerken, und zwar aus verschiedenen Gründen.

Zunächst hat der Gleichgewichtszustand, wie er im Augenblicke des Beginnes der Knickung vorhanden ist, für den Maschineningenieur nichts Fremdes. Es ist demselben geläufig, daß schon die Herstellung eines längeren schlanken Körpers mit tatsächlich gerader Achse und vollständiger Gleichartigkeit des Materials trotz größter Sorgfalt nicht zu erzielen ist, und daß infolgedessen, ganz abgesehen davon, mit welcher Genauigkeit es möglich erscheint, die Achsialkraft P in die vermeintlich gerade Stabachse fallen zu lassen, bei Belastung durch P eine mit dieser Kraft wachsende Durchbiegung eintreten muß. (Lange Druckstangen, wie sie z. B. bei vertikalen Balanciermaschinen auftreten, sind deshalb auch bei genau senkrechter Lage niemals durchbiegungsfrei zu erhalten, die Erzitterungen lassen sich bei wechselnder Belastung nicht ganz beseitigen.) Daß bis zu einer gewissen Größe von P das mit dieser Kraft und dem Eigengewicht verknüpfte biegende Moment von den inneren Elastizitätskräften des Stabes im Gleichgewicht gehalten wird, und daß bei Überschreitung der bezeichneten Grenze dieses Gleichgewicht aufhört, und der Stab sich umbiegt oder zerbricht, erscheint dann ganz natürlich. Durch Steigerung der Belastung wird der Stab auf einfachstem Wege aus dem Zustand des stabilen Gleichgewichts in den des labilen übergeführt. An den letzteren muß sich dann schon infolge des Einflusses der Zeit auf die Ausbildung der Formänderungen der Vorgang des Knickens anschließen.

Ferner zeigten die Ergebnisse von Knickungsversuchen keine Übereinstimmung mit dem, was die Eulersche Gleichung

---

Das Verhalten des unter äußerem Überdruck stehenden Flammrohres eines Dampfkessels, Fig. 1, ist ein ganz entsprechendes. Erfährt die Pressung der Flüssigkeit, welche das Rohr umgibt, eine Steigerung, so wird das letztere schließlich eingedrückt oder zusammengedrückt. Eine eigentliche Zerstörung des Materials tritt hierbei häufig nicht ein. Die Größe der Pressung, welche das Ein- oder Zusammendrücken herbeiführt, hängt in erster Linie mit ab von der Vollkommenheit der Kreisform des Rohrquerschnittes. In ganz gleicher Lage befinden sich nicht wenige Gefäße und Rohrleitungen der Industrie, welche der Regel nach oder auch nur ausnahmsweise äußerem Überdruck Widerstand zu leisten haben.

In solchen Fällen sind eben die Abmessungen so zu wählen, daß unzulässige Formänderungen ferngehalten werden. Allgemein von einer zulässigen Spannung auszugehen, erscheint dann unzutreffend. Die üblichen Sicherheitskoeffizienten $\mathfrak{S}$ haben, wie oben (§ 25) bereits erörtert, hierbei den allgemeinen Rücksichten und den besonderen Umständen des gerade vorliegenden Falles Rechnung zu tragen.

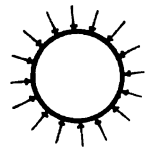


Fig. 1.

Im Maschinenbau ist auch in anderen Fällen als bei Knickbeanspruchung von einer höchstens zulässigen Formänderung auszugehen, selbstverständlich unter Festhaltung der Forderung, daß die Anstrengung des Materials in keinem Punkte den höchstens für zulässig erachteten Wert überschreitet. Bei stark belasteten Wellen u. s. w. gestattet man nur eine bestimmte Durchbiegung oder eine gewisse Abweichung der Richtung der elastischen Linie von der ursprünglich geraden Stabachse an bestimmten Stellen; in anderen Fällen wird von einer höchstens zulässigen Verdrehung ausgegangen. Die zulässigen Belastungen unserer Treibriemen u. s. w. bezwecken, die Dehnungen innerhalb gewisser Grenzen zu halten u. s. f. Andererseits werden Federn u. dergl. so konstruiert, daß mit Sicherheit auf eine gewisse Formänderung gerechnet werden darf. (Vergl. des Verfassers Maschinenelemente 1881, Vorwort S. IV, S. 35, 37, 202, 279, 317 u. s. f. oder 1891/92, Vorwort S. IV, VIII, S. 61, 64, 232, 317, 318, 323 u. f., S. 427 u. f., S. 498, 504, 540 u. s. w.)

Die oben erwähnten Bemängelungen der Eulerschen Gleichung in den Kreisen des Baufachs haben von H. Zimmermann im Zentralblatt der Bauverwaltung 1886, S. 217 u. f. eine klare und eingehende Beleuchtung erfahren.

$$P_0 = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$$

lieferte[1]).

Auf diesem Boden war die von Navier herrührende Knickungsformel

$$P = f \frac{k}{1 + \varkappa \frac{f l^2}{\Theta}} = f \frac{k}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \ldots \quad 1)$$

entstanden[2]).

Hierin bedeutet

P die zulässige Gesamtbelastung des Stabes,

k die zulässige Druckanstrengung des Materials,

---

[1]) Man übersah hierbei, daß, während die Entwicklung dieser Gleichung freie Beweglichkeit der Stabenden voraussetzt (Fig. 2, § 24), bei den Versuchen diese freie Beweglichkeit nicht vorhanden war. Hätte man in der Erwägung, daß die vollständige Aufhebung dieser Beweglichkeit, d. i. die Einspannung des Stabes, dazu führt, in Gleichung 5, § 24, an Stelle der Länge l nur deren Hälfte einzusetzen, in jedem einzelnen Fall zu ermitteln gesucht, welcher Bruchteil von l oder welcher Wert von ω in Gleichung 7, § 24 (Gleichung 2, § 25) den Befestigungsverhältnissen der Stabenden ungefähr entsprochen haben würde, das Ergebnis würde ein anderes gewesen sein.

Auch der Einfluß der Veränderlichkeit des Dehnungkoeffizienten des Gußeisens, derjenige der Gußhaut und etwaiger Gußspannungen durften bei der Beurteilung der Versuchsergebnisse, welche gußeiserne Stützen lieferten, nicht übersehen werden (vergl. § 20, Ziff. 4 und § 22).

Die Versuche von Bauschinger und v. Tetmajer (§ 27) liefern den Nachweis, daß der Wert

$$P_0 = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$$

der Knickbelastung bei freier Beweglichkeit der Stabenden entspricht.

[2]) Rühlmann stellt in seinem Werk: Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, Leipzig 1885, S. 364 und 365 fest, daß diese Gleichung, welche auch als Gordon- und Rankinesche Formel bezeichnet wird, von Navier zuerst entwickelt wurde, daß später 1854 Schwarz sie in anderer Weise ableitete u. s. f.

Sie hat, wenn es sich darum handelt, ihre Richtigkeit durch die Ergebnisse von Knickungsversuchen zu prüfen, den Vorteil, zwei Koeffizienten k und $\varkappa$ zu besitzen, durch deren Wahl leichter eine Anschmiegung der Versuchsergebnisse erreicht werden kann, als wenn nur ein Koeffizient vorhanden ist.

Die Eulersche Gleichung 5, § 24, ist in dieser Hinsicht allerdings weniger gut daran.

f den Querschnitt des Stabes,
l dessen Länge,
Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes,
r den Trägheitshalbmesser derart, daß $\Theta = f r^2$,
$\varkappa$ eine Erfahrungszahl, den sogenannten Zerknickungskoeffizienten.

Die von Navier dem Wesen nach gegebene Begründung erhellt aus dem Folgenden.

Der in Fig. 2 gezeichnete Stab ist im mittleren Querschnitt durch das Moment $P a$, dessen Ebene den letzteren senkrecht zu derjenigen Hauptachse schneidet, für welche Θ gilt, auf Biegung und durch die Kraft P auf Druck in Anspruch genommen; infolgedessen erfährt die im Abstande e von der Nullachse gelegene Faserschicht eine Pressung

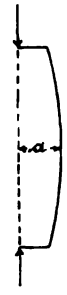


Fig. 2.

$$k = \frac{P}{f} + \frac{P a}{\Theta} e,$$

woraus

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{a e f}{\Theta}} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

In dieser Gleichung tritt die Unbekannte a auf, deren Zweck nach § 23 und 24 darin zu bestehen hat, die Möglichkeit des exzentrischen Angreifens der Kraft P bei auf Knickung in Anspruch genommenen Stäben sowie die Ungleichartigkeit des Materials, die etwaige Verschiedenartigkeit des Wärmezustandes u. s. w. und den Umstand zu berücksichtigen, daß die Stabachse keine genau geradlinige ist. Um diese — offenbar außerhalb des Rahmens der wissenschaftlichen Elastizitäts- und Festigkeitslehre liegende — Größe nicht willkürlich wählen zu müssen, worin überhaupt die hauptsächlichste Schwierigkeit bei der Berechnung eines auf Knickung beanspruchten Stabes liegt, hat Navier folgender Erwägung stattgegeben.

Durch das Moment $P a$ (allein) tritt in den um e von der Nullachse abstehenden Fasern die Spannung

$$\sigma = \frac{P a}{\Theta} e$$

auf. Zu dieser Spannung oder Pressung gehört die Dehnung oder Zusammendrückung

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma.$$

Hiermit wird aus der vorigen Gleichung

$$P = \varepsilon\frac{\Theta}{\alpha\,a\,e}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

und durch Gleichsetzung dieses Wertes mit der rechten Seite von Gleichung 5, § 24,

$$P = \varepsilon\frac{\Theta}{\alpha\,a\,e} = \pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2},$$

woraus folgt

$$a = \varepsilon\frac{l^2}{\pi^2\,e}.$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung 2 findet sich

$$P = f\frac{k}{1+\frac{\varepsilon}{\pi^2}\frac{f\,l^2}{\Theta}}.$$

Mit

$$\frac{\varepsilon}{\pi^2} = \varkappa$$

ergibt sich

$$P = f\frac{k}{1+\varkappa\frac{f\,l^2}{\Theta}} = f\frac{k}{1+\varkappa\left(\frac{l}{r}\right)^2}. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

wie oben.

Richtiger erscheint es, die Gleichung 3 nicht mit Gleichung 5, § 24, sondern mit Gleichung 2, § 25, in Verbindung zu setzen, so daß

$$P = \varepsilon\frac{\Theta}{\alpha\,a\,e} = \frac{\omega}{\mathfrak{S}}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2},$$

woraus dann mit

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{E}}{\omega}\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

ebenfalls folgen würde

$$P = f\frac{k}{1+\varkappa\frac{fl^2}{\Theta}} = f\frac{k}{1+\varkappa\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Hiernach bedeutet der Koeffizient $\varkappa$ das $\frac{\mathfrak{E}}{\omega}$fache derjenigen Dehnung (Zusammendrückung), welche im maßgebenden Faserabstande e vorhanden ist, insoweit dieselbe von dem biegenden Momente allein herrührt.

Die Einführung von $\varkappa$ als einem Erfahrungskoeffizienten heißt demnach nichts anderes als die Festsetzung eines bestimmten Wertes für die Dehnung, insoweit diese durch das vorhandene biegende Moment hervorgerufen wird. Ob es leichter ist, $\varkappa = \frac{\mathfrak{E}}{\omega}\varepsilon$ anzunehmen oder a unter Beachtung der besonderen Verhältnisse schätzungsweise zu wählen, mag hier dahingestellt bleiben.

Soll nun $\varkappa$ — wie unter dem Vorbehalt, die etwaige Veränderlichkeit des Befestigungskoeffizienten besonders zu berücksichtigen, angegeben wird — eine vom Material abhängige Konstante sein, so wird damit festgesetzt, daß diese Dehnung (oder die ihr entsprechende Kantenspannung), soweit sie von der Biegung herrührt, für ein bestimmtes Material konstant anzunehmen ist, also beispielsweise unter sonst gleichen Verhältnissen unabhängig davon, ob es sich um eine Stütze von 10 m Höhe oder um eine solche von 3 m Höhe handelt.

Greifen wir auf die Gründe zurück, welche überhaupt dazu veranlaßten, die Größe a einzuführen, so finden wir, daß diese Größe folgenden Umständen Rechnung tragen sollte:

a) die Achse ist bei längeren Stäben keine gerade Linie,
b) das Material ist nicht vollkommen gleichartig, sein Zustand nicht an allen Stellen der gleiche,
c) die Kraft P fällt nicht genau mit der Stabachse zusammen.

Naturgemäß wachsen die Abweichungen unter a und b vom normalen Zustande mit der absoluten Länge der Stütze verhältnis-

mäßig rasch, so daß nicht Unveränderlichkeit, sondern Abnahme der für das biegende Moment zugelassenen Kantendehnung oder Kantenspannung angezeigt erscheint. Knickungsversuche werden den Nachweis erbringen müssen, daß $\varkappa$ nicht konstant sein kann, sondern mit l zunehmen muß, und zwar bedeutend, wenn schlanke hohe Stützen in das Bereich der Prüfung gezogen werden[1]).

Eine scharfe Betrachtung des Zweckes, zu dem überhaupt die Gleichung 1 dienen soll, sowie dessen, was von dem Zerknickungskoeffizienten $\varkappa$ verlangt wird, führt zu der Erkenntnis, daß $\varkappa$ — selbst bei dem gleichen Werte von ω — nicht bloß Materialkonstante sein kann, sondern in der Hand eines rationell arbeitenden Konstrukteurs — falls derselbe die Gleichung 1 überhaupt benutzt — eine von verschiedenen Umständen zum Teil sehr stark beeinflußte Größe sein muß. (Vergl. das in § 25 über $\mathfrak{S}$ Bemerkte.)

Laissle & Schübler setzen (S. 71 ihres Werkes „Der Bau der Brückenträger", 4. Auflage, 1876) für an den Enden drehbare Stäbe (Fig. 2, § 24)

$\varkappa = 0{,}0001$ für Schmiedeisen (zutreffendenfalls auch für weichen Stahl),
$\varkappa = 0{,}0003$ für Gußeisen,
$\varkappa = 0{,}0002$ für Holz.

---

[1]) Tatsächlich glaubte man, diesen Einfluß der Stützenhöhe bereits voll bei der Entwicklung der Gleichung 1 berücksichtigt zu haben.

Laissle & Schübler (Bau der Brückenträger, 4. Auflage, 1876, S. 70), welche wohl am meisten zur Verbreitung der Navierschen Knickungsformel beigetragen haben dürften, ausgehend von der Gleichung 2

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{a e f}{\Theta}},$$

setzen in der Erwägung, daß a „für ein und dasselbe Material mit zunehmender Länge sich sehr vergrößern, dagegen bei zunehmenden Querschnittsdimensionen abnehmen wird",

$$a = \varkappa \frac{l^2}{e},$$

„worin $\varkappa$ ein durch die Erfahrung für jedes Material festzustellender Koeffizient ist", und erhalten damit

$$P = f \frac{k}{1 + \varkappa \frac{f l^2}{\Theta}}.$$

Es entspricht dies, wenn $\omega = \pi^2 = \sim 10$ genommen wird,

$$\varepsilon = \frac{0{,}001}{\mathfrak{S}},$$

bezw. $$\frac{0{,}003}{\mathfrak{S}},$$

bezw. $$\frac{0{,}002}{\mathfrak{S}}.$$

Scharowski gibt in seinem Musterbuch für die Säulen der Eisenkonstruktionen

	k_z (§ 6)	k (§ 12)	$\varkappa$
bei Schmiedeisen	1000 kg/qcm	1000 kg/qcm	0,0001,
bei Gußeisen	250 -	500 -	0,0002.

Wenn bei gußeisernen Säulen $\varkappa f l^2 : \Theta > 3$, so wählt Scharowski

$$P = \frac{250 f}{-1 + \varkappa \frac{f l^2}{\Theta}}.$$

Hierbei ist freie Beweglichkeit der Säulenenden nicht vorhanden, andererseits kann aber auch nicht Einspannung derselben angenommen werden.

Möller — Über die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionsteile bei erhöhter Temperatur, von M. Möller und R. Lühmann, vom Vereine zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen mit einem Preise gekrönte Arbeit. Berlin 1888. Abdruck aus den Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfleißes 1887 (siehe daselbst S. 603 u. f.) — empfiehlt für gußeiserne und schmiedeiserne Säulen, welche im Falle eines Brandes dem Feuer ausgesetzt sein können, zu nehmen

$k = 1000$ bis 1200 kg/qcm $\quad \varkappa = 0{,}0004$, d. i. $\varepsilon = \frac{0{,}0004}{\mathfrak{S}} \omega$.

Krohn entwickelt im Zentralblatt der Bauverwaltung 1885, S. 400 bis 401, für an den Enden bewegliche Säulen die Beziehung

$$\varkappa = \frac{1}{8}\,\alpha\, k,$$

worin α den Dehnungskoeffizienten bedeutet.

Dies würde beispielsweise geben

für Schmiedeisen mit $\frac{1}{\alpha} = 2\,000\,000, \quad k = 800$

$$\varkappa = 0{,}00005,$$

für Gußeisen mit $\frac{1}{\alpha} = 900\,000, \quad k = 800$

$$\varkappa = 0{,}00011.$$

Über die Größe $\varkappa$ vergleiche auch § 27.

§ 27. Knickungsversuche.

1. Versuche von Bauschinger.

(Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. technischen Hochschule in München, Heft 15, München 1887.)

Von der großen Anzahl von Versuchen mit Stützen aus ⊢⊣-, ⊔⊓-, ⊥⊤-, ⌊⌋-Eisen greifen wir diejenigen heraus, welche sich auf Stäbe mit Querschnitten beziehen, die zwei Symmetrieachsen besitzen.

Material: Walzeisen. Querschnittsform: ⊢⊣.

a) Die Enden der Versuchsstäbe sind in Spitzen, also frei beweglich gelagert, Fig. 2, § 24.

No.	Querschnitt			Trägheitsmoment Θ	Länge l	Knickbelastung		Belastung auf 1qcm $\sigma = P_0' : f$	Abweichung $\frac{P_0' - P_0}{P_0'} 100$
	Breite	Höhe	Inhalt f			beobachtet P_0'	berechnet $P_0 = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$		
	cm	cm	qcm	cm^4	cm	kg	kg	kg	%
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25,2	13,8	63,55	575,6	405,5	70 500	69 000	1105	+ 2
2	12,4	7,2	20,7	37,99	89	61 000	94 500	3035	s. u.
3	—	—	18,22	—	151	30 250	33 000	1662	— 9
4	—	—	18,22	—	223	17 250	15 000	948	+ 13
5	9,93	4,92	11,16	11,7	156,1	10 650	9 500	956	+ 11
6	—	—	11,38	—	270	4 100	3 200	360	+ 22
7	—	—	11,76	—	465	1 300	1 100	111	+ 15
8	9,99	5,01	10,58	12,2	254,3	3 900	3 700	369	+ 5
9	9,98	5,01	10,58	12,2	254,3	4 000	3 700	378	+ 8
10	9,95	5,00	10,55	12,2	254,4	3 900	3 700	370	+ 5
11	10,00	5,00	10,56	12,2	254,4	4 050	3 700	384	+ 9
12	9,96	4,99	10,55	12,2	254,3	3 900	3 700	370	+ 5

Bis auf den Versuch No. 2, welcher bei der Belastung von 3035 kg/qcm (Spalte 9) schon infolge der Anforderungen der einfachen Druckfestigkeit hier auszuscheiden hat (vergl. Schlußbemerkung zu § 25), also nicht in Betracht kommt, sind die Abweichungen zwischen den beobachteten Knickbelastungen P_0' (Spalte 7) und den mit $\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}$ berechneten Werten P_0 (Spalte 8) durchschnittlich nicht so groß, daß das in der Gleichung

$$P_0 = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$$

ausgesprochene Gesetz als unzutreffend erschiene, namentlich wenn noch berücksichtigt wird, daß die Querschnittsform, welche hier vorliegt, gegenüber Knickung sich nicht ganz so sicher verhalten dürfte, wie dies die Entwicklung voraussetzt.

Hiernach ist in den Ergebnissen der vorstehenden Versuche eine Bestätigung des in Frage stehenden Gesetzes zu erblicken.

Zum Zwecke der Klarstellung, daß die Ausbiegungen schon bei verhältnismäßig sehr geringen Belastungen beginnen, sei ein Teil der auf den Versuchsstab No. 12 bezüglichen Ermittelungen angeführt.

Belastung P kg	$P:f$ kg/qcm	Ausbiegung der Mitte mm
0	0	0,00
200	19	0,00
400	38	0,04
600	57	0,11
800	76	0,20
1000	95	0,34
2000	190	1,25
3000	284	3,88
3200	303	5,08
3400	322	6,86
3600	341	9,92
3800	360	17,14

b) Die Versuchsstäbe liegen mit ihren ebenen Stirnseiten an den festen Druckplatten.

Hier gestalten sich die Vorgänge bei der Biegung weniger einfach als unter a. Zu der Schwierigkeit, den Stab so einzuspannen, daß die Richtung der Druckkraft mit der Stabachse zusammenfällt, tritt die weitere hinzu, ein gleichmäßiges Anlegen der Stirnflächen an die Druckplatten herbeizuführen und zu sichern. Die Erfüllung der letzteren Bedingung mußte sich naturgemäß als unmöglich erweisen. Sobald der Stab seine Ausbiegung — etwa nach A, Fig. 1, hin — begonnen, hat er das Bestreben, sich bei

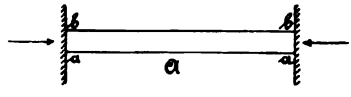


Fig. 1.

bb von den Druckplatten zu lösen. Damit aber muß dann eine Änderung der Verteilung des Druckes über die Stirnflächen eintreten: die Pressung wird hier von der Stabmitte aus gerechnet

nach a hin wachsen, nach b hin abnehmen. Tatsächlich beobachtete Bauschinger, daß sich am Schlusse des Versuches die Stirnflächen bis auf die bei a zusammengedrückten Kanten von den Druckplatten lösten, Fig. 2.

Bei dieser Sachlage erscheint es nicht wahrscheinlich, daß es möglich sein werde, für Stäbe, welche mit ihren ebenen Stirnflächen

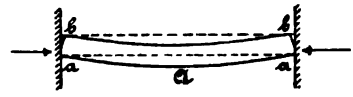


Fig. 2.

an festen Druckplatten anliegen, den Vorgang rechnerisch genau zu verfolgen. Bauschinger hat deshalb zum Zwecke der weiteren Betrachtung seiner Versuchsergebnisse die Naviersche Gleichung 1, § 26, herangezogen, derart, daß in

$$P_0 = f \frac{K}{1 + \varkappa \frac{f l^2}{\Theta}}$$

unter K die Druckfestigkeit verstanden und hierfür 4500 kg/qcm eingeführt wird. Dann findet sich

a) für die in Spitzen gelagerten Stäbe $\varkappa$ schwankend zwischen 0,00009 und 0,000614,

b) für die Stäbe mit flachen Enden $\varkappa$ schwankend zwischen 0,000041 und 0,00031,

d. i. überaus veränderlich.

Werden K und $\varkappa$ aus den Versuchsergebnissen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so ergibt sich

a) $K = 2270$ kg/qcm $\varkappa = 0{,}000058$,

b) $K = 3100$ - $\varkappa = 0{,}000029$.

Die für K gefundenen Werte bestätigen die Richtigkeit der Schlußbemerkung des § 11. Die Fließ- oder Quetschgrenze war von Bauschinger für das untersuchte Eisen als schwankend zwischen 2150 und 3690 kg/qcm festgestellt worden.

Ferner weisen die Ergebnisse darauf hin, daß die aus Knickungsversuchen bestimmten Werte $\varkappa$ ebenfalls mit einem Sicherheitskoeffizienten multipliziert in die Richtung einzuführen sind, ganz wie das bei K geschieht, wie es auch oben bei der Entwicklung, welche die Gleichung 4, § 26, ergab, vorgenommen worden ist.

Die mit $K = 2270$ und $\varkappa = 0{,}000058$ berechneten Werte P_0 für die Stäbe mit beweglichen Enden stimmen mit den beobachteten Werten nicht gerade gut überein; besser ist dies der Fall bei den mit $K = 3100$ und $\varkappa = 0{,}000029$ ermittelten Werten P_0 für die Stäbe mit flachen Enden.

Auf Grund der Bauschingerschen Versuche kann geschlossen werden:

a) für Stäbe mit drehbaren Enden ist die Eulersche Gleichung 5, § 24, zutreffend, sofern die Beziehung 3, § 25, befriedigt erscheint,

b) für Stäbe mit ebenen, an festen Druckplatten anliegenden Stirnflächen bietet die Naviersche Knickungsformel 1, § 26, brauchbare Werte.

2. Versuche von v. Tetmajer[1]).

Schweizerische Bauzeitung 1887, Bd. X, S. 93 u. f.
- - 1888, Bd. XI, S. 110 u. f.

a) Versuche mit Schweiß- und Flußeisen in Rundstäben bis 5 cm Stärke.
(30 Stäbe Schweiß- und 30 Stäbe Flußeisen bearbeitet.)
Einspannung der Versuchsstangen zwischen Spitzen.

v. Tetmajer fand:

1. Übereinstimmung der beobachteten Knickbelastungen mit denjenigen, welche sich auf Grund der Eulerschen Gleichung berechnen ließen.

---

[1]) Hinsichtlich der Ergebnisse der neuern Versuche v. Tetmajers sei auf dessen Arbeit: „Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre", 1905, verwiesen.

2. Veränderlichkeit des Zerknickungskoeffizienten $\varkappa$, falls die Gleichung 1, § 26, von Navier zu Grunde gelegt wird;

es müßte dann sein

$$\varkappa = 0{,}0001 \sqrt{0{,}00867 \frac{l}{r} - 0{,}6936}$$

in

$$\frac{P_0}{f} = \frac{2650}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Flußeisen (2650 Fließgrenze),}$$

$$\frac{P_0}{f} = \frac{2350}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Schweißeisen (2350 Fließgrenze).}$$

b) Versuche mit Bauhölzern.

	Dehnungskoeffizient	Druckfestigkeit	Bemerkungen
Lärche und Föhre im Durchschnitt . . .	$\frac{1}{104230}$	318 kg/qcm	astfreies Holz
Rot- und Weißtanne .		285 -	astiges - .

v. Tetmajer stellte zunächst für die zwischen Spitzen gelagerten Stäbe fest:

1. das gleiche wie unter a, Ziff. 1, genügend große Länge der Stäbe vorausgesetzt,
2. die starke Veränderlichkeit von $\varkappa$, falls die Naviersche Gleichung in Betracht gezogen wird:

$$\varkappa = 0{,}0001 \sqrt{0{,}05 \frac{l}{r} - 0{,}80}$$

in

$$\frac{P_0}{f} = \frac{318}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Lärche und Föhre,}$$

$$\frac{P_0}{f} = \frac{285}{1 + \varkappa\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$ für Rot- und Weißtanne.

Für die mit ebenen Stirnflächen an festen Druckplatten anliegenden Hölzer beobachtete v. Tetmajer den Abstand der Wendepunkte von einander zwischen 0,5 l_0 und 0,6 l_0, sofern l_0 die Entfernung der beiden Druckplatten ist. Er empfiehlt, um sicher zu rechnen, in den soeben gegebenen Gleichungen 0,6 l_0 für l einzuführen, im übrigen jedoch nichts zu ändern.

Was in § 26 aus der Natur von $\varkappa$ zu schließen war, nämlich Wachstum dieses Koeffizienten mit zunehmendem Verhältnisse $l : r$, bestätigen die von v. Tetmajer sowohl für Holz als auch für Eisen erlangten Versuchsergebnisse.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

Einleitung.

§ 28. Schiebung.

Die im vorhergehenden (§ 1 bis § 27) betrachteten Änderungen der Form waren Änderungen der Länge (vergl. die §§ 1, 6, 11 u. s. f.). Damit sind die auftretenden Formänderungen jedoch noch nicht erschöpft, wie aus folgender Betrachtung erhellt.

Wir denken uns in dem von äußeren Kräften noch nicht ergriffenen Körper, welcher der Betrachtung unterworfen werden soll, einen kleinen Vierflächner (Fig. 1). Begrenzt von den drei in den Kanten OA, OB, und OC sich rechtwinklig schneidenden Ebenen AOB, BOC, COA und der weiteren Ebene ABC, erscheint derselbe bestimmt durch die drei Kantenlängen OA, OB und OC sowie durch die Kantenwinkel, welche die Ebenen der körperlichen Ecke miteinander bilden, nämlich

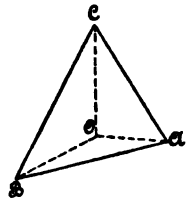


Fig. 1.

$\measuredangle\ BOC$ (an der Kante OA),
$\measuredangle\ COA$ (- - - OB),
$\measuredangle\ AOB$ (- - - OC).

Wenn nun jetzt auf den Körper äußere Kräfte, die sich an ihm das Gleichgewicht halten mögen, einwirken, so erleidet er in allen seinen Teilen Formänderungen. Hierbei werden auch die den Vierflächner bestimmenden Größen sich ändern: die Kanten werden eine Änderung ihrer Länge, die Kantenwinkel eine Änderung ihrer Größe erfahren.

Die Möglichkeit, daß die Ebenen *AOB*, *BOC*, *COA* und *ABC* in gekrümmte Flächen übergehen können, darf unter der Voraussetzung, daß der Vierflächner unendlich klein gedacht wird, unberücksichtigt bleiben, weil ein unendlich kleines Flächenelement — solche liegen dann in den vier Begrenzungsflächen vor — immer als eben angesehen werden kann, und weil die Änderungen der Lage der vier Flächenelemente bereits durch die Änderungen der Kanten und der Winkel bestimmt sind.

Hiernach treten zu den im früheren allein betrachteten Änderungen der Länge noch Winkeländerungen hinzu.

Zur Klarstellung des Wesens dieser Änderungen denken wir uns einen Würfel *OADBCGFE* (Fig. 2) von einer nach *OA* ge-

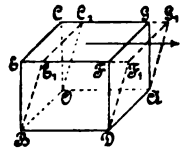


Fig. 2.

richteten, in der oberen Ebene *CGFE* liegenden und über dieselbe gleichmäßig verteilten Kraft ergriffen und unten (in der Ebene *OADB*) festgehalten. Dann wird sich die obere Begrenzungsebene *CGFE* nach $C_1G_1F_1E_1$ verschieben, der rechte Winkel $EBD = \sphericalangle COA$ wird in den spitzen Winkel $E_1BD = \sphericalangle C_1OA$ übergehen, sich also um

$$\sphericalangle EBE_1 = \sphericalangle COC_1 = \gamma$$

ändern. Diese Winkeländerung ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}},$$

wofür unter Voraussetzung, daß es sich nur um kleine Änderungen handelt, gesetzt werden darf

$$\gamma = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{FF_1}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{GG_1}}{\overline{AG}}.$$

Dieser Quotient ist aber auch gleich der Verschiebung, welche unter den gleichen Verhältnissen eine in der Richtung OC um 1 von der Kante BO abstehende Ebene (abstehendes Flächenelement, abstehender Punkt) erfahren haben würde. Aus diesem Grunde wird die Änderung γ des ursprünglich rechten Winkels auch als verhältnismäßige (spezifische) Verschiebung und kurz als Schiebung oder Gleitung bezeichnet.

Zur weiteren Klarstellung der Schiebung γ werde noch die folgende Betrachtung angestellt.

Zwei ursprünglich unter rechtem Winkel sich schneidende Ebenen OX und OZ, Fig. 3, gelangen durch die Formänderung

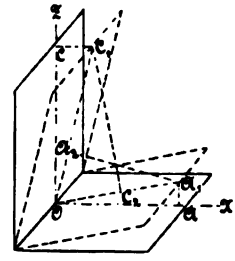


Fig. 3.

in die Lagen OA_1 und OC_1. Der ursprünglich rechte Winkel XOZ hat sich hierbei geändert um die Winkel XOA_1 und ZOC_1, deren Tangenten betragen

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}}, \quad \text{bezw.} \quad \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}},$$

wenn A_1A und CC_1 senkrecht zu OX bezw. OZ stehen. Da es sich nur um sehr kleine Winkeländerungen handelt, so darf die Gesamtänderung γ gesetzt werden

$$\gamma = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}}.$$

Bei dem betrachteten Vorgange hat sich der ursprünglich in der OX-Ebene gelegene Punkt A_1 gegen die jetzt nach OC_1 gekommene OZ-Ebene verschoben um $\overline{OA_2}$, sofern A_1A_2 das von

A_1 auf OC_1 gefällte Lot ist, und der ursprünglich in C der OZ-Ebene gelegene Punkt C_1 gegen die jetzt nach OA_1 gelangte OX-Ebene um OC_2, wenn $C_1C_2 \perp OA_1$. Hiernach ergibt sich für die Schiebung

$$\gamma = \sim\frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{OC_2}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}}.$$

Das Vorstehende zusammenfassend, finden wir, daß mit Schiebung bezeichnet ist:

> die Änderung des rechten Winkels (in Bogenmaß) zweier ursprünglich senkrecht zu einander stehenden Flächenelemente,

oder auch

> die Strecke, um welche sich zwei um 1 voneinander abstehende Flächenelemente gegeneinander verschieben.

§ 29. Schubspannung. Schubkoeffizient.

Der in § 28 der Betrachtung unterstellte sehr kleine Würfel $OADBCGFE$ gehöre dem Inneren eines festen Körpers an und nehme unter Einwirkung der äußeren Kräfte, von welchen dieser ergriffen wird, die Gestalt $OADBC_1G_1F_1E_1$ an. Die innere Kraft, mit welcher aus diesem Anlaß die an den Würfel anschließenden Körperteile in der Ebene $CGFE$ auf denselben einwirken und dadurch die Verschiebung der letzteren nach $C_1G_1F_1E_1$ herbeiführen, heißt, bezogen auf die Flächeneinheit, Schubspannung. Sie unterscheidet sich von der in § 1 besprochenen Spannung dadurch, daß ihre Richtung in das Flächenelement hineinfällt, auf welches sie wirkt, während die im früheren betrachteten Spannungen senkrecht hierzu standen und deshalb zum Unterschiede als Normalspannungen (Zug- oder Druckspannungen) bezeichnet werden.

Die Schubspannung, die zur Schiebung γ (§ 28) gehört, werde mit τ bezeichnet.

Die Schiebung, welche sich für die Schubspannung gleich der Krafteinheit, d. i. für das Kilogramm ergibt, soll Schubkoeffizient genannt und mit β bezeichnet werden. Sie beträgt

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Der Schubkoeffizient ist demnach derjenige Winkel (in Bogenmaß ausgedrückt), um welchen der rechte Winkel zweier ursprünglich senkrecht zueinander stehender Flächenelemente unter Einwirkung der Schubspannung von 1 Kilogramm sich ändert, oder kurz: die Änderung des rechten Winkels für das Kilogramm Schubspannung,

oder auch

diejenige Strecke, um welche sich zwei um 1 voneinander abstehende Flächenelemente unter Einwirkung der Schubspannung von 1 Kilogramm gegeneinander verschieben.

Diese Begriffsbestimmung liefert unmittelbar die Schiebung als Produkt aus Schubspannung und Schubkoeffizient, d. h.

$$\gamma = \beta \tau, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

wonach der Schubkoeffizient auch als diejenige Zahl erklärt werden kann, mit welcher die Schubspannung zu multiplizieren ist, um die Schiebung zu erhalten.

Die Schubspannung ergibt sich als der Quotient: Schiebung durch Schubkoeffizient, d. i.

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Der reziproke Wert von β wird als Schubelastizitätsmodul bezeichnet.

Der Vergleich mit § 2 läßt erkennen, daß zwischen Schiebung, Schubspannung und dem Schubkoeffizienten genau dieselben Beziehungen bestehen wie zwischen Dehnung, Normalspannung und dem Dehnungskoeffizienten.

Die vorstehenden Gleichungen 1 bis 3 setzen voraus, daß β innerhalb eines gewissen Spannungsgebietes konstant ist, ganz wie dies die Gleichungen 1 bis 4, § 2, hinsichtlich α tun. Im allgemeinen wird diese Voraussetzung wohl ebensowenig zutreffen, wie dies bei α der Fall ist. Doch liegen dahingehende Versuche

nach Wissen des Verfassers nur in bezug auf Gußeisen vor. Unter diesen Umständen bleibt, insoweit es sich um allgemeine Entwicklungen handelt, nichts anderes übrig, als β konstant anzunehmen.

§ 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen.

Wir denken uns aus dem betrachteten und von äußeren Kräften ergriffenen Körper ein unendlich kleines Parallelepiped $OADBCGFE$, Fig. 1, dessen Kanten

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{OC} = c$$

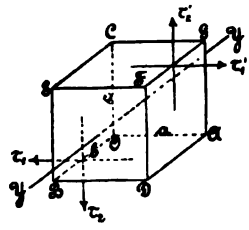


Fig. 1.

sind, herausgeschnitten und die Kräfte eingetragen, mit welchen die an dasselbe anschließenden Körpermassen in den Schnittflächen auf den Würfel einwirken. Dabei sei zunächst angenommen, daß nur Schubspannungen vorhanden sind, und zwar treten auf:

1. in der Begrenzungsfläche $OADB$ von der Größe ab die Schubspannung τ_1, also die Kraft $\tau_1 . ab$;
2. in der hierzu parallelen Fläche $CGFE$ von dem Inhalte ab die Schubspannung τ_1', also die Kraft $\tau_1' . ab$; da $CGFE$ unendlich nahe an $OADB$ liegt, so kann sich τ_1' nur um eine unendlich kleine Größe, die mit Δ_1 bezeichnet sein mag, von τ_1 unterscheiden, d. i. $\tau_1' = \tau_1 + \Delta_1$;
3. in der Begrenzungsfläche $OBEC$ von der Größe bc die Schubspannung τ_2, demnach die Kraft $\tau_2 . bc$;
4. in der hierzu parallelen Fläche $ADFG$ von dem Inhalte bc die Schubspannung τ_2', demnach die Kraft $\tau_2' . bc$; da beide Flächen unendlich nahe beieinander gelegen sind, so kann sich τ_2' nur um eine unendlich kleine Größe Δ_2 von τ_2 unterscheiden, d. i. $\tau_2' = \tau_2 + \Delta_2$.

Soll Gleichgewicht bestehen, so muß u. a. auch die Summe der Momente in bezug auf die Achse YY, welche durch den Schwerpunkt des Parallelepipeds geht und mit der Kante OB gleich gerichtet ist, Null sein, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 2:

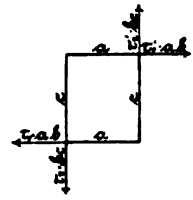


Fig. 2.

$$\tau_1 ab \cdot \frac{c}{2} - \tau_2 bc \frac{a}{2} + \tau_1' ab \frac{c}{2} - \tau_2' bc \frac{a}{2} = 0,$$

$$\tau_1 abc + \frac{1}{2} \Delta_1 abc - \tau_2 abc - \frac{1}{2} \Delta_2 abc = 0.$$

Hieraus unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen Δ_1 und Δ_2 gegenüber den endlichen Größen τ_1 und τ_2

$$\tau_1 - \tau_2 = 0,$$

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

d. h. die beiden senkrecht zur Kante $OB = b$ stehenden Schubspannungen τ_1 und τ_2 sind einander gleich. Ist die eine vorhanden, so muß es auch die andere sein; sie treten also paarweise auf.

Zu diesem Ergebnis gelangten wir unter der Voraussetzung, daß lediglich Schubspannungen auf den Würfel einwirkten, und zwar nur in den vier Ebenen $OADB$, $CGFE$, $OBEC$ und $ADFG$ des Körperelementes, Fig. 1.

Im allgemeinen werden die Körperteile, welche das Parallelepiped umgeben, auf dasselbe in den sechs Begrenzungsflächen je mit einer Normalspannung und einer Schubspannung einwirken. Außerdem können noch Massenkräfte (Schwere, Trägheitsvermögen) ihren Einfluß äußern.

Was zunächst die Normalspannungen anbelangt, so erkennen wir, daß dieselben für die oben aufgestellte Momentengleichung nicht in Betracht kommen: die Normalspannungen in den Begrenzungsflächen $OADB$, $CGFE$, $OBEC$ und $ADFG$ liefern je eine Kraft, welche die Momentenachse YY senkrecht schneidet, also ein Moment gleich Null gibt; die Normalspannungen in den Begrenzungsflächen $OAGC$ und $BDFE$ ergeben in die Momentenachse fallende Kräfte, sind also einflußlos. Die etwaigen Massenkräfte greifen im Schwerpunkte des Würfels an, gehen demnach durch die Achse, liefern also ein Moment gleich Null.

Von den Schubspannungen entfallen die in den Flächen $OAGC$ und $BDFE$ wirkenden ohne weiteres, da die ihnen entsprechenden Kräfte die Achse YY schneiden. Hiernach verbleiben noch die Schubspannungen in den vier Flächen $OADB$, $CGFE$, $OBEC$ und $ADFG$.

Wir zerlegen jede derselben nach den Richtungen der Kanten in zwei Komponenten. Momentgebend treten hiervon nur auf die senkrecht zu den Kanten OB und GF wirkenden Spannungen, d. s. τ_1 τ_2 τ_1' und τ_2'. Für diese aber fanden wir den oben ausgesprochenen Satz. Derselbe gilt demnach allgemein, gleichgültig, welche Formänderung das Körperelement unter Einwirkung von Normalspannungen, Schubspannungen und Massenkräften erfährt:

> immer sind für zwei rechtwinklig sich schneidende Ebenen die senkrecht zur Durchschnittslinie gerichteten Komponenten der Schubspannungen einander gleich,

oder auch mit Rücksicht darauf, daß diese Durchschnittslinie eine ganz beliebige Lage im Körper haben kann,

> wird in einem Körper eine beliebige Gerade gelegt und dieselbe als der Durchschnitt zweier sich rechtwinklig schneidenden Ebenen angesehen, so ist die senkrecht zur Geraden gerichtete Schubspannung in der einen Ebene gleich der senkrecht zu derselben Geraden stehenden Schubspannung in der anderen Ebene.

Die Schubspannungen treten also paarweise auf.

Es entspricht dies ganz der Natur der Schiebung, eine Änderung des ursprünglich rechten Winkels zu sein. Die auf die Flächeneinheit der beiden Winkelebenen wirkenden Kräfte, welche

diese Änderung herbeiführen, müssen in der Richtung des einen Schenkels so groß sein wie in derjenigen des anderen, da keine der beiden Schenkelrichtungen in irgend einer Weise vor der anderen ausgezeichnet ist.

§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubkoeffizient und Dehnungskoeffizient.

1. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren größter Wert.

$ABCD$, Fig. 1, sei der Durchschnitt durch ein Parallelepiped.

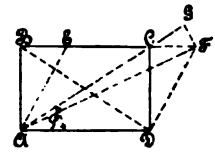


Fig. 1.

Der Körper, welchem dieses angehört, werde nun durch äußere Kräfte ergriffen; infolgedessen ändert er seine Gestalt. Hierbei geht das Rechteck in das Parallelogramm $AEFD$ über: die Ebene, welche ursprünglich in BC sich darstellte, erleidet eine Verschiebung um $\overline{BE} = \overline{CF}$, so daß die Schiebung

$$\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}.$$

Gleichzeitig erfährt die Diagonale $\overline{AC}$ eine Vergrößerung auf $\overline{AF}$. Wird von A aus mit $\overline{AF}$ ein Kreisbogen beschrieben, so schneidet dieser die Verlängerung von AC in G. Die sehr kleine Strecke $\overline{FG}$ darf dann als Senkrechte zu AG angesehen werden, während $\overline{CG}$ die Zunahme der Länge der Diagonale ist. Damit findet sich die Dehnung in Richtung der letzteren

$$\varepsilon = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CF}\cos\varphi}{\frac{\overline{CD}}{\sin\varphi}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi,$$

und wegen

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \gamma$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma \sin 2\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d. h. für $\overline{CD} = \overline{AD}$, also für die quadratische Form des Rechteckes, erlangt ε seinen größten Wert

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Gleichzeitig erfährt die andere, wegen $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dazu rechtwinklige Diagonale DB eine Zusammendrückung $-\varepsilon_2$ von der gleichen Größe

$$-\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\gamma.$$

Hiernach ist die Schiebung γ mit einer größten Dehnung ε_1 und einer gleichzeitigen, dazu senkrechten größten Verkürzung (Zusammendrückung) ε_2 verknüpft[1]), welche absolut genommen je halb so groß sind als die Schiebung. Die Richtung dieser Dehnung zweiteilt den rechten Winkel, dessen Änderung die Schiebung mißt.

Hieraus würde zu folgern sein, daß der zuzulassende Wert γ_1 der Schiebung höchstens doppelt so groß sein darf als die äußersten Falles noch für zulässig erachtete Dehnung ε_1, d. h.

$$\gamma_1 \leq 2\,\varepsilon_1.$$

---

[1]) Hieraus folgt, daß, wenn ein aus durchaus gleichartigem Material bestehender Körper lediglich infolge von Schubspannungen zum Bruche, d. h. zum Zerreißen, gebracht wird, die Rißbildung senkrecht zur Richtung von ε_1 (der Diagonale AC des Quadrates), also in der Richtung von ε_2 (der Diagonale DB des Quadrates) stattfinden muß, sofern das Verhalten des Materials bis zum Bruche hin — wenigstens mit Annäherung — der gleichen Gesetzmäßigkeit folgt. Bei zähen Materialien ist dies infolge der Erscheinung des Fließens nicht zutreffend.

Nach Einführung der zulässigen Zuganstrengung

$$k_z = \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$$

sowie der zulässigen Schubanstrengung

$$k_s = \frac{\gamma_1}{\beta}$$

ergibt sich

$$k_s \leqq 2\frac{\alpha}{\beta} k_z, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

allerdings unter der Voraussetzung, daß das Material in allen Punkten nach allen Richtungen hin gleich beschaffen, also isotrop ist, und α sowie β als unveränderlich angesehen werden können. Wenn die Beziehung 2 benutzt werden soll, um von der zulässigen Normalspannung eines Materials auf die zulässige Schubspannung desselben zu schließen, so erscheint es nötig, überdies zu beachten, daß hierfür Gleichartigkeit der Beanspruchungsweise Vorbedingung ist.

2. *Beziehung zwischen Dehnungskoeffizient und Schubkoeffizient.*

Auf einen Würfel $ABCD$, Fig. 2, von der ursprünglichen Seitenlänge 1 wirken in den Seitenflächen AD und BC die Normal-

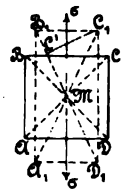


Fig. 2.

spannungen σ. Hierdurch werden die Seitenlängen AB und DC um ε gedehnt, also auf die Größe $\overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1} = 1 + \varepsilon$ gebracht werden, während sich die rechtwinklig hierzu stehenden Kanten AD

und BC um $\frac{\varepsilon}{m}$ verkürzen (§ 7), demnach die Länge $1 - \frac{\varepsilon}{m}$ annehmen.

Die beiden Diagonalebenen AC und BD schlossen ursprünglich einen rechten Winkel miteinander ein. Unter Einwirkung der Normalspannungen σ hat sich dieser Winkel um γ geändert, entsprechend einer Verschiebung z. B. des Punktes C der Diagonalebene AC gegenüber der anderen Diagonalebene um

$$\gamma = \frac{\overline{MC'}}{\overline{C'C_1}},$$

sofern $C_1C' \perp D_1B_1$.

Die Größe γ folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, daß der halbe rechte Winkel sich um $\frac{\gamma}{2}$ geändert hat, aus

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)}{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}.$$

Die Benützung des Satzes

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

führt zu

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

und unter Beachtung, daß γ und ε sehr kleine Größen gegenüber 1 sind, zu

$$1 - \gamma = 1 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)\varepsilon,$$

$$\gamma = \frac{m+1}{m}\varepsilon.$$

Denken wir uns jetzt den Würfel in der Diagonalebene AC auseinander geschnitten, Fig. 3, so wird die Aufrechterhaltung des Gleichgewichts die Anbringung einer Normalspannung σ_1 und einer Schubspannung τ fordern, derart, daß die Resultante der Kräfte

$$\sigma_1 . \overline{AC} = \sigma_1 \sqrt{2} \text{ und } \tau . \overline{AC} = \tau \sqrt{2}$$

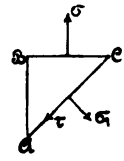


Fig. 3.

gleich der Kraft

$$\sigma . \overline{BC} = \sigma . 1 = \sigma,$$

d. h.

$$\sigma_1 \sqrt{2} . \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau \sqrt{2} . \sqrt{\frac{1}{2}} = \sigma$$

$$\sigma_1 + \tau = \sigma$$

und ferner

$$\sigma_1 \sqrt{2} . \sqrt{\frac{1}{2}} - \tau \sqrt{2} . \sqrt{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sigma_1 = \tau,$$

womit

$$\tau = \frac{\sigma}{2}.$$

Nach dem früheren ist

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta},$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

so daß

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

und mit

$$\gamma = \frac{m+1}{m}\varepsilon,$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{m+1}{m} = \frac{1}{2\alpha},$$

$$\beta = 2\frac{m+1}{m}\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

d. h. der Schubkoeffizient ist das $2\frac{m+1}{m}$-fache des Dehnungskoeffizienten.

Gl. 3 kann, wenn α und β durch Versuche ermittelt worden sind, in der Form

$$m = \frac{2}{\frac{\beta}{\alpha} - 2}$$

zur Berechnung von m benutzt werden.

In der Regel pflegt m als eine zwischen 3 und 4 liegende Zahl betrachtet zu werden; hiermit findet sich

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{5}{2}\alpha \text{ bis } \frac{8}{3}\alpha = 2{,}5\,\alpha \text{ bis } 2{,}67\,\alpha \\ \text{oder} \\ \alpha &= \frac{3}{8}\beta \text{ bis } \frac{2}{5}\beta = 0{,}375\,\beta \text{ bis } 0{,}4\,\beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 4)$$

Aus Gleichung 2 wird alsdann wegen

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{2(m+1)}$$

$$k_s \leqq \frac{m}{m+1} k_z. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

und für $m = 3$ bis 4

$$k_s \leqq \frac{3}{4} k_z \text{ bis } \frac{4}{5} k_z = 0{,}75\,k_z \text{ bis } 0{,}8\,k_z. \quad \ldots \quad 6)$$

unter den Voraussetzungen, welche zur Beziehung 2 ausgesprochen wurden, und unter der weiteren Voraussetzung, daß m einen festen Wert besitzt. Treffen dieselben nicht zu, so erscheint die Gleichung 6 nicht ohne weiteres gültig. Dann kann es auf Grund von Versuchsergebnissen und sonstigen Erfahrungen notwendig werden, davon abzuweichen.

V. Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse steht.

Es bezeichne

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares,

Θ_1 und Θ_2 die beiden Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes (§ 21, Ziff. 1),

Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente,

$\Theta' = \Theta_1 + \Theta_2$ das polare Trägheitsmoment,

f den Inhalt des Querschnittes,

τ die Schubspannung in einem beliebigen Punkte des Querschnittes,

k_d die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Drehungsbeanspruchung,

β den als unveränderlich vorausgesetzten Schubkoeffizienten (§ 29), (reziproker Wert des Schubelastizitätsmodul),

$\gamma = \beta\,\tau$ die Schiebung oder Gleitung in einem beliebigen Punkte des Querschnittes (§ 28),

ϑ den verhältnismäßigen Drehungswinkel, d. h. den Winkel, um welchen sich das Hauptachsenkreuz eines Stabquerschnittes gegenüber demjenigen des um 1 davon abstehenden Querschnittes verdreht,

l die Länge des Stabes.

§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt.

Durch die beiden Kräftepaare $K\,K$, Fig. 1, deren Ebenen die Stabachse senkrecht schneiden, und welche, das Moment M_d besitzend, sich an dem Kreiszylinder das Gleichgewicht halten, werden die einzelnen Querschnitte des Stabes gegeneinander verdreht. Um uns ein Bild über diese Formänderung zu verschaffen, teilen

wir die Mantelfläche des Zylinders, Fig. 2, bevor dieser von den äußeren Kräften ergriffen wird, durch n Gerade $a\,a$ parallel zur

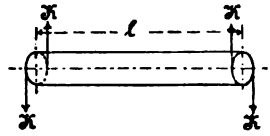


Fig. 1.

Achse in n (25) Rechtecke, je von der Breite $\pi d : n$ ($40\,\pi : 25 = 5{,}0$ mm, da $d = 40$ mm), und diese durch Parallelkreise im Abstand $\pi d : n$ (5,0 mm) in Quadrate, deren Seitenlänge $\pi d : n$

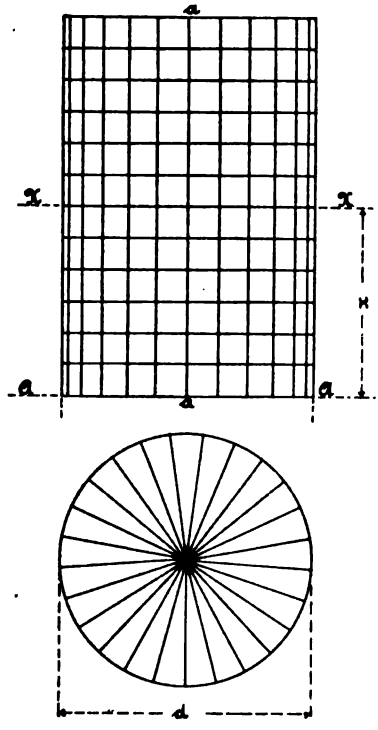


Fig. 2.

(5,0 mm) beträgt. Auf diese Weise erhalten wir die Fig. 2. Wird nun der so gezeichnete Zylinder der Verdrehung unterworfen, so geht er in Fig. 3 (Tafel IX) über. Aus derselben ist zu entnehmen:

a) daß die auf den unbelasteten Zylinder gezeichneten Quadrate in unter sich gleiche Rhomben übergegangen sind,
b) daß die Ebenen der Parallelkreise, d. s. die Querschnitte des Stabes, eben und senkrecht zur Achse des letzteren geblieben sind,
c) daß sich je zwei aufeinander folgende Querschnitte immer gleich viel gegeneinander verdreht haben, daß also beispielsweise der Bogen, um welchen sich ein Punkt des Parallelkreises XX, Fig. 2, gegenüber dem ursprünglich gleich gelegenen Punkte im Stabquerschnitt AA bewegt hat, proportional dem Abstande x ist.

Sind nun f_1 und f_2 zwei um 1 voneinander abstehende Querschnitte des Stabes und $P_1 P_2$ zwei ursprünglich gleich gelegene Umfangspunkte in denselben, so wird sich unter Einwirkung der

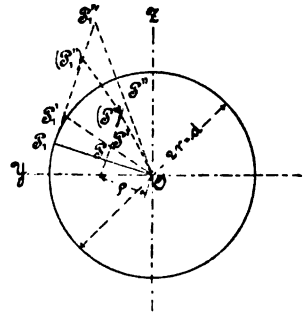


Fig. 4.

äußeren Kräfte P_2 gegen P_1 um eine Strecke γ_1 verdreht haben, welche nach Maßgabe des in § 28 Erörterten als die Schiebung im Punkte P_1 zu bezeichnen ist. Für die Schiebung γ in einem auf dem Halbmesser OP_1, Fig. 4, im Abstande $\overline{OP} = \varrho$ von der Achse gelegenen Punkt P erscheint auf Grund der oben angeführten Erfahrungen die Annahme zutreffend, daß sie sich zu derjenigen im Umfangspunkte P_1 verhält wie $\varrho : r$, also

$$\gamma : \gamma_1 = \varrho : r,$$

d. h.

$$\gamma = \gamma_1 \frac{\varrho}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Fig. 6, § 32.

Fig. 3, § 32.

Wird in Fig. 4 die tangentiale Linie $\overline{P_1 P_1'} = \gamma_1$ und die hierzu parallele Strecke $\overline{PP'} = \gamma = \gamma_1 \frac{\varrho}{r}$ gemacht, so liefert die zeichnerische Darstellung der Schiebungen in allen Punkten der Geraden OP_1 die Gerade $OP'P_1'$.

Nach § 29 sind die entsprechenden Schubspannungen

$$\text{im Punkte } P_1 \quad \tau_1 = \frac{\gamma_1}{\beta},$$

$$\text{im Punkte } P \quad \tau = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\beta r}\varrho.$$

τ_1 muß naturgemäß tangential zum Kreise, also senkrecht zum Halbmesser OP_1 gerichtet sein. Das letztere gilt auch für τ.

Wird die Schubspannung τ durch die Strecke $\overline{PP''}$, welche senkrecht zu OP steht, dargestellt und ist der Schubkoeffizient β konstant, so ergibt sich als geometrischer Ort aller Punkte P'' eine durch den Mittelpunkt O gehende Gerade. Dies trifft z. B. mit großer Annäherung zu für Schmiedeisen und Stahl innerhalb der Proportionalitätsgrenze. Ist dagegen β veränderlich und zwar derart, daß β zunimmt mit wachsender Schiebung oder Spannung, wie dies beispielsweise bei Gußeisen der Fall, so liegen die durch

$$\tau_1 = \overline{P_1(P_1'')} \qquad \tau = \overline{P(P'')}$$

bestimmten Punkte (P_1'') und (P'') auf einer gegen die Gerade OP_1 gekrümmten Kurve $O(P'')(P_1'')$ Die Spannungen nehmen dann nach außen hin langsamer zu als bei Unveränderlichkeit von β.

Die im Querschnitte durch das Kräftepaar vom Momente M_d wachgerufenen Schubspannungen müssen sich mit M_d im Gleichgewicht befinden. Wird das in P liegende Flächenelement mit df bezeichnet, so spricht sich diese Forderung aus in

$$\int \tau\, df \,.\, \varrho = M_d,$$

$$M_d = \frac{\gamma_1}{r}\int \frac{1}{\beta}\varrho^2\, df$$

und, wenn β konstant,

$$M_d = \frac{\gamma_1}{\beta r}\int \varrho^2\, df.$$

Unter Beachtung, daß

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

sofern y und z die rechtwinkligen Koordinaten des in P liegenden Flächenelementes sind, und mit

$$\int y^2\, df = \Theta_1 \quad \text{und} \quad \int z^2\, df = \Theta_2$$

wird

$$M_d = \frac{\gamma_1}{\beta r}(\Theta_1 + \Theta_2) = \tau_1 \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{r} = \tau_1 \frac{\Theta'}{r}.$$

Die beiden Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 sind für den vollen Kreisquerschnitt

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Demnach

$$M_d = \tau_1 \frac{\pi}{16} d^3 = \tau_1 \frac{\pi}{2} r^3 \quad \ldots\ldots\ 2)$$

$$M_d \leqq \frac{\pi}{16} k_d\, d^3 \quad \text{oder} \quad k_d \geqq \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^3} \quad \ldots\ 3)$$

Für den Kreisringquerschnitt ergibt sich, sofern d der äußere und d_0 der innere Durchmesser ist,

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_0^4)$$

$$M_d = \tau_1 \frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_0^4}{d}$$

$$M_d \leqq \frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_0^4}{d} \quad \text{oder} \quad k_d \geqq \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_0^4} \quad . \quad 4)$$

Der Drehungswinkel ϑ folgt unmittelbar aus der gegebenen Begriffsbestimmung

$$\vartheta = \frac{\gamma_1}{r} = \frac{\beta M_d}{\Theta_1 + \Theta_2} = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4} \quad \ldots\ 5)$$

beziehungsweise

$$\vartheta = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 6)$$

Hiernach beträgt der im Abstande 1 von der Achse gemessene Verdrehungsbogen der beiden um l voneinander abstehenden Querschnitte des Kreiszylinders

$$\vartheta_l = \vartheta l = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4} l, \text{ bezw. } \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} l.$$

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurden nur Schubspannungen im Stabquerschnitte ins Auge gefaßt; so z. B. im Punkte P, Fig. 4, nur die Schubspannung τ, welche, senkrecht zu OP_1 angreifend, in der Bildebene wirkt. Nach § 30 treten jedoch die Schubspannungen immer paarweise auf, derart, daß in demselben Punkte P senkrecht zur Bildebene, d. h. senkrecht zum Querschnitte, eine der oben erwähnten Spannung τ gleiche Schubspannung vorhanden ist. Das Flächenelement, in dem sie wirkt, liegt im Punkte P derjenigen Ebene, welche durch den Halbmesser OP_1 und die Stabachse bestimmt wird. So findet sich beispielsweise im Punkte P_1 die Schubspannung τ_1 nicht bloß im Querschnitt (tangential zum Kreisumfang gerichtet), sondern auch in der Achsialebene OP_1 mit der Mantellinie des Zylinders zusammenfallend.

Der Übergang der Quadrate, Fig. 2, (bei Verdrehung des Zylinders) in die Rhomben, Fig. 3 (Taf. IX), beweist dies auch unmittelbar aus der Anschauung. Wie wir in § 28 sahen, ist die Änderung des ursprünglich rechten Winkels gleich der Schiebung. Diese Winkeländerung mißt demnach wegen $\tau = \frac{\gamma}{\beta}$ die Schubspannung unmittelbar. Sie betrifft sowohl den wagrechten wie auch den senkrechten Schenkel des rechten Winkels. Die entsprechende Schubspannung ist deshalb ebensowohl in senkrechter wie in wagrechter Richtung vorhanden. Sie muß, da alle Rhomben unter sich gleich sind, für alle Stellen der Mantelfläche des Zylinders dieselbe Größe besitzen, sowohl tangential zur Umfangslinie also auch in Richtung der Achse des Stabes. Die größte Schubspannung, welche im Querschnitt stattfindet, tritt also auch in Richtung der Stabachse auf.

Schneiden wir aus dem Zylinder ein kleines Körperelement *ACDBEF*, Fig. 5, heraus, mit den Querschnittsebenen *ACD*, *BEF* und den Achsialebenen *ABFD*, *ABEC*, so ergibt die graphische Darstellung der in den Ebenen *CDA* und *BFDA* wirkenden Schubspannungen unter Voraussetzung eines unveränderlichen Schubkoeffizienten je ein Dreieck. Sie zeigt deutlich das paarweise Auftreten der Schubspannungen in den beiden Ebenen, welche *AD* zur Durchschnittslinie haben[1]).

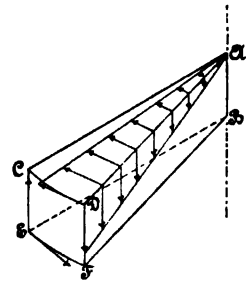


Fig. 5.

Bei gewalztem Schweißeisen oder Draht aus solchem Material u. s. w. findet infolge der ausgeprägten Faserrichtung die achsiale Schubspannung häufig einen verhältnismäßig geringen Widerstand, weshalb dann Längsrisse eintreten, wie Fig. 6 (Tafel IX) für ein der Verdrehung unterworfenes Stück Walzeisen erkennen läßt[2]).

---

[1]) Die Betrachtung von Fig. 5 gestattet, nach dem Vorgange von Bredt einen allgemeinen Satz über die Schubkräfte eines auf Verdrehung beanspruchten Stabes abzuleiten.

Die Gleichgewichtsbedingung des Körperelementes in Richtung der Stabachse *AB*: Summe der Schubkräfte in der Ebene *ADFB* + Summe der Schubkräfte in der Ebene *ACEB* muß gleich Null sein, führt bei Wahl von $\overline{AB} = 1$ unter Berücksichtigung der Gleichheit der Schubspannungen in zwei senkrecht zueinander stehenden Ebenen zu dem Satz: werden in einem Querschnitt zwei Gerade *AD* und *AC* nach dem Umfange gezogen, so ist die Summe der Schubkräfte, welche sich für die in *AD* gelegenen Flächenelemente senkrecht zu *AD* wirkend ergeben, gleich der Summe der Schubkräfte, welche die in *AC* gelegenen Flächenelemente senkrecht zu *AC* liefern.

[2]) Wird die Verdrehung weiter fortgesetzt, so liegen die Längsrisse auf mehr oder minder stark geneigten Schraubenlinien, wie z. B. die betreffenden Abbildungen auf Tafel XVI erkennen lassen. Vergl. hierzu das in § 35, Ziff. 3 Gesagte.

Die achsial gerichteten Schubspannungen sind auch Ursache, daß bei auf Drehung in Anspruch genommenen Körpern nicht selten schon frühzeitig bleibende Verdrehung eintritt, wie dies z. B. bei gewalztem Schweißeisen ausgeprägt der Fall zu sein pflegt.

Bei mehr isotropem Material erfolgt die Rißbildung nach Maßgabe der Fußbemerkung zu § 31, Ziff. 1, S. 297 unter 45° gegen die Richtungen der Schubspannungen, wie dies der Verlauf der Bruchlinien in den Abbildungen auf Tafel XIV deutlich erkennen läßt. In Fig. 3 (Tafel IX) müßte die Bruchlinie als rechtsgängige, unter 45° geneigte Schraubenlinie verlaufen, sofern die in der Fußbemerkung zu § 31, Ziff. 1, S. 297 bezeichnete Voraussetzung erfüllt ist.

§ 33. Stab von elliptischem Querschnitt.

1. Formänderung.

Nach dem in § 32 gegebenen Vorgange wird ein Zylinder mit elliptischem Querschnitt (große Achse $= 2a = 50$ mm, kleine Achse $= 2b = 25$ mm) hergestellt und seine Mantelfläche in Quadrate eingeteilt.

Unter Einwirkung der beiden Kräftepaare, welche sich an ihm das Gleichgewicht halten, geht derselbe in die Gestalt Fig. 1 (Tafel X) über[1]). Die beiden ursprünglich geraden Mantellinien, welche die Endpunkte der großen Halbachsen aller Querschnitte enthalten, sind durch die Bezeichnung $a\,a$ hervorgehoben, während diejenigen zwei Linien, welche von den Endpunkten der kleinen Halbachsen sämtlicher Querschnitte gebildet werden, die Bezeichnung $b\,b$ tragen. Wir erkennen bei genauer Untersuchung des verdrehten Zylinders:

---

[1]) Das Material des auf photographischem Wege dargestellten Zylinders ist wie bei Fig. 3, § 32 (Tafel IX) und bei Fig. 1, § 34 (Tafel XI) sowie Fig. 2, § 34 (Tafel XII) Hartblei. Dasselbe behält die Formänderung fast vollständig bei und gibt deshalb auch nach der Lösung des Stabes aus der Prüfungsmaschine ein gutes Bild dieser Änderung. Bei Verwendung von stark elastischem Material wie Gummi ist die Formänderung eine gleiche, nur verschwindet sie mit der Entlastung des Probekörpers zu einem großen Teile und entzieht sich so der Darstellung. Versuche mit schmiedbarem Eisen führen zu einem ganz entsprechenden Ergebnisse.

a) daß die Quadrate in Rhomben übergegangen sind,
b) daß die Winkel derjenigen Rhomben, welche mit der einen Seite in der jetzt schraubenförmig gekrümmten Linie $b\,b$ liegen, am meisten von dem ursprünglich rechten Winkel abweichen, während diejenigen Rhomben, deren eine Seite von der Schraubenlinie $a\,a$ gebildet wird, die geringste Abweichung von ihrer früheren Gestalt, dem Quadrate, zeigen,
c) daß die ursprünglich ebenen Querschnitte sich gewölbt haben,
d) daß jedoch die beiden Hauptachsen eines Querschnittes in der urprünglichen Ebene verblieben sind und den rechten Winkel beibehalten haben,
e) daß sich je die beiden Hauptachsen zweier aufeinander folgenden Querschnitte immer um gleichviel gegeneinander (um die in ihrer Lage unverändert gebliebene Stabachse) verdreht haben[1]).

2. *Schubspannungen.*

Fassen wir zunächst einen Umfangspunkt P' des Querschnittes, Fig. 2, ins Auge, so muß die Schubspannung τ' in dem zu P'

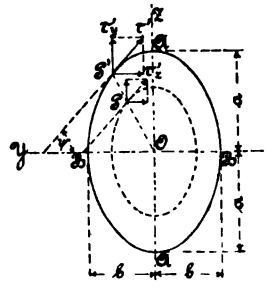


Fig. 2.

gehörigen Querschnittselement naturgemäß tangential zur Umfangslinie gerichtet sein, sofern hier äußere, eine andere Richtung der Schubspannung bedingende Kräfte nicht angreifen.

Wir zerlegen τ' in die beiden Komponenten

τ'_y, senkrecht zur y-Achse wirkend,
τ'_z, - - z- - - und

[1]) Die Bestimmung dieses Verdrehungswinkels erfolgt in § 43.

Fig. 1, § 33.

bezeichnen durch ψ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte P' mit der y-Achse einschließt, sowie durch y' und z' die Koordinaten des Umfangspunktes P'. Dann folgt zunächst

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\tau'_y}{\tau'_z}$$

und sodann aus der Gleichung der Ellipse

$$\frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

durch Differentiation

$$\frac{y'}{b^2}\,dy' + \frac{z'}{a^2}\,dz' = 0$$

$$\frac{dz'}{dy'} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}.$$

Aus Fig. 2 ergibt sich unmittelbar

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dz'}{-\,dy'}.$$

Folglich durch Gleichsetzen der beiden für $\operatorname{tg}\psi$ erhaltenen Werte

$$\frac{\tau'_y}{\tau'_z} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Hiernach erscheint τ'_y proportional y' und τ'_z proportional z'.

Denken wir uns für den im Inneren des Querschnittes liegenden Punkt P, bestimmt durch die Koordinaten y und z, die entsprechende (ähnliche) Ellipse konstruiert, so wird auch hier die Schubspannung τ, deren Komponenten τ_y ($\perp OY$) und τ_z ($\perp OZ$) seien, tangential gerichtet sein. Demgemäß erhalten wir

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

worin A und B Konstante bedeuten.

Die im Querschnitte wachgerufenen Schubspannungen müssen sich nun mit dem Momente M_d im Gleichgewicht befinden. Wird das in P liegende Flächenelement mit df bezeichnet, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\int (\tau_y\, df \,.\, y + \tau_z\, df \,.\, z) = M_d\,,$$

woraus unter Beachtung der Gleichungen 2 und mit Rücksicht darauf, daß nach § 17, Ziff. 6

$$\int y^2\, df = \frac{\pi}{4}\, ab^3 \qquad\qquad \int z^2\, df = \frac{\pi}{4}\, a^3 b$$

$$M_d = A\,\frac{\pi}{4}\, ab^3 + B\,\frac{\pi}{4}\, a^3 b.$$

Die Verbindung der Gleichungen 1 und 2 ergibt

$$\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'} = \frac{Ay'}{Bz'}\,,$$

woraus

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \text{ oder } A = B\,\frac{a^2}{b^2}\,.$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung für M_d findet sich

$$M_d = B\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{\pi}{4}\, ab^3 + B\,\frac{\pi}{4}\, a^3 b = \frac{\pi}{2}\, a^3 b\, B,$$

$$B = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{a^3 b}\,,$$

$$A = B\,\frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{ab^3}\,.$$

Hiermit nach den Gleichungen 2 die Schubspannungen für den beliebigen Querschnittspunkt P

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= Ay = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{ab^3}y, \\ \tau_z &= Bz = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^3b}z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 3)$$

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^3b^3}\cdot\sqrt{a^4y^2 + b^4z^2}. \quad \ldots 4)$$

Dieser Ausdruck wächst mit y und z, erlangt also für bestimmte Umfangspunkte den größten Wert. Zur Feststellung, in welchen Punkten des Umfanges dies der Fall ist, werde $a \geqq b$ vorausgesetzt und dem Ausdruck für τ', gültig für den Umfangspunkt $y'z'$, die Form

$$\tau' = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{ab^2}\sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \ldots 5)$$

gegeben. Da

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 = 1,$$

so muß wegen $a \geqq b$

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 \leqq 1$$

sein. Demnach ergibt sich der größte Wert der Schubspannung für $y' = \pm b$ und $z' = 0$ zu

$$\tau'_{max} = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{ab^2}, \quad \ldots\ldots 6)$$

d. h. die größte Schubspannung tritt in den Endpunkten BB der kleinen Achse, also in denjenigen Punkten auf, welche der Stabachse am nächsten liegen.

Hiermit folgt

$$k_d \geqq \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{ab^2} \text{ oder } M_d \leqq \frac{\pi}{2}k_d\,ab^2. \quad \ldots 7)$$

In den Endpunkten AA der großen Achse ist die Schubspannung, da hier

$$y' = 0 \qquad z' = \pm a$$

$$\tau' = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^2 b} = \frac{b}{a}\tau_{max}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

d. i. im Verhältnis der Halbachsen kleiner als die Spannung in den Punkten BB[1]).

Dieses gegenüber der älteren Auffassung, der zufolge die Spannungen mit dem Abstande von der Achse wachsen, für den ersten Augenblick überraschende Ergebnis steht in voller Über-

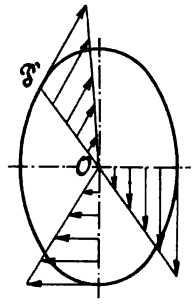


Fig. 3.

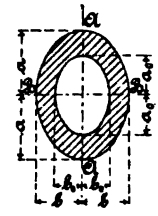


Fig. 4.

einstimmung mit der oben unter Ziff. 1, b angeführten Beobachtung. Die Winkeländerungen, welche nach § 28 die Schiebungen γ messen, die ihrerseits nach § 29 zu den Schubspannungen in der Beziehung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

stehen, sind — Fig. 1 (Taf. X) — am größten in den Endpunkten der kleinen und am kleinsten in den Endpunkten der großen Achse der Ellipse.

Hinsichtlich des Gesetzes, nach dem sich die Schubspannungen im Inneren ändern, ist die ohne weiteres aus den Gleichungen 3 und 4 folgende Bemerkung von Interesse, daß für alle auf der

[1]) Dieses Verhältnis läßt sich auch unmittelbar unter Zuhilfenahme des in der Fußbemerkung 1, S. 308 ausgesprochenen Satzes ableiten.

Geraden OP', Fig. 2, liegenden Querschnittselemente die Spannungen parallel gerichtet und proportional dem Abstande von der Stabachse sind. In Fig. 3 ist das Änderungsgesetz der Schubspannungen dargestellt für die Punkte der großen und der kleinen sowie für diejenigen einer beliebigen Halbachse OP'. Die in Fig. 3 gezeichneten Kräftedreiecke müssen inhaltsgleich sein (S. 308, Fußbemerkung 1). Für die Umfangspunkte läßt sich das Änderungsgesetz unmittelbar der Gleichung 5 entnehmen.

Handelt es sich nicht um einen Voll-, sondern um einen Hohlstab, Fig. 4, so gilt unter der von dem Gange der obigen Entwicklung bedingten Voraussetzung, daß die innere Begrenzungsellipse der äußeren ähnlich ist, d. h.

$$a_0 : a = b_0 : b = m,$$

wegen

$$\int y^2\, df = \frac{\pi}{4}(a\, b^3 - a_0\, b_0^3) \qquad \int z^2\, df = \frac{\pi}{4}(a^3\, b - a_0^3\, b_0)$$

$$M_d = A\,\frac{\pi}{4}(a\, b^3 - a_0\, b_0^3) + B\,\frac{\pi}{4}(a^3\, b - a_0^3\, b_0),$$

woraus dann mit

$$A = \frac{a^2}{b^2}\,B$$

$$B = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{(1 - m^4)\, a^3\, b}$$

und schließlich

$$\tau = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{(1 - m^4)\, a^3\, b^3}\,\sqrt{a^4\, y^2 + b^4\, z^2}. \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Für die Punkte B des Umfanges erlangt τ seinen Größtwert, nämlich

$$\tau'_{max} = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{(1 - m^4)\, a\, b^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{a\, b^3 - a_0\, b_0^3}\, b, \quad . \quad 10)$$

so daß

$$k_d \geqq \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{a\, b^3 - a_0\, b_0^3}\, b \text{ oder } M_d \leqq \frac{\pi}{2}\, k_d\, \frac{a\, b^3 - a_0\, b_0^3}{b}. \quad 11)$$

Die Gleichungen 7 und 10 zeigen deutlich, daß die Widerstandsfähigkeit eines elliptischen Voll- oder Hohlstabes gegenüber der Drehungsbeanspruchung abhängt von dem kleinen der beiden Hauptträgheitsmomente, also nicht von der Summe beider, wie die ältere Lehre von der Drehungsfestigkeit angab.

Die letztere schuf ursprünglich ihre Entwicklungen, welche davon ausgingen, daß die Schubspannungen proportional mit dem Abstande des Querschnittselementes von der Stabachse wachsen und senkrecht zu diesem Abstande stehen, allerdings nur für die in § 32 behandelten Querschnitte; hierfür war sie auch zutreffend. Ihre Übertragung auf andere Querschnitte war unzulässig.

Die Gleichung 11 enthält die Beziehung 3 und 4, § 32, je als besonderen Fall in sich. Es wird für

$$a = b = \frac{d}{2} \qquad a_0 = b_0 = \frac{d_0}{2}$$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_0^4}{d}$$

und für $d_0 = 0$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d d^3.$$

Die Schlußbemerkungen zu § 32, betreffend das paarweise Auftreten der Schubspannungen u. s. w., gelten auch hier, überhaupt sinngemäß für alle auf Drehung beanspruchten Körper.

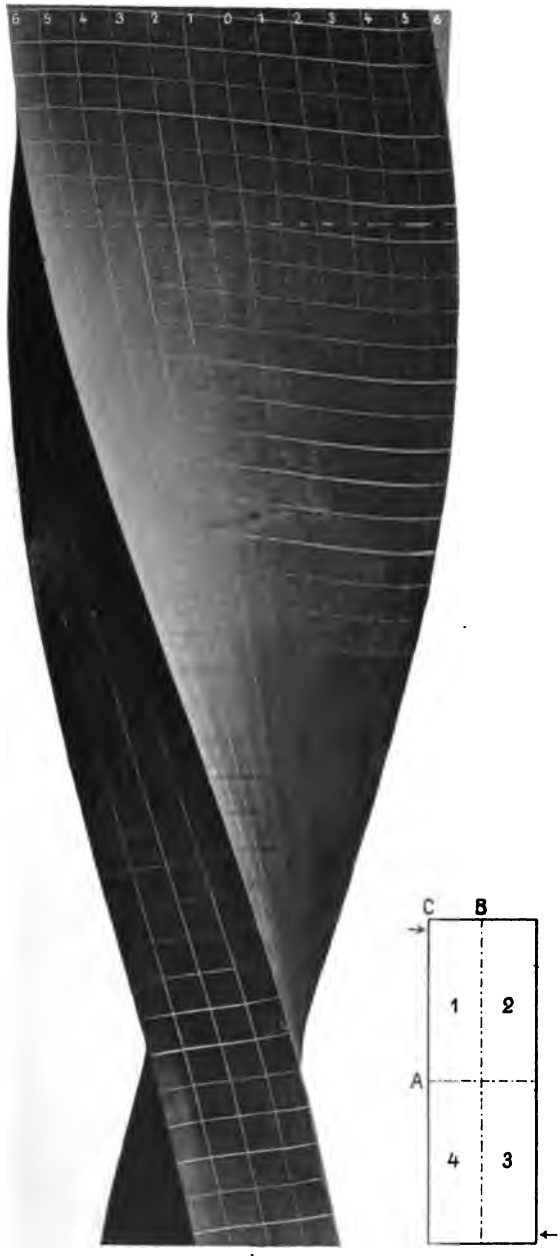
Hinsichtlich der Folgen, welche eine Hinderung der oben unter Ziff. 1, c festgestellten Querschnittswölbung mit sich bringt, sei auf § 34, Ziff. 3 verwiesen.

§ 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.

1. Formänderung.

Nach dem Vorgange in den Paragraphen 32 und 33 wird ein Prisma von rechteckigem Querschnitt (60 mm breit, 20 mm stark) hergestellt und jede seiner 4 Mantelflächen in Quadrate von 5 mm Seitenlänge eingeteilt. Unter Einwirkung der beiden Kräftepaare, welche sich an dem Stabe das Gleichgewicht halten, geht derselbe in die Form Fig. 1 (Taf. XI) über.

Fig. 1, § 34.



Wir erkennen folgendes:

a) Die Quadrate haben ihre ursprüngliche Form mehr oder minder verloren und rhombenartige Gestalt angenommen.

Die Querlinien schneiden mit ihren äußersten Elementen die 4 Eckkanten des Stabes senkrecht, wie dies ursprünglich jede der früher geraden Querlinien in ihrer ganzen Erstreckung tat; dagegen ändert sich die Rechtwinkligkeit zwischen Quer- und Längslinien um so mehr, je näher die letzteren der Seitenmitte liegen. Die Änderung des rechten Winkels, d. h. die Schiebung (§ 28), beträgt hiernach in den Kanten des Stabes Null, wächst von da zunächst ziemlich rasch, sofern die breite Seitenfläche ins Auge gefaßt wird, und erreicht für sämtliche Seitenflächen in deren Mitten ausgezeichnete Werte, von denen derjenige in der Mitte der breiten Seitenflächen der größere ist. Die größte Schiebung findet hiernach in denjenigen Punkten des Stabumfanges statt, welche der Achse am nächsten liegen.

b) Die ursprünglich ebenen Querschnitte haben sich gewölbt.

c) Die beiden Hauptachsen eines Querschnittes sind in der ursprünglichen Ebene geblieben. (Für einen Querschnitt ist dessen ursprüngliche Ebene gestrichelt eingetragen.)

d) Je die beiden Hauptachsen zweier aufeinander folgenden Querschnitte haben sich immer um gleichviel gegeneinander verdreht[1]).

Hinsichtlich der Wölbung der Querschnitte ist es von Interesse zu beachten, daß der Abstand derjenigen Punkte des gewölbten Querschnittes, welche von den Seitenmitten ab und nach den Stabkanten hin gelegen sind, von der ursprünglichen Querschnittsebene (vergl. Ziff. 3) sich als ziemlich bedeutend erweist, und daß infolgedessen die Ausbildung dieser gewölbten Form eine verhältnismäßig große Zurückziehung (positive im ersten und dritten, negative im zweiten und vierten Quadranten) der von den Seitenmitten abgelegenen Fasern gegenüber der früheren Querschnittsebene zur Folge hat. Wie ersichtlich, ist die Wölbung erhaben, d. h. der Abstand der einzelnen Querschnittelemente von der Grundebene hat sich vergrößert in denjenigen diametral zuein-

[1]) Die Bestimmung dieses Verdrehungswinkels erfolgt in § 43. Vergl. auch die erste Fußbemerkung zu § 52, Ziff. 2, b.

ander liegenden beiden Querschnittsvierteln, gegen deren lange Seiten die Kräfte des drehenden Kräftepaares gerichtet sein müßten, wenn hierdurch die stattgehabte Verdrehung bewerkstelligt werden sollte. In den beiden anderen Querschnittsvierteln ist die Wölbung vertieft, d. h. der Abstand der einzelnen Querschnittselemente von der Grundebene hat sich verkleinert.

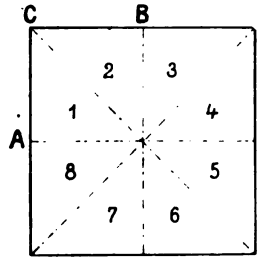
Die Stirnflächen des verdrehten Prisma werden hiernach zeigen (vergl. Taf. XI, Fig. 1, unten rechts)

im Viertel 1 erhabene Wölbung,
- - 2 vertiefte -
- - 3 erhabene -
- - 4 vertiefte -

Ist für den rechteckigen Stab $b = h$, d. h. handelt es sich um einen quadratischen Querschnitt, so nimmt derselbe bei der Verdrehung die Form Fig. 2 (Taf. XII) an. Dieselbe bestätigt das oben unter a) bis d) Erkannte durchaus. Nur hinsichtlich der Wölbung der Querschnitte tritt insofern eine Änderung ein, als hier alle Seiten gleich groß sind, und deshalb kein Grund vorliegt, weshalb sich das eine Viertel anders verhalten soll wie das andere, wenn die Kräfte, welche das vorhandene Kräftepaar liefern, auf den durch die Verdrehungsrichtung bestimmten 4 Halbseiten wirkend gedacht werden. Tatsächlich weist Fig. 2, Taf. XII nach, daß für quadratischen Querschnitt (vergl. Fig. 2) bei der angenommenen Verdrehungsrichtung die Wölbung eine erhabene ist in den Achteln 1, 3, 5 und 7, dagegen eine vertiefte in den Achteln 2, 4, 6 und 8. Außer den beiden Symmetrieachsen verbleiben noch die zwei Diagonalen in der ursprünglichen Querschnittsebene und damit auch die vier Eckpunkte. Die hierdurch ausgezeichneten vier Linien weisen nach Ziff. 2 noch die weitere Eigenschaft auf, daß die in ihren Punkten wirkenden Schubspannungen senkrecht zu ihnen gerichtet sind.

Die Erkenntnis dieser eigenartigen Formänderungen der Querschnitte ist unter Umständen von großer praktischer Bedeutung, wie unter Ziff. 3 am Schlusse dieses Paragraphen näher erörtert werden wird.

Fig. 2, § 34.



2. *Schubspannungen.*

Da die Schubspannungen in den Querschnittselementen der Umfangslinie unter der Voraussetzung, daß äußere Kräfte hier nicht auf die Mantelfläche des Stabes wirken, nur tangential an diese Linie gerichtet sein können, so müssen sie auf der Begrenzungsstrecke $\overline{AC}$, Fig. 1 (Taf. XI) oder Fig. 3, in die Richtung AC fallen, ebenso auf der Strecke BC in die Richtung BC. Demgemäß ergeben sich im Flächenelement C (Eckpunkt) des Querschnittes, da dasselbe sowohl der Linie AC wie auch der

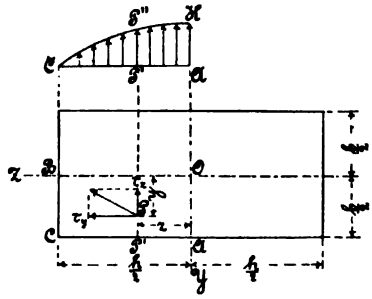


Fig. 3.

Linie BC angehört, zwei senkrecht zueinander gerichtete Schubspannungen, welche eine Resultante liefern müßten. Dieselbe hätte jedenfalls die Forderung zu befriedigen, daß sie gleichzeitig in die Richtungen von AC und BC falle. Dieser Bedingung kann sie nur entsprechen, wenn ihre Größe Null ist. Infolgedessen muß die Schubspannung in C selbst Null sein. Aus diesem Grunde werden sich die in den Querschnittselementen AC wirkenden Schubspannungen von A nach C hin bis auf Null vermindern müssen; ebenso werden die in BC tätigen Schubspannungen von B nach C bis auf Null abzunehmen haben.

Die Richtigkeit dieser Erwägungen wird voll bestätigt durch die oben unter Ziff. 1, a angegebene Beobachtung. Dort war festzustellen, daß die Schiebungen in den Kantenpunkten, d. h. in C Null waren, nach der Mitte der Seite, d. h. nach A bezw. B hin erst rasch und dann langsamer wuchsen, entsprechend einem Verlaufe etwa nach der Kurve CH, Fig. 3, die erhalten wird durch

Ermittlung der Änderungen der ursprünglich rechten Winkel; demgemäß werden sich auch die Schubspannungen von C nach A hin ändern.

Zum Zwecke der Bestimmung der letzteren erinnern wir uns, daß beim elliptischen Querschnitt (§ 33) die im beliebigen Punkte P wirkende Spannung τ die beiden Komponenten τ_y und τ_z lieferte, für welche galt

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz.$$

Hier werden τ_y (senkrecht zur y-Achse) und τ_z (senkrecht zur z-Achse) in entsprechender Weise von y und z abhängen müssen. Dort waren A und B konstante Größen, während sie hier veränderlich sein müssen, da ja τ_y für $y = \frac{b}{2}$ nach C hin bis auf Null abzunehmen hat, ebenso τ_z für $z = \frac{h}{2}$.

Wird die Schubspannung in der Mitte der langen Seite, d. h. in A mit τ , diejenige in Punkt P', welcher im Abstande z von A auf der Strecke AC gelegen ist, mit τ' bezeichnet und $\overline{AH} = \tau_a$, $P'P'' = \tau'$ gemacht; wird ferner in Anlehnung an § 38, Fig. 4, dem Änderungsgesetz der Schubspannungen in der Linie AC, d. h. dem Verlaufe der Linie $CP''H$, die einfachste Kurve, die gewöhnliche Parabel mit H als Scheitel und HA als Hauptachse zugrunde gelegt, so folgt nach dem bekannten Satz, daß sich bei der Parabel die Abszissen verhalten wie die Quadrate der Ordinaten

$$(\tau'_a - \tau') : \tau'_a = z^2 : \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\tau' = \tau'_a \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right].$$

Demgemäß setzen wir für den Faktor A in der Gleichung $\tau_y = Ay$

$$A = c\tau'_a \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] = m\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$$

und ganz entsprechend für B in dem Ausdruck $\tau_z = Bz$

$$B = d\tau'_b \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] = n\left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right],$$

wenn c, d, m und n Konstante sind, und τ_b' die Schubspannung im Punkte B bezeichnet.

Die Gleichungen

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz$$

liefern, da A für $z = 0$ und B für $y = 0$ konstant, die in Fig. 4 dargestellte Spannungsänderung. Somit nach dem in der Fußbemerkung S. 308 ausgesprochenen Satz

$$\frac{1}{2}\tau_b'\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\tau_a'\frac{b}{2}$$

$$\tau_b' = \tau_a'\frac{b}{h}.$$

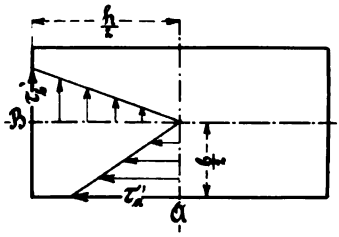


Fig. 4.

Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= m\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] y, \\ \tau_z &= n\left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

und in ganz gleicher Weise wie in § 33, Ziff. 2

$$\int\left(\tau_y\, df.\, y + \tau_z\, df.\, z\right) = M_d$$

$$= m\int\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] y^2\, df + n\int\left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] z^2\, df,$$

$$M_d = \frac{1}{12}\, m\, b^3\, h + \frac{1}{12}\, n\, b\, h^3 - 4\left(\frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2}\right)\int y^2 z^2\, df.$$

Wegen

$$\int y^2 z^2 \, df = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 \, dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \, dz = \frac{1}{144} \, b^3 h^3$$

wird

$$M_d = \frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - \frac{1}{36} \left(\frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2} \right) b^3 h^3 \quad . \quad 2)$$

Nun ist

für den Punkt A, d. i. $y = \frac{b}{2}$ und $z = 0$,

$$\tau_y = \tau_a',$$

womit nach der ersten der Gleichungen 1

$$\tau_a' = m \frac{b}{2} \quad \text{oder} \quad m = \frac{2 \tau_a'}{b}$$

und

für den Punkt B, d. i. $y = 0$ und $z = \frac{h}{2}$,

$$\tau_z = \tau_b',$$

infolgedessen nach der zweiten der Gleichungen 1

$$\tau_b' = n \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad n = \frac{2 \tau_b'}{h} = \frac{2 b}{h^2} \tau_a'.$$

Hiermit gehen die Gleichungen 1 und 2 über in

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= 2 \tau_a' \frac{1}{b} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] y, \\ \tau_z &= 2 \tau_b' \frac{1}{h} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] z \\ &= 2 \tau_a' \frac{b}{h^2} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] z, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

beziehungsweise

$$M_d = \frac{2}{9} \tau_a' b^2 h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Gleichung 4 führt zu

$$M_d \leqq \frac{2}{9} k_d b^2 h \quad \text{oder} \quad k_d \geqq \frac{9}{2} \frac{M_d}{b^2 h}. \quad . \quad . \quad . \quad 5)^1)$$

Die größte Anstrengung tritt hierbei auf in denjenigen Punkten der Umfangslinie des Querschnittes, welche der Stabachse am nächsten liegen.

(Vergl. das unter Ziff. 3 Erörterte.)

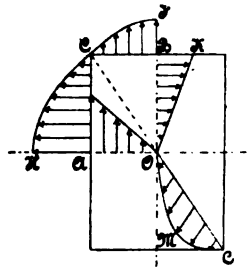


Fig. 5.

Um ein Bild der Spannungsverteilung über den rechteckigen Querschnitt zu erhalten, sind in Fig. 5 die Spannungen für einige Flächenstreifen eingetragen. Es werden dargestellt die Schubspannungen

---

[1]) Dieses Ergebnis ist nur mit Annäherung richtig, wie ohne weiteres aus dem Gange der Entwicklung folgt. Es entspricht deshalb auch den im Abschnitt 8 enthaltenen allgemeinen Gleichungen nicht ganz. Die strengere Lösung, wie sie auf Grund der letzteren zuerst von Saint-Venant gegeben worden ist, wurde bereits im Vorwort zur ersten Auflage berührt (vergl. auch S. 348 u. f. sowie die Arbeit des Verfassers in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 137 u. f.).

In neuester Zeit haben sich die Arbeiten von Prandtl (Physikalische Zeitschrift 1903, S. 758 u. f., Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1904, S. 31 u. f.), Henneberg (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 51. Bd., 1904, S. 225 u. f.) u. a. mit der Aufgabe befaßt.

für die in der Linie CA liegenden Querschnittselemente durch die wagrechten Ordinaten der Kurve CH,
für die in der Linie CB liegenden Querschnittselemente durch die senkrechten Ordinaten der Kurve CJ,
für die in der Linie OA liegenden Querschnittselemente durch die zu OA senkrechten Pfeillinien,
für die in der Linie OB liegenden Querschnittselemente durch die wagrechten Ordinaten der Geraden OK,
für die in der Linie OC liegenden Querschnittselemente durch die geneigten Ordinaten der Kurve OMC.

Die letztere Linie folgt aus den Gleichungen 3 unter Beachtung, daß für die Punkte der Diagonale OC

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{h}$$

ist. Hiermit ergibt sich dann für die einzelnen in OC gelegenen Flächenelemente

$$\tau_z : \tau_y = b \,.\, h,$$

d. h. die Schubspannungen sind parallel gerichtet, und

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

$$= 2\tau_a' \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] \frac{y}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2}.$$

Für

$$y = 0{,}577 \, \frac{b}{2}$$

erlangt τ seinen größten Wert.

Im Falle $b = h$, d. i. für den quadratischen Querschnitt, stehen die Schubspannungen senkrecht auf den Diagonalen.

Hierbei ist im Auge zu behalten, daß diese Schubspannungen immer paarweise auftreten und deshalb gleichzeitig in der Ebene des Querschnittes und in senkrecht dazu stehenden Ebenen wirken.

(Vergl. Schlußbemerkung zu § 32.)

Die Beziehungen 3, § 32 (Kreis), 4, § 32 (Kreisring), 7, § 33 (Ellipse), 11, § 33 (Ellipsenring) und 5, § 34 (Rechteck) lassen sich auf die gemeinsame Form

$$M_d \leqq \varphi\, k_d \frac{\Theta}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

bringen, worin bedeutet

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares,
Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente,
b für den Kreis den Halbmesser, für die Ellipse die kleine Halbachse, für das Rechteck die kleinere Seite,
k_d die zulässige Drehungsanstrengung,
φ einen Zahlenwert, welcher beträgt

für den Vollkreis und den Kreisring mit $b = \frac{d}{2}$ $\varphi = 2$,
für die Vollellipse und den Ellipsenring $\varphi = 2$,
für das Rechteck $\varphi = \frac{8}{3}$.

Auf dieselbe Form, Gleichung 6, läßt sich auch der Ausdruck für das gleichseitige Dreieck

$$M_d = \frac{1}{20} k_d b^3 \text{ [1]}$$

sowie derjenige für das gleichseitige Sechseck

$$M_d = \frac{1}{1{,}09} k_d b^3 \text{ [1]},$$

worin je b die Seitenlänge bezeichnet, bringen.

Es ist dann

$$\varphi = 1{,}385,$$

beziehungsweise

$$\varphi = 1{,}694.$$

---

[1]) S. u. a. Herrmann, Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereines 1883, S. 172.

Die Gleichung 6 spricht deutlich aus, daß die Widerstandsfähigkeit gegenüber Drehungsbeanspuchung von dem kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente bestimmt wird, daß also das größere nicht in Betracht kommt.

3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung.

Unter Ziff. 1 erkannten wir, daß die ursprünglich ebenen Querschnitte des rechteckigen Prisma infolge Einwirkung des Drehungsmomentes in gekrümmte Flächen übergehen. Für den Fall, daß der Querschnitt langgestreckt war wie bei Stab Fig. 1 (Taf. XI), fand sich, daß die Strecken, um welche hierbei die einzelnen, von den Seitenmitten abgelegenen Querschnittselemente aus der ursprünglichen Querschnittsebene herausgetreten waren, verhältnismäßig bedeutend ausfielen. (Vergleiche daselbst die gestrichelte Linie, welche die ursprüngliche Ebene des jetzt gewölbten Querschnittes angibt; das Achsenkreuz ist beiden gemeinsam.)

Solange der auf Drehung in Anspruch genommene Körper durchaus prismatisch ist, hat diese Krümmung der Querschnitte in der Regel ein bedeutendes Interesse für den Ingenieur nicht[1]). Ganz anders gestaltet sich jedoch die Sache, sobald diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist.

Handelt es sich beispielsweise um einen Körper, wie in § 35, Fig. 1, dargestellt, der an seinen Enden Platten trägt, durch welche die beiden Kräftepaare, die sich an ihm das Gleichgewicht halten, auf den mittleren prismatischen Teil wirken, so bietet sich da, wo dieser an die Platte anschließt, der Querschnittskrümmung ein Hindernis. Insbesondere sind die nach den Stabkanten zu gelegenen Fasern, Fig. 1, Taf. XI, gehindert, um den verhältnismäßig bedeutenden Betrag, den die erhabene Wölbung verlangt, von der Platte sich zurückzuziehen. Infolgedessen entstehen in allen denjenigen Querschnittselementen, welche unter Einwirkung des Drehungsmomentes bestrebt sind, ihre Entfernung von der Grundebene zu vergrößern (sich erhaben zu wölben, d. s. die Rechtecksviertel 1 und 3, Fig. 1), Zugspannungen, während in allen

[1]) Vergl. Fußbemerkung 1, S. 328.

denjenigen Querschnittspunkten, welche bestrebt sind, den bezeichneten Abstand zu verringern (sich vertieft zu wölben, d. s. die Rechtecksviertel 2 und 4, Fig. 1), Druckspannungen wachgerufen werden. Sind diese Normalspannungen genügend groß, so kann der Bruch, obgleich die äußeren Kräfte nur ein auf Drehung wirkendes Kräftepaar ergeben, durch Zerreißen der am stärksten gespannten Fasern veranlaßt werden.

Einer äußeren Zug- oder Druckkraft bedarf es nicht, da die Zugspannungen in gewissen Querschnittsteilen (Rechtecksviertel 1 und 3, Fig. 1) durch Druckspannungen in den anderen Querschnittselementen (Rechtecksviertel 2 und 4, Fig. 1) im Gleichgewicht gehalten werden.

In solchen Fällen der mehr oder minder vollständig gehinderten Ausbildung der Querschnittswölbung rücken die gefährdetsten Stellen, welche bei Nichthinderung dieser Ausbildung mit denjenigen Punkten des Querschnittsumfanges zusammenfallen, welche der Stabachse am nächsten liegen, von der letzteren fort; beispielsweise in Fig. 1 von A nach C hin. Bei langgestreckten Querschnitten werden sie sehr rasch von A nach C hin vorwärtsschreiten.

Beim quadratischen Querschnitt, Fig. 2 (Taf. XII), bleibt C in der ursprünglichen Querschnittsebene; infolgedessen ist es ausgeschlossen, daß bei Gleichartigkeit des Materiales die größte Anstrengung in oder nahe bei C auftritt. Sie ist — allgemein — da zu suchen, wo die Gesamtinanspruchnahme, herrührend von den Schubspannungen, welche durch das Drehungsmoment verursacht werden, und von den Normalspannungen, die infolge der Hinderung der Querschnittswölbung ins Dasein treten, den größten Wert erlangt. Bei dem quadratischen Querschnitt wird sie — soweit dies hier ohne Anstellung besonderer Rechnungen beurteilt werden kann — der Mitte der Seitenflächen viel näher liegen als den Stabkanten. Ihre Bestimmung, welche überdies von dem Grade der Vollständigkeit der mehrfach erwähnten Hinderung der Querschnittskrümmung abhängt, gehört in das Gebiet der zusammengesetzten Elastizität und Festigkeit.

(Vergl. auch den vorletzten Absatz von § 32 sowie die Bemerkungen zu Gleichung 2, § 31, Ziff. 1.)

Die zur Berechnung von Stäben, welche durch Drehung beansprucht werden, in diesem und den vorhergehenden Paragraphen

aufgestellten Gleichungen sind unter der stillschweigend gemachten Voraussetzung entwickelt, daß die Querschnittswölbung sich ungehindert ausbilden kann[1]).

§ 85. Drehungsversuche.

1. *Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform.*

Diese Abhängigkeit muß bei Gußeisen wegen der Veränderlichkeit des Schubkoeffizienten β in ziemlich bedeutendem Maße vorhanden sein. (Vergl. § 32.)

Verfasser hat nach der bezeichneten Richtung hin eine Anzahl von Versuchen angestellt. Über einen Teil derselben ist in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 140 bis 145 und 162 bis 166 ausführlich berichtet worden[2]).

Die je unter einer Bezeichnung aufgeführten Versuchskörper sind aus dem gleichen Material (bei demselben Gusse) hergestellt worden.

Gußeisen A.

Zugstäbe bearbeitet.

$$\text{Zugfestigkeit } K_z = \frac{1655 + 1480 + 1601}{3} = 1579 \text{ kg/qcm.}$$

a) Stäbe mit rechteckigem Querschnitt, unbearbeitet.

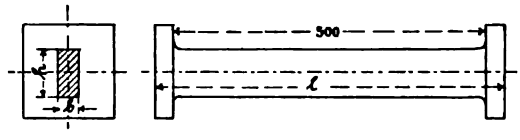


Fig. 1.

[1]) Diese Voraussetzung trifft auch für genau prismatische Stäbe streng nicht zu; denn denken wir uns einen solchen Stab von der Länge l an den Enden je auf die Erstreckung x von den beiden Kräftepaaren ergriffen, die sich an ihm das Gleichgewicht halten, so erkennt man, daß für die beiden Stirnflächen des Stabes das verdrehende Moment gleich Null ist und erst zu Ende der Strecke x die volle Größe erreicht, die es für den mittleren Stabteil von der Länge $l - 2x$ besitzt. Es besteht somit eine gewisse Hinderung gegenüber der Querschnittswölbung, die sich auf einer Strecke größer als x geltend machen muß.

[2]) Siehe auch „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 80 u. f.

Fig. 8, § 35.

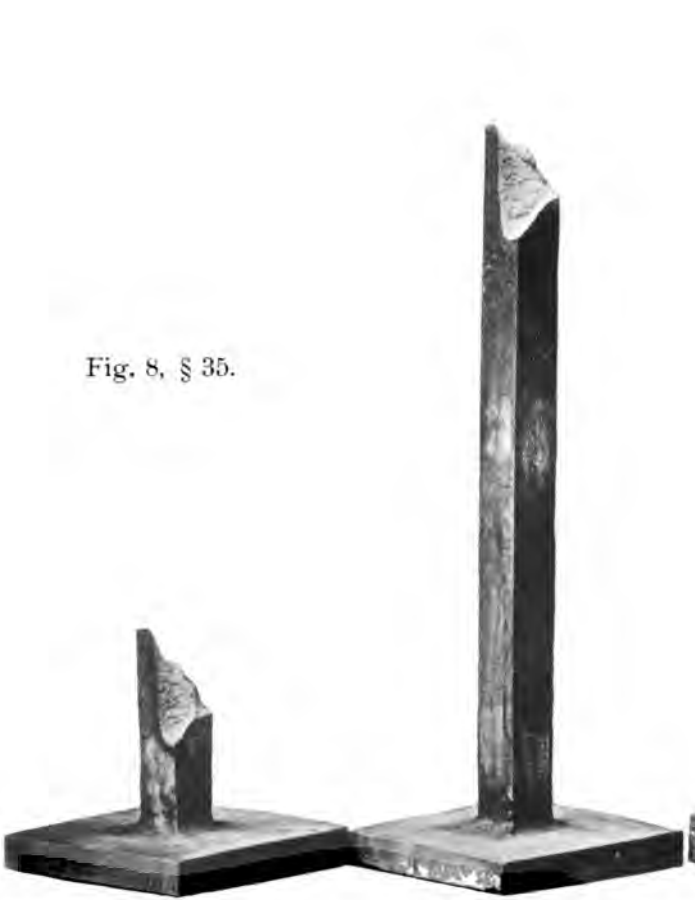
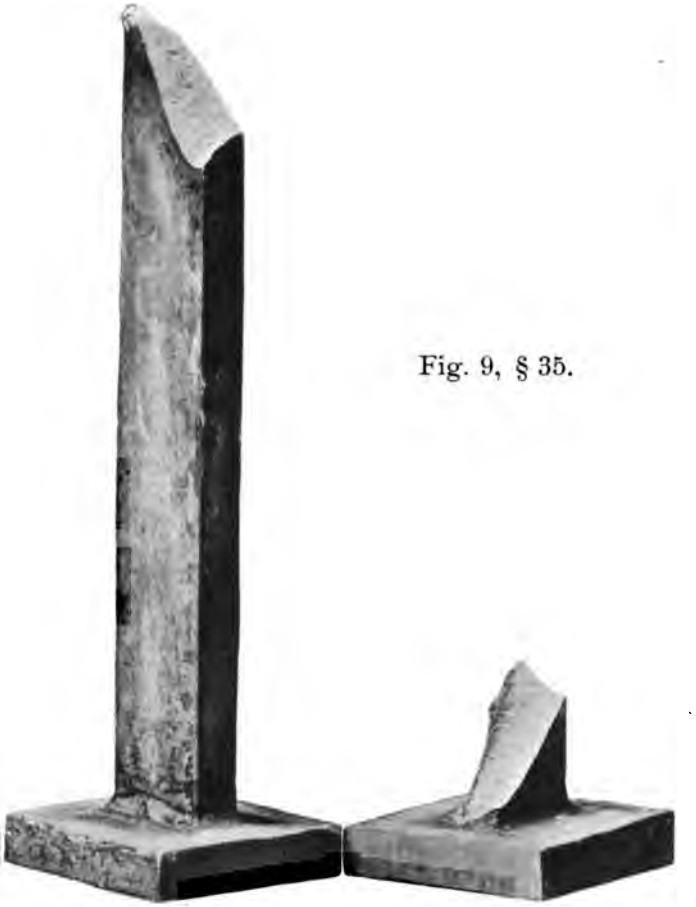


Fig. 9, § 35.



Seitenverhältnis	Durchschnittliche Abmessungen			Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^2 h}$	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	l cm	b cm	h cm	kg/qcm		
4 Stäbe $b:h = 1:1$	53	3,15	3,20	2228	1,42	Bruch erfolgt im prismatischen Teil, Fig. 8 (Tafel XIII).
4 Stäbe $b:h = 1:2{,}5$	56	3,13	7,82	2529	1,60	Bruch erfolgt in der Nähe der einen oder anderen Endplatte, Figur 9 (Tafel XIII).
4 Stäbe $b:h = 1:5$	56	3,08	15,07	2366	1,50	Desgl.
3 Stäbe $b:h = 1:9$	54	1,66	15,13	2508	1,59	Desgl.

Die Bruchfläche, Fig. 8 (Taf. XIII), läßt vermuten, daß bei den quadratischen Stäben der Bruch, der plötzlich erfolgt, in der Mitte der Seitenfläche oder wenigstens in deren Nähe begonnen habe, wie dies nach § 34, Ziff. 3, der Fall sein soll.

Bei den Stäben mit langgestreckter Form des Querschnittes scheint es dagegen, als ob der Bruch, Fig. 9 (Taf. XIII), welcher immer in der Nähe einer der beiden zum Einlegen in die Prüfungsmaschine dienenden Endplatten erfolgte, von außen, d. h. von einer Ecke oder in deren Nähe, seinen Anfang genommen habe.

Jedenfalls ist hieraus zu schließen, daß K_d für die Stäbe mit langgestrecktem Querschnitt zu klein ermittelt wurde. Ferner erkennen wir, als durch den Versuch nachgewiesen, daß ein auf Drehung beanspruchter Körper, dessen Querschnitt in der einen Richtung eine wesentlich größere Erstreckung besitzt als in der anderen, da, wo in Richtung der Stabachse der schwächere prismatische Teil an einen stärkeren anschließt — wie im vorliegenden Falle das rechteckige Prisma an die Endplatten — die Anstrengung keine reine Drehungsbeanspruchung mehr ist, daß vielmehr daselbst auch Normalspannungen auftreten. (Vergl. § 34, Ziff. 3.)

b) Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt.

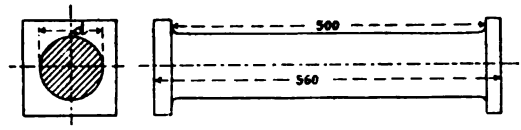


Fig. 2.

Bezeichnung	Durchmesser d cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3}$ kg/qcm	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
3 Stäbe, unbearbeitet	10,23	1618	1,02	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Teil.
1 Stab, bearbeitet	9,6	1655	1,05	Desgleichen, siehe Fig. 10 (Taf. XIV).

Von hohem Interesse erscheint die Bruchfläche des linken Stückes der Fig. 10 (Taf. XIV). Deutlich sprechen hier die kleinen, der Längsfuge anhängenden Bruchstücke dafür, daß die Trennung schließlich — nach vorhergegangener Rißbildung unter 45° — durch Abschiebung in angenähert achsialer Richtung erfolgt ist (vergl. Fig. 5, § 32, sowie das in § 32 am Schlusse Bemerkte).

Ein Einfluß der Entfernung der Gußhaut auf die Drehungsfestigkeit kann nicht festgestellt werden, da diese für die drei unbearbeiteten Stäbe zwischen 1574 und 1683 kg/qcm schwankte.

c) Hohlstäbe mit kreisförmigem Querschnitt, unbearbeitet.

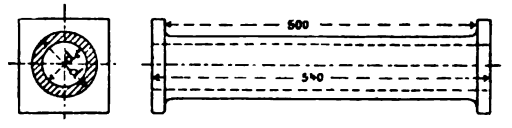


Fig. 3.

Fig. 10, § 35.

Fig. 11, § 35.

Bezeichnung	Durchmesser d cm	Durchmesser d_0 cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^4 - d_0^4}d$ kg/qcm	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
3 Stäbe	10,2	6,97	1297	0,82	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Teil.

Hinsichtlich der Bruchfläche vergl. die zu „Gußeisen B“ gehörige Fig. 11 (Taf. XIV).

Die Drehungsfestigkeit nähert sich dem Werte, welcher nach Gleichung 6, § 31, zu erwarten ist, entsprechend dem Umstande, daß die Drehungsbeanspruchung hier der einfachen Schubanstrengung ziemlich nahe gekommen ist. Für $d_0 = d$ würde die Drehungsanstrengung vollständig dieselbe sein wie die Inanspruchnahme auf Schub.

d) Hohlstäbe mit quadratischem Querschnitt, unbearbeitet.

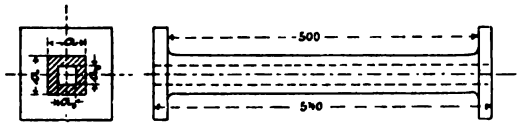


Fig. 4.

Bezeichnung	Seitenlänge a cm	Seitenlänge a_0 cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5\frac{M_d}{a^4 - a_0^4}a$ kg/qcm	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
4 Stäbe	6,21	3,16	1788	1,13	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Teil, Fig. 12 (Taf. XV).

Die Bruchfläche, Fig. 12 (Taf. XV), berechtigt zur Vermutung, daß der Bruch in der Mitte der Seite begonnen habe.

Vergleicht man die Drehungsfestigkeit bei vollquadratischem Querschnitt (a) mit derjenigen bei hohlquadratischem, so findet sich

$$2228 : 1788 = 1{,}25 : 1.$$

Derselbe Vergleich für Vollkreis (b) mit Kreisring (c) ergibt

$$1618 : 1297 = 1{,}25 : 1,$$

also dasselbe.

Beide Vergleiche lehren, daß das nach der Stabachse zu gelegene Material (Gußeisen) bei der Drehung durchaus nicht so schlecht ausgenützt wird, wie man dies anzunehmen pflegt.

Nach § 32 war, da für Gußeisen der Schubkoeffizient β mit zunehmender Spannung wächst, dieses Ergebnis zu erwarten.

Es entspricht dies ganz dem Ergebnisse, zu welchem die Erörterungen in § 20, Ziff. 4, sowie die Versuche § 22, Ziff. 2, bei Biegungsbeanspruchung des Gußeisens führten.

e) Stäbe mit [-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

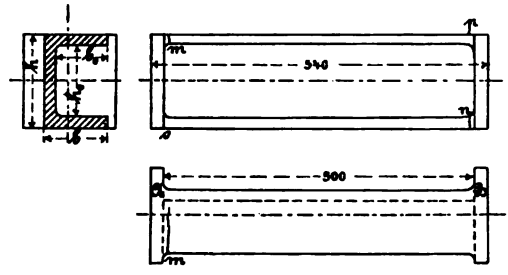


Fig. 5.

α) Verhältnis $b : h = \sim 1 : 1{,}5$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment M_d
	b	h	b_0	h_0	
	cm	cm	cm	cm	kg . cm
1	10,3	15,1	8,6	11,9	34000
2	10,25	15,15	8,6	11,95	33750
3	10,3	15,2	8,6	12,0	35500

Der Bruch beginnt damit, daß gleichzeitig oder unmittelbar aufeinander folgend die beiden Querrippen von außen einreißen,

und zwar die eine bei m, die andere bei n, also diametral gegenüberliegend. Die Drehrichtung des Momentes ist hierbei derart, daß — von Platte A nach Platte B gesehen — A in der Richtung des Uhrzeigers verdreht wird.

Die oben eingetragenen Werte von M_d sind die Drehungsmomente, welche sich unmittelbar vor diesem Einreißen der Querrippen ergaben. Sobald letzteres erfolgt, sinkt die Schale der Kraftwage, entsprechend einer Verminderung des Momentes, welches auf den Stab wirkt. Für den Stab No. 3 wurde diese Verminderung bestimmt, weshalb dessen Verhalten noch kurz beschrieben werden soll.

Stab No. 3.

Bei $M_d = 35500$ kg . cm reißen die Querrippen an den zwei Stellen m und n von außen ein, das Drehungsmoment sinkt auf 25250 kg . cm. Unverletzt ist in dem Querschnitt bei m, beziehungsweise n noch der innere Teil der nur außen (auf reichlich die Hälfte) gerissenen Querrippe, der Steg und die andere Querrippe bei o, beziehungsweise p. Bei fortgesetzter Verdrehung steigt das Moment auf 35250 kg . cm und nimmt dann wieder ab. Der Bruch der Querrippe bei n beginnt sich in den Steg hinein zu erstrecken, schließlich bricht dieser und bald auch die andere Querrippe bei p.

β) Verhältnis $b : h = \sim 1 : 3$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg . cm	M'_d kg . cm
1	5,2	15,2	3,5	12,0	27250	—
2	5,2	15,2	3,5	12,0	26750	27750
3	5,2	15,3	3,5	12,0	24000	25500

Bruch erfolgt in ähnlicher Weise, wie unter α erörtert.

Bei dem Drehungsmoment M_d reißen die Querrippen an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen (m und n, Fig. 5) von außen ein, das Drehungsmoment sinkt ein wenig (z. B. bei

No. 3 von 24000 auf 23000, also um weit weniger als beim Einreißen der Stäbe unter α, für welche die Breite b rund noch einmal so groß ist). Mit Wiederaufnahme der Verdrehung steigt es auf $M_d' > M_d$, den Bruch heibeiführend. Der Bruch des Steges, welch letzterer noch unterstützt wird durch die zweite unverletzte Querrippe desselben Querschnittes, fordert also ein etwas größeres Drehungsmoment, als zum Einreißen der einen Querrippe des unverletzten Stabes nötig ist; der Stab trägt demnach mit eingerissener Querrippe mehr wie im unverletzten Zustande.

Für den Versuch No. 1 unter α würde Gleichung 6, § 34, mit $\varphi = \frac{8}{3}$ und bei Ersetzung von k_d durch K_d liefern

$$K_d = \frac{3}{8}\,\frac{M_d}{\Theta}\,b = \frac{3}{8}\cdot\frac{34000}{528}\cdot 10{,}3 = \sim 290 \text{ kg/qcm}.$$

Für den Versuch No. 1 unter β würde die Gleichung 6, § 34, ergeben

$$K_d = \frac{3}{8}\,\frac{M_d}{\Theta}\,b = \frac{3}{8}\cdot\frac{27250}{70{,}5}\cdot 5{,}2 = \sim 880 \text{ kg/qcm}.$$

Werden diese beiden für K_d erlangten Werte mit der Drehungsfestigkeit rechteckiger Stäbe verglichen (a), so ergibt sich, daß die Gleichung 6, § 34, für Körper mit Querschnitten der hier vorliegenden Art unbrauchbar ist; denn um auf eine Spannung zu gelangen, wie sie der Drehungsfestigkeit rechteckiger Stäbe entspricht, müßte φ im ersteren Falle (290 kg/qcm) 8mal, im letzteren (880 kg/qcm) dagegen reichlich $2^1/_2$mal so groß genommen werden.

Würde man beim Stab No. 1 unter α die Querrippen umlegen und an den Steg anschließen, so daß ein rechteckiger Querschnitt erhalten würde von der Höhe $h + 2b_0 = 15{,}1 + 2\,.\,8{,}6 = 32{,}3$ cm bei einer durchschnittlichen Breite von

$$\frac{h\,(b - b_0) + 2b_0\,(h - h_0)}{h + 2b_0} = \frac{15{,}1\,.\,1{,}7 + 17{,}2\,.\,1{,}6}{32{,}3} = 1{,}64 \text{ cm},$$

so wäre mit $K_d = 2500$ kg/qcm (wie unter a für rechteckige Stäbe von 15,1 cm Höhe und 1,66 cm Stärke gefunden) nach Gleichung 5, § 34, auf ein Drehungsmoment von

$$M_d = \frac{2}{9} b^2 h K_d = \frac{2}{9} 1{,}64^2 \cdot 32{,}3 \cdot 2500 = \sim 48\,200 \text{ kg . cm}$$

zu rechnen. Das würde

$$100 \frac{48\,200 - 34\,000}{34\,000} = 42\,\%$$

mehr sein, als der rippenförmige Querschnitt tatsächlich vertrug.

Wird die Festigkeit des Stabes No. 1 unter β in Vergleich gesetzt mit der Widerstandsfähigkeit, welche sein Steg allein besitzen würde, d. h. mit

$$M_d = \frac{2}{9} (5{,}2 - 3{,}5)^2 \cdot 15{,}2 \cdot 2500 = \sim 24\,400 \text{ kg . cm},$$

so findet sich, daß der Stab No. 1 unter β nicht wesentlich mehr trägt ($M_d = 27\,250$ kg . cm) als der Steg für sich ohne Querrippen.

Wir erkennen hieraus, daß die untersuchten Stäbe mit [-förmigem Querschnitt gegenüber Drehungsbeanspruchung verhältnismäßig wenig widerstandsfähig sind. (Vergl. unter Gußeisen *B*, *d*.)

f) Stäbe mit I-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

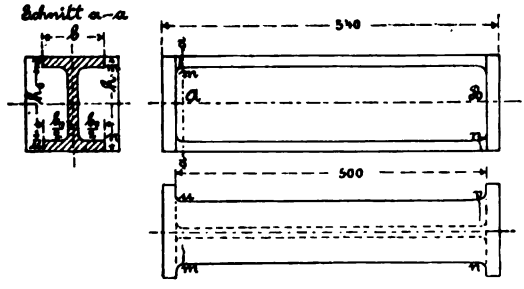


Fig. 6.

α) Verhältnis $b : h = \sim 1 : 1{,}5$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg . cm	M_d' kg . cm
1	10,1	15,1	8,6	11,9	45 000	52 500
2	10,2	15,2	8,6	12,0	55 000	63 000
3	10,3	15,2	8,7	12,0	46 500	59 000

Bruch gesund.

Bei M_d reißen gleichzeitig oder unmittelbar aufeinander folgend die Querrippen an 4 Stellen von außen ein. Ist der Drehungssinn des Momentes derart, daß beim Sehen von der Platte A gegen die Platte B hin A in der Richtung des Uhrzeigers gegenüber B verdreht wird, so reißt die untere Rippe rechts bei n, links bei u, die obere rechts bei m, links bei v von außen ein. Mit diesem Einreißen sinkt das Moment nur sehr wenig. Bei Fortsetzung des Versuchs steigt das Moment auf M_d', welches wesentlich größer ist als M_d, führt in dieser Größe den Bruch des Steges und damit des Stabes herbei. Derselbe trägt demnach mit eingerissenen Querrippen bedeutend mehr wie im unverletzten Zustande.

β) Verhältnis $b : h = \sim 1 : 3$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg . cm	M_d' kg . cm
1	5,0	15,1	3,4	11,9	32 500	33 750
2	5,0	15,2	3,4	12,0	30 750	32 250
3	5,0	15,1	3,4	11,9	28 750	30 750

Bruchfläche bei 1 und 2 gesund, bei 3 gesund bis auf eine unbedeutende Stelle.

Bruch erfolgt in ganz ähnlicher Weise, wie unter α erörtert. Bei M_d beginnt das Einreißen der Querrippen, M_d' bringt den Steg und damit den Stab zum Bruche.

γ) Verhältnis $b : h = \sim 1 : 6$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg . cm
1	2,5	15,1	0,9	12,0	25 250

Bruch erfolgt plötzlich. Bruchfläche bis auf eine sehr kleine Stelle gesund.

Wird K_d auf Grund der Gleichung 6, § 34, mit $\varphi = \frac{8}{3}$ für die Stäbe No. 3 unter α, No. 1 unter β und No. 1 unter γ berechnet, so findet sich

$$K_d = \frac{3}{8}\frac{46\,500}{295} . 10{,}3 = 609 \text{ kg/qcm},$$

$$K_d = \frac{3}{8}\frac{32\,500}{37} . 5 = 1641 \text{ kg/qcm},$$

$$K_d = \frac{3}{8}\frac{25\,250}{8{,}13} . 2{,}5 = 2912 \text{ kg/qcm}.$$

Aus der Verschiedenartigkeit und der absoluten Größe dieser Werte erkennen wir, daß auch für I-Querschnitte die Gleichung 6, § 34, nicht verwendbar erscheint.

Würde man die Querrippen umlegen und an den Steg anschließen, so daß je ein rechteckiger Querschnitt von

der Höhe $15{,}2 + 2 . 8{,}7 = 32{,}6$ cm, der Breite 1,6 cm, bezw.
- - $15{,}1 + 2 . 3{,}4 = 21{,}9$ - - - 1,6 - -
- - $15{,}1 + 2 . 0{,}9 = 16{,}9$ - - - 1,6 -

sich ergäbe, so wäre mit $K_d = 2500$ kg/qcm nach Gleichung 5, § 34, auf ein Drehungsmoment zu rechnen von

$$M_d = \frac{2}{9} b^3 h K_d = \frac{2}{9} \cdot 1{,}6^3 \cdot 32{,}6 \cdot 2500 = \sim 46\,360 \text{ kg . cm},$$

bezw.

$$M_d = \frac{2}{9} \cdot 1{,}6^3 \cdot 21{,}9 \cdot 2500 = \sim 31\,150 \text{ kg . cm},$$

bezw.

$$M_d = \frac{2}{9} \cdot 1{,}6^3 \cdot 16{,}9 \cdot 2500 = \sim 24\,040 \text{ kg . cm}.$$

Der Versuch ergab

46 500, bezw. 32 500, bezw. 25 250,

also nur wenig hiervon verschieden, so daß ausgesprochen werden darf, daß die untersuchten I-förmigen Querschnitte hinsichtlich des Widerstandes gegen Bruch durch Drehung nahezu gleichwertig erscheinen mit rechteckigen Querschnitten, deren Breite gleich der Steg- und gleich der Rippenstärke s und deren Höhe gleich der Summe $h + 2\,b_0$, d. h.

$$M_d = \frac{2}{9} K_d s^3 (h + 2\,b_0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

g) Stäbe mit kreuzförmigem Querschnitt, unbearbeitet.

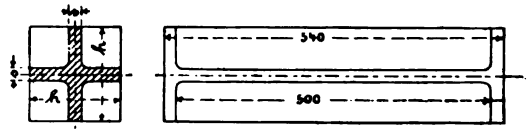


Fig. 7.

No.	Abmessungen		Trägheitsmoment	Bruchmoment	Bemerkungen
	s cm	h cm	Θ cm^4	M_d kg . cm	
1	2,14	15,2	637	72 500	Bruch gesund.
2	2,14	15,1	616	73 750	Bruch gesund bis auf eine ganz unbedeutende Stelle.

Der Bruch erfolgt in beiden Fällen plötzlich.

Fig. 2, § 40.

Fig. 12, § 35.

Über die Bruchfläche vergleiche Fig. 13 (Taf. XV). Wie ersichtlich, entstehen je bei dem Bruche 6 Stücke: die beiden Endkörper sowie vier Dreiecke, welche aus den Rippen herausbrechen.

Die Gleichung 6, § 34, würde mit $\varphi = \frac{8}{3}$ liefern

für No. 1 $K_d = \frac{3}{8}\frac{72\,500}{637} . 15{,}2 = 719$ kg/qcm,

- - 2 $K_d = \frac{3}{8}\frac{73\,750}{616} . 15{,}1 = 676$ kg/qcm,

also viel zu kleine Werte.

Aber auch eine einfache Überlegung zeigt, daß die Gleichung 6, § 34, für Stäbe mit kreuzförmigem Querschnitt nicht brauchbar sein kann.

Ein kreuzförmiger Querschnitt mit verhältnismäßig geringer Rippenstärke s kann in der Weise entstanden gedacht werden, daß man zwei gleiche rechteckige Querschnitte sich rechtwinklig kreuzend aufeinander legt. Aus der Natur der Inanspruchnahme auf Drehung folgt dann ohne weiteres, daß der Widerstand dieses kreuzförmigen Querschnittes doppelt so groß sein muß wie derjenige jedes der beiden Rechtecke, sofern zunächst davon abgesehen wird, daß sich in der Mitte Teile der beiden Rechtecke decken. Nachdem nun für rechteckigen Querschnitt die Gleichung

$$M_d = \frac{2}{9} K_d b^2 h$$

als zutreffend erkannt worden ist, nach welcher die Breite b des Querschnittes das Drehungsmoment im quadratischen Verhältnisse beeinflußt, während die Höhe nur mit der ersten Potenz wirksam ist, so ergibt sich auf Grund der eben angestellten Erwägung für den kreuzförmigen Querschnitt

$$\left.\begin{aligned} M_d &= \frac{2}{9} K_d s^2 h + \frac{2}{9} K_d s^2 (h - s), \\ &= \frac{2}{9} K_d s^2 (2h - s) \\ &= \frac{2}{9} K_d s^2 h \left(2 - \frac{s}{h}\right) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

d. h. wie für einen rechteckigen Querschnitt, dessen Breite gleich der Rippenstärke und dessen Höhe durch Aneinandersetzen der Rippen erhalten wird.

Zur Prüfung der so gewonnenen Gleichung 2 ziehen wir die Versuchsergebnisse heran. Dieselben liefern
für No. 1

$$K_d = 4{,}5 \frac{72\,500}{2{,}14^2 (2 \,.\, 15{,}2 - 2{,}14)} = 2520 \text{ kg/qcm},$$

für No. 2

$$K_d = 4{,}5 \frac{73\,750}{2{,}11^2 (2 \,.\, 15{,}1 - 2{,}11)} = 2655 \text{ kg/qcm},$$

Durchschnitt 2587 kg/qcm.

Das sind Werte, die denjenigen entsprechen, welche unter a für rechteckigen Querschnitt erhalten worden sind. Die auf dem Wege einfacher Überlegung gewonnene Gleichung 2 liefert demnach Zahlen, welche mit den Versuchsergebnissen in guter Übereinstimmung stehen.

Gußeisen B.

a) Stäbe mit quadratischem Querschnitt.
S. Fig. 1, $l = 530$.

α) Unbearbeitet.

No.	Breite b cm	Höhe h cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^3 h}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	3,18	3,32	20 750	2776	Bruch gesund.
2	3,19	3,28	19 000	2561	- -
3	3,30	3,47	21 250	2530	- -
4	3,10	3,26	17 500	2514	Bruch gesund bis auf eine blasige Stelle.
Durchschnitt	3,22	3,34		2598	

Aus den hierbei erhaltenen Bruchstücken wurden 3 Zugstäbe herausgearbeitet.

No.	Durchmesser d cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Bruchbelastung Z kg	Zugfestigkeit $K_z = Z : \frac{\pi}{4} d^2$ kg/qcm	Bemerkungen
1	2,38	4,45	7860	1766	Bruch gesund.
2	2,37	4,41	7150	1621	- -
3	2,38	4,45	7340	1649	- -
		Durchschnitt		1679	

$$K_d : K_z = 2598 : 1679 = 1{,}55 : 1.$$

β) Bearbeitet.

No.	Quadratseite b cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^3}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	3,00	17 250	2875	Bruch gesund.
2	3,03	16 750	2710	- -
3	3,22	21 000	2830	- -
4	3,20	19 250	2643	Bruch gesund bis auf eine blasige Stelle.
	Durchschnitt		2764	

Aus Rohgußstäben von 38 bis 39 mm Seite gehobelt.

$$K_d : K_z = 2764 : 1679 = 1{,}65 : 1.$$

Hiernach erscheint die Drehungsfestigkeit der bearbeiteten, also von der Gußhaut befreiten Stäbe um

$$100 \frac{2764 - 2598}{2598} = 6{,}4\,\%$$

größer als diejenige der unbearbeiteten Stäbe von quadratischem Querschnitt.

Die Verdrehung, namentlich auch die bleibende, welche der bearbeitete Stab bis zum Bruche erfährt, ist wesentlich größer als diejenige des unbearbeiteten.

(Vergl. § 22, Ziff. 3, das Folgende unter b, β, sowie in diesem Paragraphen unter „Gußeisen A", b Schlußsatz.)

b) Hohlstäbe mit kreisförmigem Querschnitt.

S. Fig. 3.

α) Unbearbeitet.

No.	Durchmesser d cm	Durchmesser d_0 cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} d$ kg/qcm	Bemerkungen
1	10,2	7,0	231 500	1428	Bruch gesund.
2	10,25	6,9	243 750	1451	Bruch bis auf eine kleine Stelle gesund.
		Durchschnitt		1439	

$K_d : K_z = 1439 : 1679 = 0{,}86 : 1.$

β) Außen abgedreht.

Ursprünglicher Durchmesser 102 mm.

No.	Durchmesser d cm	Durchmesser d_0 cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} d$ kg/qcm	Bemerkungen
1	9,65	7	173 500	1360	Bruch bis auf eine ganz unerhebliche Stelle gesund, Kern um 1 mm verlegt, Bruchfläche siehe Fig. 11 (Taf. XIV)

$K_d : K_z = 1360 : 1679 = 0{,}81 : 1.$

Hiernach würde der bearbeitete Hohlzylinder eine etwas geringere Drehungsfestigkeit aufweisen als die unbearbeiteten; doch kann ein Urteil hierüber nicht gefällt werden, da der Einfluß ungleicher Wandstärke (einerseits reichlich 12, andererseits reichlich 14 mm) das Ergebnis trübt, und da überdies durch Verringerung des äußeren Durchmessers das Verhältnis $d_0 : d$ größer geworden ist. (Vergl. unter Gußeisen A, c letzten Absatz sowie Bemerkung 1 am Schlusse des § 36.)

c) Stäbe mit ⌊-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

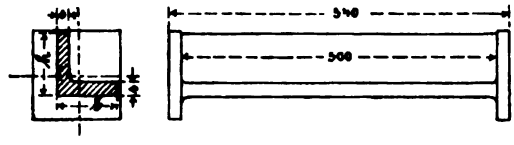


Fig. 14.

α) Seitenverhältnis $b : h = 1 : 1$.

No.	Abmessungen b cm	h cm	s cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	10,2	10,4	2,15	47250	2494	Bruch gesund bis auf eine ganz unerhebliche Stelle.
2	10,2	10,2	2,15	47250	2520	Desgleichen.
			Durchschnitt		2507	

Bruch erfolgt plötzlich, ein dreieckiges Stück in der Nähe einer der beiden Endplatten bricht heraus.

(Vergl. die Versuche unter „Gußeisen A“, g, Fig. 13, Taf. XV.)

β) Seitenverhältnis $b : h = 0{,}6 : 1$.

No.	Abmessungen b cm	h cm	s cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)}$ kg/qcm	Bemerkurgen
1	6,3	10,4	2,15	37750	2526	Bruch gesund.
2	6,0	10,3	2,10	35000	2515	Desgl. bis auf eine unerhebliche Stelle.
			Durchschnitt		2520	

Bruch erfolgt plötzlich; ein Dreieck bricht aus wie unter α.

γ) $b = s$, Querschnitt: Rechteck.

No.	Abmessungen b cm	h cm	Bruchmoment M_d kg . cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^2 h}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	2,00	10,3	24500	2700	Bruch gesund bis auf eine sehr kleine Stelle.
2	2,02	10,35	24500	2611	Desgl.
3	2,02	10,35	25250	2679	-
		Durchschnitt		2663	

Bruch erfolgt plötzlich in der Nähe einer der beiden Endplatten.

$$K_d : K_z = 2663 : 1679 = 1{,}59 : 1.$$

Werden die unter α und β auf Grund der Gleichung

$$K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)} \quad \ldots\ldots 3)$$

erhaltenen Drehungsfestigkeiten verglichen mit den unter γ erzielten, so ergibt sich das Mittel aus den ersteren allerdings um

$$100\,\frac{2663 - 0{,}5\,(2507 + 2520)}{2663} = 5{,}7\,\%$$

geringer. Dieser Unterschied ist aber verhältnismäßig so gering, daß die Gleichung 3, welche auf dieselbe Weise wie Gleichung 1 gebildet wurde, als brauchbare Ergebnisse liefernd bezeichnet werden muß. Hierbei wird allerdings festzuhalten sein, daß die Rippenstärke wenigstens $\frac{1}{5}$ der Höhe beträgt.

d) Stäbe mit □-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

Fig. 5.

Die untersuchten Stäbe unterscheiden sich von den Prismen, welche aus dem Gußeisen A gefertigt worden waren, und über deren Prüfungsergebnisse dort unter e) berichtet wurde, dadurch, daß hier die Rippen- und Stegstärke verhältnismäßig größer ist.

α) Höhe b_0 der Querrippen gleich der doppelten Rippenstärke.

No.	Abmessungen				Bruchmoment M_d	Bemerkungen
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	kg . cm	
1	6,1	10,2	4,0	6,1	38500	Bruch gesund.
2	6,2	10,3	4,1	6,1	39000	- -

Der Bruch beginnt damit, daß gleichzeitig oder unmittelbar aufeinander folgend die beiden Querrippen von außen einreißen, und zwar die eine bei m, die andere bei n, Fig. 5, also diametral gegenüber liegend.

Wird nach dem Einreißen der Rippen der Stab weiter verdreht, so setzt sich der Riß durch den Steg hindurch fort bei

nahezu derselben Belastung, welche das Einreißen der Querrippen herbeiführte.

β) Höhe b_0 der Querrippen gleich der Rippenstärke.

No.	Abmessungen				Bruchmoment M_d	Bemerkungen
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	kg . cm	
1	4,1	10,1	2,1	5,9	34 750	Bruch gesund.
2	4,2	10,0	2,05	5,9	36 250	- -

Bruch erfolgt plötzlich an den Enden.

Die Stäbe unter α mit $b_0 = \sim 4$ cm halten hiernach nicht viel mehr als diejenigen unter β mit $b_0 = \sim 2$ cm.

Die Prüfung der Ergebnisse auf Grund der Gleichung

$$K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2 (h + 2\, b_0)}, \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

worin

s die mittlere Steg- und Rippenstärke bezeichnet,

führt zu folgenden Werten, wenn hierbei für s die Stegstärke gesetzt wird,

1 α) $\quad K_d = 4{,}5 \dfrac{38\,500}{2{,}1^2 (10{,}2 + 2 \,.\, 4)} = 2159$ kg/qcm,

2 α) $\quad K_d = 4{,}5 \dfrac{39\,000}{2{,}1^2 (10{,}3 + 2 \,.\, 4{,}1)} = 2151$ kg/qcm,

Durchschnitt 2155 kg/qcm.

1 β) $\quad K_d = 4{,}5 \dfrac{34\,750}{2^2 (10{,}1 + 2 \,.\, 2{,}1)} = 2734$ kg/qcm,

2 β) $\quad K_d = 4{,}5 \dfrac{36\,250}{2{,}15^2 (10 + 2 \,.\, 2{,}05)} = 2502$ kg/qcm,

Durchschnitt 2618 kg/qcm.

Der für die Stäbe 1 α) und 2 α) erhaltene Mittelwert von 2155 kg/qcm bleibt um

$$100\,\frac{2663 - 2155}{2663} = \sim 19\,\%$$

unter der Drehungsfestigkeit der Stäbe mit rechteckigem Querschnitt (c, γ), während der Durchschnittswert für die Stäbe 1 β) und 2 β) nur um

$$100\,\frac{2663 - 2618}{2663} = \sim 1{,}7\,\%$$

davon abweicht.

Der Widerstand, welchen die Stäbe unter β dem Bruche durch Drehung entgegensetzen, ist demnach so groß wie für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, dessen Breite gleich dem Mittel aus der Steg- und der Rippenstärke und dessen Höhe gleich $h + 2\,b_0$. Die Stäbe unter α dagegen leisten einen wesentlich geringeren Widerstand.

Hieraus und in Erwägung des bei dem Gußeisen A unter e) gefundenen Ergebnisses schließen wir: Wenn Stäbe mit [-förmigem Querschnitt gegenüber Drehungsbeanspruchung widerstandsfähig sein sollen, so müssen der Steg und die Rippen (Flanschen) verhältnismäßig kräftig und überdies die Höhe b_0 der letzteren gering gehalten werden. Dann erreicht die Widerstandsfähigkeit diejenige eines rechteckigen Stabes, dessen Breite gleich der Steg- und Rippenstärke s und dessen Höhe gleich $h + 2\,b_0$ ist.

C. Zusammenstellung der Drehungsfestigkeit für die Querschnittsgrundformen des Kreises und des Rechteckes.

Zugfestigkeit des Gußeisens A 1579 kg/qcm
- - - B 1679 kg/qcm.

No.	Querschnittsform	Drehungsfestigkeit K_d in kg/qcm		in Teilen der Zugfestigkeit	
		A	B	A	B
1	Kreis	1618	—	1,02	—
2	Kreisring	1297	1439	0,82	0,86
3	Rechteck				
	$b:h = 1:1$	2228	2598	1,42	1,55
	$1:2{,}5$	2529	—	1,60	—
	$1:5$	2366	2663	1,50	1,59
	$1:9$	2508	—	1,59	—
4	Hohlquadrat	1788	—	1,13	—

2. Drehungswinkel.

In dieser Hinsicht liegen eine größere Anzahl von Versuchen Bauschingers vor.

Zivilingenieur 1881, S. 115 u. f.

Bauschinger hatte sich die Aufgabe gestellt, die von de Saint-Venant herrührende Gleichung

$$\vartheta = \psi M_d \frac{\Theta'}{f^4} \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

zu prüfen. In derselben haben ϑ M_d Θ' f und β die unter V, S. 302 angegebene Bedeutung, während ψ einen Koeffizienten bezeichnet, welcher rechnungsmäßig betragen soll[1])

für den Kreis und die Ellipse $\psi = 4\pi^2 = 39{,}5$,
für das Rechteck, wenn $h:b = 1:1$, $\psi = 42{,}68$,
- $h:b = 2:1$, $\psi = 42{,}0$,
- $h:b = 4:1$, $\psi = 40{,}2$,
- $h:b = 8:1$, $\psi = 38{,}5$,

[1]) Comptes rendus 1878, t. LXXXVII, S. 893 u. f.
- - 1879, t. LXXXVIII, S. 143.

für das gleichseitige Dreieck $\psi = 45$,
für das regelmäßige Sechseck $\psi = 41$,
für den Kreisausschnitt, wenn der Zentriwinkel
45^0, $\psi = 42{,}9$,
90^0, $\psi = 42{,}4$,
180^0, $\psi = 40{,}8$.

Wird das gleichseitige Dreieck außer acht gelassen, so unterscheiden sich die Werte von ψ nicht bedeutend, infolgedessen bereits de Saint-Venant für ψ den abgerundeten Mittelwert 40 vorgeschlagen hat.

Bauschinger ließ 5 Paar Probestücke aus Gußeisen, je von 1 m Länge, herstellen, und zwar:

a) 2 Stäbe von kreisförmigem Querschnitt,
b) 2 - - elliptischem - $a : b = \sim 2 : 1$,
c) 2 - - quadratischem -
d) 2 - - rechteckigem - $h : b = \sim 2 : 1$,
e) 2 - - - - $h : b = \sim 4 : 1$.

Gleichung 5 ist auch auf andere Querschnitte angewendet worden, wohl infolge des Umstandes, daß de Saint-Venant von ihr sagt: „La formule peut être appliquée non seulement à des sections elliptiques, mais à des sections de toute forme, en faisant varier fort peu la fraction que nous avons appelée ψ". Das kann ohne Nachweis im einzelnen Falle zu großen Fehlern führen. So ergibt sich beispielsweise für den kreisförmigen Hohlzylinder mit einer im Verhältnis zum Durchmesser geringen Wandstärke bei Einführung der Bezeichnungen S. 370 u. 371

$$\Theta' = \frac{\pi}{4} d_m^{\,3} s \qquad f = \pi d_m s,$$

folglich nach Gleichung 5, wenn $\psi = 4\pi^2$ gesetzt wird,

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} M_d \beta \frac{1}{d_m s^3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5a)$$

während Gleichung 6, § 32 liefert

$$\vartheta = \frac{4}{\pi} M_d \beta \frac{1}{d_m^{\,3} s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5b)$$

Beispielsweise findet sich für $d_m = 20$ cm, $s = 1$ cm

nach Gleichung 5a $\vartheta = \frac{1}{\pi} M_d \beta \frac{1}{20}$,

nach Gleichung 5b $\vartheta = \frac{1}{\pi} M_d \beta \frac{1}{2000}$,

d. i. im ersteren Falle 100 mal mehr!
Gleichung 5 gilt eben nicht für den Hohlzylinder.

Die Größe der Querschnitte betrug

bei den Stäben a) bis d) $f = 50$ qcm,
- - - e) $f = 25$ -

Für gleiche Drehungsmomente (also bei im allgemeinen ungleicher Anstrengung des Materials) läßt die Gleichung 5 mit den angegebenen Einzelwerten von ψ Drehungswinkel ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c, ϑ_d, ϑ_e erwarten, welche sich verhalten wie

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}25 : 1{,}13 : 1{,}40 : 9{,}1.$$

Gemessen hat Bauschinger

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}24 : 1{,}20 : 1{,}47 : 9{,}65.$$

Der Vergleich beider Verhältnisreihen zeigt, daß die für den kreisförmigen und für den elliptischen Querschnitt auf dem Wege des Versuches ermittelten Verhältniszahlen mit den berechneten in sehr guter Übereinstimmung stehen. Bei den übrigen Querschnitten ist dies nicht in dem gleichen Maße der Fall. Berücksichtigt man jedoch, daß die Entwicklung der Gleichung 5 Unveränderlichkeit des Schubkoeffizienten oder Dehnungskoeffizienten voraussetzt, während diese Koeffizienten für Gußeisen tatsächlich veränderliche, mit wachsender Anstrengung zunehmende Werte aufweisen, welcher Umstand bedingt, daß die bei gleichem Momente stärker angestrengten Stäbe — das Paar e) ist stärker beansprucht als d), d) bedeutender als c) und c) mehr als a) — einen größeren Drehungswinkel ergeben müssen, als die Rechnung erwarten läßt, so darf die Übereinstimmung der beiden Verhältnisreihen immerhin als eine gute bezeichnet werden.[1])

Zur Prüfung der Gleichung 5 können auch noch die Drehungsversuche herangezogen werden, welche Bauschinger mit kreisförmigen und quadratischen Wellen aus verschiedenen Rohmaterialien (Siemens-Martinstahl von 6 verschiedenen Härtegraden, Bessemerstahl von 5 verschiedenen Härtegraden, Feinkorneisen und sehnigem Eisen) ausgeführt hat.

---

[1]) Vergl. in bezug auf Hohlzylinder u. s. w. Fußbemerkung S. 349.

Nach Gleichung 5 ergibt sich, da der Durchmesser bezw. die Quadratseite dieser Wellen je 100 mm betrug, daß die Drehungswinkel sich verhalten müssen wie

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = 4\pi^2 M_d \frac{\frac{\pi}{32} 10^4}{\left(\frac{\pi}{4} 10^2\right)^4} \beta : 42{,}68\, M_d \frac{\frac{1}{6} 10^4}{10^8} \beta = 1 : 0{,}698,$$

Gleichheit des Schubkoeffizienten vorausgesetzt.

Die Messung an den 13 Wellenpaaren lieferte im Mittel

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = 1 : 0{,}696$$

allerdings mit Schwankungen der Einzelwerte zwischen 0,633 bis 0,747. Das Mittel der beobachteten Werte stimmt hiernach sehr gut mit der berechneten Drehung überein.

Die Herbeiführung des Bruches der oben unter a) bis e) erwähnten 10 unbearbeiteten Gußeisenkörper durch Verdrehung ergab nach Bauschinger folgende aus Gleichung 6, § 34, berechnete Werte für die Drehungsfestigkeit

a) Kreis $K_d = \frac{1915 + 1985}{2} = 1950$ kg/qcm,

b) Ellipse $K_d = \frac{2362 + 2720}{2} = 2541$ -

c) Quadrat $K_d = \frac{2337 + 2569}{2} = 2453$ -

d) Rechteck $h : b = \sim 2 : 1$ $K_d = \frac{2561 + 2919}{2} = 2740$ -

e) - $h : b = \sim 4 : 1$ $K_d = \frac{3390 + 3134}{2} = 3262$ -

3. Versuche mit Rundstäben und mit Schrauben aus Schweiß- und Flußeisen.

Über diese vom Verfasser in erster Linie zu dem Zweck durchgeführten Untersuchungen, den Einfluß der Gewindegänge auf die Widerstandsfähigkeit der Schrauben festzustellen, ist aus-

führlich in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1895, S. 854 bis 860 und S. 889 bis 894 berichtet[1]). Unter Hinweis auf diese Veröffentlichung muß sich Verfasser hier auf die Anführung einiger der Hauptergebnisse beschränken.

Rechtsgängige Schrauben aus Schweißeisen, durch ein linkssinniges Moment verdreht, erfahren Einreißen bezw. Zerreißen der Gewindegänge von außen, wie die Fig. 15 bis 18, Taf. XVI, deutlich erkennen lassen, und zwar bei einer Beanspruchung, durch welche die Drehungsfestigkeit des Kernquerschnittes noch nicht erschöpft ist, im Durchschnitt bei rund 0,8 der Drehungsfestigkeit des Kernquerschnittes.

Fig. 15 und 17 gelten für Schrauben aus gezogenem, Fig. 16 und 18 für Schrauben aus gewöhnlichem (vorher nicht überanstrengtem) Schweißeisen.

Linksgängige Schrauben aus Schweißeisen zeigen bei linksdrehendem Momente diese Rißbildung nicht, ebensowenig rechtsgängige Schrauben aus Schweißeisen bei rechtsdrehendem Momente.

Bei Schrauben aus zähem Flußeisen tritt eine Rißbildung überhaupt nicht auf. Hierin liegt — nebenbei bemerkt — ein Beitrag zur Wertschätzung des Flußeisens gegenüber dem Schweißeisen; einen weiteren liefert der Vergleich des Aussehens der Oberflächen der verdrehten Schweißeisenstäbe Fig. 19 bis 23, Taf. XVI, mit dem Aussehen der Oberflächen der verdrehten Flußeisenstäbe Fig. 24 und 25, Taf. XVI[2]).

Rundstäbe erfahren durch die Verdrehung eine Zunahme der Länge.

Bei Schrauben hat die Verdrehung durch ein linksdrehendes Moment zur Folge eine Verlängerung, wenn sie rechtsgängig sind, und eine Verkürzung, wenn sie linksgängig sind. Die Ganghöhe wird im ersteren Falle kleiner, im letzteren größer.

Die Zugfestigkeit der Schrauben ist größer als diejenige der Rundstäbe aus dem gleichen Material (Schweißeisen, Flußeisen), eine Folge der Hinderung der Querzusammenziehung.

Die Drehungsfestigkeit der rechtsgängigen Schrauben aus Schweißeisen ist bei linksdrehendem Momente kleiner als diejenige der Rundstäbe aus dem gleichen Material.

---

[1]) S. auch „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 244 u. f.

[2]) Der Wert der Verdrehungsprobe zur Feststellung der Güte des Materials ist heute viel zu wenig gewürdigt.

Fig. 15, § 35.

Fig. 16.

Fig. 17.

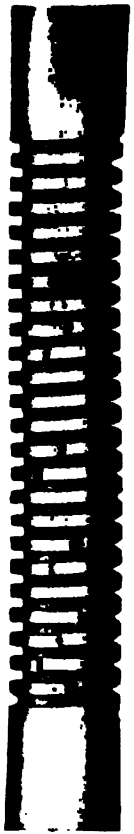


Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

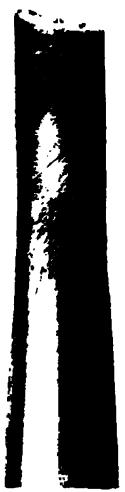


Fig. 23.

Fig. 24.

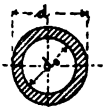
Fig. 25, § 35.

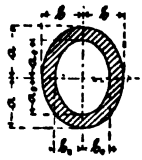
Bei Flußeisen, das durch ein linkssinniges Moment verdreht wird, ist die Drehungsfestigkeit der rechtsgängigen Schrauben nahezu gleich derjenigen der Rundstäbe, diejenige der linksgängigen Schrauben dagegen kleiner.

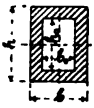
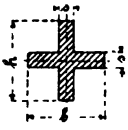
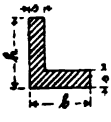
Während die Zugfestigkeit der Schrauben aus gezogenem Schweißeisen bedeutend größer ist als diejenige der Schrauben aus nicht gezogenem Schweißeisen, erscheint dies bei der Drehungsfestigkeit nur in geringem Maße der Fall.

§ 36. Zusammenfassung.

Nach Maßgabe der in den Paragraphen 32 bis 34 enthaltenen Erörterungen sowie auf Grund der in § 35, Ziff. 1 und 2, niedergelegten Versuchsergebnisse lassen sich folgende Beziehungen zusammenstellen.

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment M_d	Drehungswinkel ϑ	$K_d : K_z$ für Gußeisen
1		$\frac{\pi}{16} k_d d^3$	$\frac{32}{\pi} \frac{M_d}{d^4} \beta$	reichlich 1
2		$\frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_0^4}{d}$	$\frac{32}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} \beta$	0,8[1])
3	$a > b$	$\frac{\pi}{2} k_d a b^2$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \beta$	1 bis 1,25[2])

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment M_d	Drehungswinkel ϑ	$K_d : K_z$ für Gußeisen
4	 $a > b$ $a_0 : a = b_0 : b = m$	$\frac{\pi}{2} k_d \frac{a b^3 - a_0 b_0^3}{b}$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 (1 - m^4)} \beta$	0,8 bis 1[3]
5		$\frac{1}{1{,}09} k_d b^3$	$0{,}967 \frac{M_d}{b^4} \beta$	—
6	$h > b$	$\frac{2}{9} k_d b^2 h$	für $h : b = 1 : 1$ $3{,}56\ M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$, für $h : b = 2 : 1$ $3{,}50\ M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$, für $h : b = 4 : 1$ $3{,}35\ M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$, für $h : b = 8 : 1$ $3{,}21\ M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$ Nach Versuchen des Verfassers, welche jedoch noch nicht ausreichend erscheinen, werden die Zahlenwerte 3,56, 3,50, 3,35 und 3,21 einer Abänderung bedürfen. (Vergl. S. 541.)	1,4 bis 1,6[3]

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment M_d	Drehungswinkel ϑ	$K_d : K_s$ für Gußeisen
7		$\frac{1}{20} k_d b^3$	$46{,}2 \frac{M_d}{b^4} \beta$	—
8	 $h > b$ $h_0 : h = b_0 : b$	$\frac{2}{9} k_d \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b}$	—	1 bis 1,25[2])
9		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + 2 b_0)$	—	1,4 bis 1,6[2])
10		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + b - s)$	—	1,4 bis 1,6[2])
11	$s = b - b_0 = 0{,}5 (h - h_0)$	$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + 2 b_0)$	—	1,4 bis 1,6[2])
12		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + b - s)$	—	1,4 bis 1,6[2])

Die Zugfestigkeiten K_z und die Drehungsfestigkeiten K_d setzen Gußeisen voraus, wie es zu zähem, festem Maschinenguß Verwendung findet. Die Drehungsfestigkeiten wurden an unbearbeiteten Stäben, Fig. 1 bis Fig. 7, § 35, und Fig. 14, § 35, (in getrockneten Formen gegossen) ermittelt.

Die Versuchsstäbe No. 6 (sofern $h > b$), No. 9 bis 12 brachen immer in der Nähe der Endplatten, entsprechend dem Umstande, daß sich an diesen Stellen der Ausbildung der Querschnittswölbung ein Hindernis bietet, welches trotz der Hohlkehle, mit welcher der prismatische Teil an die Endplatten anschließt, hier zum Bruche führt. Der letztere ist die Folge einer gleichzeitigen Inanspruchnahme durch Schub- und durch Normalspannungen, wie in § 34, Ziff. 3, erörtert worden ist. (Vergl. auch § 35, Gußeisen A, a.) Der ermittelte Wert von K_d muß deshalb kleiner sein als die tatsächliche Drehungsfestigkeit. In denjenigen Fällen der Anwendung, in welchen die Sachlage hinsichtlich des Anschlusses eines auf Drehung in Anspruch genommenen Stabes an einen solchen mit größerem Querschnitt eine ähnliche ist wie bei den Versuchskörpern, schließen die angegebenen Werte von K_d die Berücksichtigung der gleichzeitigen Inanspruchnahme durch Normalspannungen in sich. In Fällen der reinen Drehungsanstrengung führt die Verwendung dieser Werte zu einer etwas größeren Sicherheit, was im Sinne des Zweckes unserer Festigkeitsrechnungen zu liegen pflegt.

Die Gleichungen für No. 11 und No. 12 bedingen kräftige Rippen, etwa von $s : h = 1 : 5$ an. Außerdem ist für No. 11 noch zu fordern, daß b_0 nicht wesentlich mehr als $s = b - b_0$ beträgt.

[1]) Dieser Wert hängt ab von dem Verhältnis $d_0 : d$. In dem Maße, in welchem sich dasselbe der Null nähert, steigt er etwa bis reichlich 1. Die Zahl 0,8 gilt für $d_0 : d$ ungefähr gleich 0,7.

[2]) Es sind um so geringere, der kleineren Zahl näher kommende Werte zu wählen, je mehr sich je beziehungsweise die Ellipse dem Kreise, das Rechteck dem Quadrate, der ⌶- und der ⊏-Querschnitt der Quadratform ($b_0 = 0$, $h = s$), ebenso der +- und der ⌊-förmige Querschnitt der letzteren ($h = b = s$) nähern.

[3]) Hier sind die Bemerkungen [1]) und [2]) zu berücksichtigen. Je kleiner verhältnismäßig a_0 und b_0 (gegenüber a und b)

beziehungsweise b_0 und h_0 (gegenüber b und h) sind, um so mehr nähert sich unter sonst gleichen Verhältnissen der Koeffizient der oberen Grenze. Das gleiche gilt, je langgestreckter der Querschnitt ist.

In der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 1099 u. f. bringt Autenrieth unter Zugrundelegung gewisser Annahmen und unter Stützung auf die Versuchsergebnisse des Verfassers die Ausdrücke für M_d, bezw. K_d bei denjenigen Querschnitten, welche einen Mittelpunkt besitzen — in der Zusammenstellung No. 1 bis 10 — auf eine gemeinsame Form. Er kommt dabei im Falle des rechteckigen Querschnittes No. 6 und der ihm verwandten Querschnittsformen No. 8 bis 10 statt des Koeffizienten $\frac{9}{2} = 4{,}5$ auf 5,14, eine Folge der für die Schubspannungen gemachten Annahme. Hinsichtlich des Weiteren muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

VI. Schub.

§ 37. Allgemeines.

Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt.

Der Fall der Inanspruchnahme auf Schub wird dann als vorhanden betrachtet, wenn sich die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt ersetzen lassen durch eine Kraft (Schubkraft), welche in die Ebene des letzteren fällt und die Stabachse senkrecht schneidet.

Erfüllt erscheint diese Voraussetzung nur bei einer Sachlage, wie sie in Fig. 1 dargestellt ist, entsprechend dem Arbeitsvorgange bei einer Schere zum Schneiden von Eisen. Aber auch hier nur in dem Augenblick, in welchem der Stab von den Kanten der beiden Scherblätter A und B gerade berührt wird; denn sobald das obere Blatt sich weiter vorwärts bewegt, dringen beide Blätter in den Stab ein, Fig. 2: an die Stelle der Berührung des letzteren in zwei Linien durch A und B tritt eine solche in zwei Flächen.

Damit rückt die obere Kraft S nach rechts, die untere nach links; es entsteht neben der Schubkraft S ein rechtsdrehendes Kräftepaar, welches Biegungsbeanspruchungen wachruft, die in dem betrachteten Beispiele allerdings zurückzutreten pflegen.

Wir erkennen, daß — streng genommen — Schubinanspruchnahme allein niemals vorkommen kann, daß vielmehr die Schubkraft S immer von einem biegenden Moment begleitet sein wird.

Die Schubkraft S ruft in dem betrachteten Querschnitt Schubspannungen wach, die im allgemeinen von Flächenelement zu Flächenelement veränderlich sein werden, und bezüglich welcher zunächst nur bekannt ist, daß sie, je multipliziert mit dem zugehörigen Flächenelement und zusammengefaßt, eine Resultante geben müssen, welche gleich und entgegengesetzt S ist. Mit der Unterstellung, daß die Schubspannungen in den verschiedenen Flächenelementen entgegengesetzt S gerichtet, also unter sich parallel sind, und die gleiche Größe τ über den ganzen Querschnitt von der Größe f besitzen, findet sich

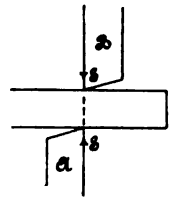


Fig. 1.

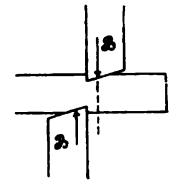


Fig. 2.

$$S = \tau f \text{ oder } \tau = \frac{S}{f}, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

woraus mit

k_s als zulässiger Schubanstrengung

folgt

$$S \leqq k_s f \text{ oder } k_s \geqq \frac{S}{f}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Hinsichtlich der gemachten Annahme, betreffend die Richtung und die Größe der Schubspannungen, ist folgendes zu bemerken.

Greifen wir den kreisförmigen Querschnitt, Fig. 3, heraus, so müßte hiernach beispielsweise im Querschnittselement des Umfangspunktes C bei senkrecht nach unten wirkender Schubkraft S

die Schubspannung vertikal aufwärts gerichtet sein, während sie tatsächlich in die Richtung der Tangente im Punkte C des Kreises fallen muss, es sei denn, daß in diesem Umfangspunkte eine äußere Kraft tätig wäre, welche eine andere Richtung von τ bedingen würde. In den Punkten C bis D des rechteckigen Querschnittes, Fig. 4, wird die entgegengesetzt S gerichtete Schub-

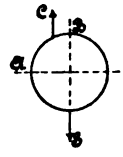


Fig. 3.

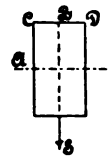


Fig. 4.

spannung in Wirklichkeit Null sein müssen — sofern äußere Kräfte hier nicht angreifen —, während sie nach der obigen Voraussetzung in allen Flächenelementen die gleiche Größe besitzen sollte u. s. f.

Hieraus folgt, daß die Unterstellung, welche zu der Beziehung 1 und 2 führte, wenigstens im allgemeinen unzutreffend ist.

§ 38. Die Schubspannungen im rechteckigen Stabe.

Wir erkannten in der Einleitung, daß die Schubkraft immer von einem biegenden Moment begleitet sein wird. Davon ausgehend, stellen wir uns die Aufgabe, für die in Fig. 1 und 2 gezeichnete Sachlage — Balken einerseits eingespannt, am anderen freien Ende belastet — die Größe der Schubspannungen im Abstande η von der y-Achse, die hinsichtlich der Inanspruchnahme auf Biegung als Nullachse erscheint, zu ermitteln.

Zu dem Zwecke denken wir uns ein Körperelement $ABCD$, Fig. 1 bis 3, von der Länge $x_1 - x$, der Breite b und der Höhe $e - \eta$ aus dem Stabe herausgeschnitten. Auf die Stirnflächen AB und CD desselben, Fig. 3, wirken Normalspannungen σ, welche mit dem Abstande η wachsen. Nach § 16 darf unter der Voraussetzung, daß der Dehnungskoeffizient unveränderlich ist, diese Zunahme proportional der ersten Potenz von η gesetzt werden, wie auch Fig. 6, § 16, daselbst erkennen läßt.

Nach Gleichung 9, § 16, ist für den Querschnitt AB, da hier $M_b = P x$, die Normalspannung im Abstande η

$$\sigma_\eta = \frac{P x}{\Theta} \eta$$

und die Normalspannung im Abstande e

$$\sigma_e = \frac{P x}{\Theta} e,$$

sofern $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die y-Achse.

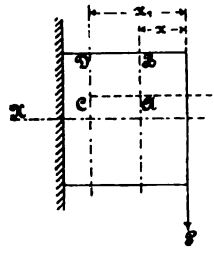


Fig. 1.

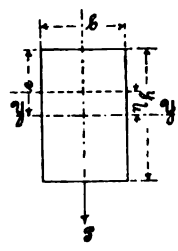


Fig. 2.

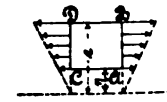


Fig. 3.

Die auf die Querschnittsfläche AB von der Größe $b\,(e-\eta)$ wirkenden Spannungen liefern zusammengefaßt eine Normalkraft

$$N = \frac{\sigma_\eta + \sigma_e}{2} b\,(e-\eta) = \frac{P x}{\Theta} \frac{e+\eta}{2} b\,(e-\eta) = \frac{P x}{\Theta} \frac{e^2-\eta^2}{2} b.$$

Für den Querschnitt CD findet sich wegen $M_b = P x_1$ auf ganz gleichem Wege diese Normalkraft zu

$$N_1 = \frac{P x_1}{\Theta} \frac{e^2-\eta^2}{2} b.$$

Da infolge $x_1 > x$ auch $N_1 > N$ ist, so muß die Kraft

$$N_1 - N = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) \frac{e^2-\eta^2}{2} b$$

durch Spannungen in der Fläche CA, deren Größe gleich $(x_1 - x)\,b$, übertragen werden, sofern an der Mantelfläche BD äußere Kräfte nicht angreifen, was vorausgesetzt werden soll. Diese in der Richtung CA wirkenden und über die Stabbreite b als gleich groß angenommenen Schubspannungen seien mit τ bezeichnet. Dann gilt

$$N_1 - N = \tau\,(x_1 - x)\,b = \frac{P}{\Theta}\,(x_1 - x)\,\frac{e^2 - \eta^2}{2}\,b,$$

woraus

$$\tau = \frac{P}{\Theta}\,\frac{e^2 - \eta^2}{2} = 6\,\frac{P}{b\,h^3}\,(e^2 - \eta^2) = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h}\left\{1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right\} \quad 1)$$

unter Beachtung, daß hier $P = S$.

Die Schubspannung erlangt ihren größten Wert für $\eta = 0$, d. i. für die Stabmitte (Nullachse). Derselbe beträgt

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{f}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

sofern $b\,h = f$ gesetzt wird.

In der Nullachse ist hiernach die Schubspannung um 50 % größer als bei gleichmäßiger Verteilung der Spannungen über den Querschnitt.

Für $\eta = \frac{h}{2}$, d. i. für die am weitesten von der Nullachse abstehenden Punkte, wird $\tau = 0$.

Werden in Fig. 4 die zu den einzelnen Abständen η gehörigen Werte von τ als wagrechte Ordinaten aufgetragen, so wird eine Linie EFE erhalten, welche das Änderungsgesetz von τ klar veranschaulicht. Diese Linie ist für das Rechteck eine Parabel, deren Scheitel F um $OF = \tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h}$ von O abliegt, wie sich ohne weiteres ergibt, wenn die Senkrechte FG als Ordinatenachse gewählt wird und der Gleichung 1 die Form

$$\tau_{max} - \tau = \tau_{max}\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2$$

oder

$$\eta^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\tau_{max} - \tau}{\tau_{max}}$$

gegeben wird.

Die vorstehende Betrachtung ermittelte die Schubspannungen in Ebenen, welche parallel zur Stabachse laufen und senkrecht zur Richtung der Schubkraft S stehen, so z. B. in einem beliebigen Punkt P der Linie $P'P'$, Fig. 4, immer diejenige Schubspannung τ, welche senkrecht zu $P'P'$ wirkt und parallel zur Stabachse (dem-

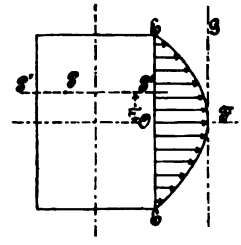


Fig. 4.

nach senkrecht zur Bildebene, Fig. 4) gerichtet ist. Nach § 30 (vergl. auch Fig. 5, § 32) treten die Schubspannungen immer paarweise auf, derart, daß die oben erwähnte Spannung τ auch im Punkte P der Querschnittsebene, also in der Bildebene liegend, vorhanden ist. Infolgedessen ergibt die Gleichung 1 gleichzeitig die Schubspannungen in der Querschnittsebene, und zwar diejenigen, welche im Abstande η in dem Flächenstreifen $b\,d\eta$ wirksam sind. Damit ist in Gleichung 1 ebenfalls das Gesetz gewonnen, nach dem sich die Schubspannungen in der Ebene des Querschnittes verteilen.

Die Forderung, daß diese Spannungen in den Umfangspunkten des Querschnittes immer mit der Tangente an der Begrenzungslinie zusammenfallen müssen, sofern äußere, eine andere Richtung bedingende Kräfte hier nicht angreifen, wird von diesem Verteilungsgesetz erfüllt. In den Punkten der Begrenzungslinie AC, Fig. 4, § 37, fällt die Richtung von τ mit AC zusammen, und in CBD ist $\tau = 0$.

Mit der Veränderlichkeit der Schubspannung ist naturgemäß Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte verknüpft, bezüglich welcher auf § 52 verwiesen sei.

§ 39. Die Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt.

Es bezeichne unter Bezugnahme auf Fig. 1

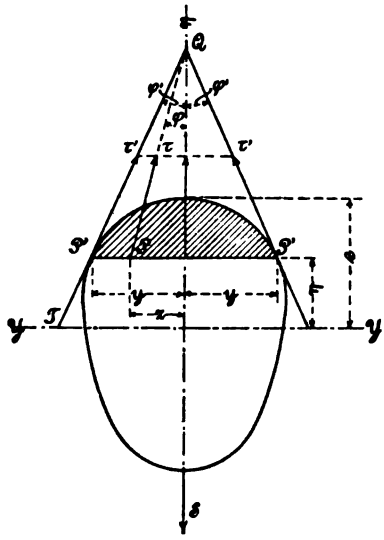


Fig. 1.

S die Schubkraft, welche in die Richtung derjenigen Hauptachse fällt, von der vorausgesetzt werde, daß sie Symmetrieebene des Querschnittes ist,

Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf diejenige Achse, welche zu S senkrecht steht, d. i. die y-Achse,

f die Größe des Querschnittes,

$2y$ die Breite des Querschnittes im Abstande η,

$M_\eta = \int_\eta^e 2\,y\,\eta\,d\eta$ das statische Moment der zwischen den Abständen η und e gelegenen (in der Figur durch Strichlage hervorgehobenen) Fläche des Querschnittes hinsichtlich der y-Achse,

φ' den Winkel, welchen die Tangente im Umfangspunkte P' mit der Symmetrieachse einschließt,

τ' die Schubspannung, welche in dem um η abstehenden Umfangspunkte P' durch S hervorgerufen wird,

k_s die zulässige Anstrengung des Materials bei Inanspruchnahme auf Schub.

Nach dem Vorgange in § 38 schneiden wir aus dem Stabe (vergl. auch Fig. 1 und 2, § 38) ein Körperelement, Fig. 2,

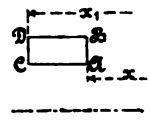


Fig. 2.

heraus. Auf das im Abstande η gelegene Flächenelement $2\,y\,d\,\eta$ der Stirnfläche AB wirkt die Normalspannung

$$\sigma_\eta = \frac{P\,x}{\Theta}\,\eta.$$

Hieraus ergibt sich für die Schnittfläche AB von der Größe $\int_\eta^e 2\,y\,d\,\eta$ die Normalkraft

$$N = \int_\eta^e 2\,y\,\sigma_\eta\,d\,\eta = \frac{P\,x}{\Theta}\int_\eta^e 2\,y\,\eta\,d\,\eta = P\,x\,\frac{M_\eta}{\Theta}.$$

Für die Stirnfläche CD findet sich auf ganz gleichem Wege die Normalkraft

$$N_1 = P\,x_1\,\frac{M_\eta}{\Theta}.$$

Demnach der Überschuß N_1 über N

$$N_1 - N = \frac{P}{\Theta}\,(x_1 - x)\,M_\eta.$$

Diese Kraft muß durch Schubspannungen in der Fläche CA, deren Größe gleich $(x_1 - x)\,2\,y$ ist, übertragen werden. Dieselben,

in Richtung der Stabachse, also senkrecht zur y-Achse wirkend, seien als gleich groß über die Breite $2y$ vorausgesetzt und mit τ_y bezeichnet. Dann folgt

$$N_1 - N = \tau_y \cdot 2(x_1 - x)\, y = \frac{P}{\Theta}(x_1 - x)\, M_\tau,$$

$$\tau_y = \frac{P}{2y} \cdot \frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Bei der vorstehenden Entwicklung wurde angenommen, daß die Änderung des biegenden Momentes beim Vorwärtsschreiten von dem einen zu dem anderen der beiden um $x_1 - x$ voneinander abstehenden Querschnitte nach Maßgabe der Fig. 1, § 38, nur von der Kraft P beeinflußt werde. Für den Fall, daß diese Voraussetzung nicht zutrifft, daß vielmehr der Stab, Fig. 3, außer

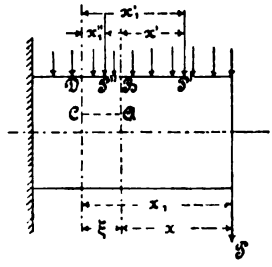


Fig. 8.

durch die am freien Ende angreifende Kraft P auch noch sonst belastet ist, etwa durch eine Kraft P', durch die gleichmäßig über ihn verteilte Last ql sowie durch eine zwischen den beiden Querschnitten angreifende Last P'', so findet sich für

die Stirnfläche AB	die Stirnfläche CD
das biegende Moment:	
$P x + P' x' + q \frac{x^2}{2}$,	$P x_1 + P' x_1' + q \frac{x_1^2}{2} + P'' x_1''$,
die Normalspannung σ_τ:	
$\frac{P x + P' x' + q \frac{x^2}{2}}{\Theta} \eta$,	$\frac{P x_1 + P' x_1' + q \frac{x_1^2}{2} + P'' x_1''}{\Theta} \eta$,

die Normalkraft $\int_{\eta}^{e} 2\,y\,\sigma_\eta\,d\,\eta$:

$$N = \frac{P\,x + P'\,x' + q\,\frac{x^2}{2}}{\Theta}\,M_\eta,\quad N_1 = \frac{P\,x_1 + P'\,x_1' + q\,\frac{x_1^2}{2} + P''\,x_1''}{\Theta}\,M_\eta.$$

Hieraus folgt

$$N_1 - N = \frac{P\,(x_1 - x) + P'\,(x_1' - x') + \frac{q}{2}\,(x_1^2 - x^2) + P''\,x_1''}{\Theta}\,M_\eta.$$

Wegen

$$\xi = x_1 - x = x_1' - x',$$

$$\frac{x_1^2 - x^2}{2} = \frac{x_1 + x}{2}\,(x_1 - x) = \xi\,\frac{x_1 + x}{2}$$

wird

$$N_1 - N = \frac{P\,\xi + P'\,\xi + q\,\frac{x_1 + x}{2}\,\xi + P''\,x_1''}{\Theta}\,M_\eta.$$

Diese Kraft ist durch die Schubspannungen in der Fläche CA vom Inhalte $2\,y\,\xi$ zu übertragen. Soll deren Größe innerhalb dieser Fläche als konstant angenommen werden dürfen, so muß ξ unendlich klein gewählt werden. Dann ergibt sich zunächst

$$N_1 - N = \tau_y\,2\,y\,\xi$$

und die Schubspannung:

1. für den Querschnitt CD im Abstande $x_1 = x + \xi$ vom freien Ende

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\,\frac{x_1 + x}{2} + P''\,\frac{x_1''}{\xi}}{2\,y\,\Theta}\,M_\eta,$$

woraus unter Beachtung, daß, wenn ξ unendlich klein ist, $\frac{x_1''}{\xi} = 1$ sein muß,

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\,x_1 + P''}{2\,y\,\Theta}\,M_\eta;$$

2. für den Querschnitt AB im Abstande x vom freien Ende

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\,x}{2\,y\,\Theta} M_\eta.$$

Im ersteren Falle ist

$$P + P' + q\,x_1 + P'' = S$$

und im zweiten

$$P + P' + q\,x = S.$$

Demnach allgemein

$$\tau_y = \frac{S}{2\,y} \frac{M_\eta}{\Theta}, \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

ganz, wie oben schon gefunden[1]).

Dieser Wert, welcher zunächst nur die wagrechte Schubspannung bestimmt, nach § 30 aber auch gleich der senkrechten Schubspannung in demselben Punkte des in wagrechter Lage gedachten Stabes ist, bedarf noch einer Ergänzung, damit die Forderung befriedigt wird, daß die Schubspannungen in den Querschnittselementen der Umfangspunkte tangential zur Begrenzungslinie gerichtet sind.

Diese Forderung bedingt beispielsweise für das im Punkte P', Fig. 1, gelegene Flächenelement, daß die Schubspannung in die Richtung der Tangente $T\,P'\,Q$ oder $Q\,P'\,T$ fällt. Andererseits fanden wir oben, daß die senkrecht zur y-Achse, also parallel zur Richtung der Schubkraft wirkenden Schubspannungen die nach Gleichung 1 bestimmte Größe τ_y besitzen müssen. Beiden Bedingungen wird durch die Annahme Befriedigung, daß die Schubspannung im Punkte P' beträgt

---

[1]) Die vorstehende Entwicklung läßt sich kürzen und allgemeiner gestalten, wenn von dem Satze Gebrauch gemacht wird, daß der erste Differentialquotient des biegenden Momentes M_b in bezug auf x gleich der Schubkraft ist, d. h.

$$\frac{d\,M_b}{dx} = S.$$

Aus leicht ersichtlichem Grunde wurde dem eingeschlagenen Wege der Vorzug gegeben.

$$\tau' = \frac{\tau_y}{\cos\varphi'} = \frac{S}{2y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots\ldots 2)$$

und für den beliebig zwischen $P'P'$ gelegenen Querschnittspunkt P

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos\varphi} = \frac{S}{2y\cos\varphi}\frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots\ldots 3)$$

Gleichung 3, aus welcher sich die Beziehung 2 mit $\varphi = \varphi'$ als Sonderwert ergibt, spricht aus, daß die sämtlichen Schubspannungen in den um η von YY abstehenden Querschnittselementen sich in demselben Punkte Q schneiden und die gleiche Komponente τ_y in der Richtung von S besitzen.

Wegen $\tau' \leqq k_s$ ergibt sich

$$k_s \geqq \frac{S}{2y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots\ldots 4)$$

oder

$$S \leqq k_s \frac{\Theta}{M_\eta} 2y\cos\varphi' \quad \ldots\ldots 5)$$

Aus der Gleichung 2 folgt nachstehendes.

a) Rechteckiger Querschnitt, Fig. 2, § 38, da hier

$$2y = b \qquad \varphi' = 0,$$

$$M_\eta = b\left(\frac{h}{2} - \eta\right)\frac{\frac{h}{2} + \eta}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right),$$

$$\tau' = \frac{S}{b}\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right)}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{3}{2}\frac{S}{bh}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]$$

und für $\eta = 0$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{S}{bh} = \frac{3}{2}\frac{S}{f},$$

wie schon im § 38 als Gleichung 2 ermittelt.

b) Kreisförmiger Querschnitt, Fig. 4.

$$y = r \sin \psi = r \cos \varphi' \qquad \Theta = \frac{\pi}{4} r^4 \qquad f = \pi r^2.$$

Das statische Moment M_η des Kreisabschnittes kann unmittelbar bestimmt werden durch Integration oder auch durch die Er-

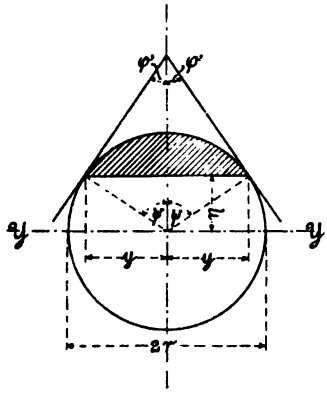


Fig. 4.

wägung, daß der Abstand des Schwerpunktes desselben von der y-Achse

$$\frac{(2y)^3}{12 f_a},$$

sofern f_a den Inhalt des Abschnittes bezeichnet.

$$M_\eta = \frac{(2y)^3}{12 f_a} f_a = \frac{2y^3}{3} = \frac{2 r^3 \cos^3 \varphi'}{3}$$

$$\tau' = \frac{S}{2 r \cos^2 \varphi'} \frac{2 r^3 \cos^3 \varphi'}{3 \cdot \frac{\pi}{4} r^4} = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi' = \frac{4}{3} \frac{S}{f} \cos \varphi' \quad 6)$$

oder auch, da

$$\cos\varphi' = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-\left(\frac{\eta}{r}\right)^2}$$

$$\tau' = \frac{4}{3}\frac{S}{f}\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{r}\right)^2}.$$

Für $\varphi' = 0$, d. i. für die Nullachse, erlangt τ' seinen größten Wert

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{S}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Bei kreisförmigem Querschnitt ergibt sich demnach die Schubspannung in der Nullachse um $33^1/_3\,\%$ größer, als wenn gleichmäßige Verteilung der Schubkraft über den Querschnitt unterstellt wird.

Werden die zu den einzelnen Abständen η gehörigen Werte von τ' als wagrechte Ordinaten aufgetragen, so wird, da

$$\left(\frac{\tau'}{\frac{4}{3}\frac{S}{f}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{r}\right)^2 = 1,$$

das Änderungsgesetz von τ' durch eine Ellipse dargestellt.

c) Kreisringförmiger Querschnitt, Fig. 5.

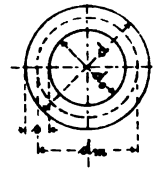


Fig. 5.

Unter der Voraussetzung, daß die Wandstärke verhältnismäßig klein ist, und es sich nur um die Ermittlung der größten, in der Nullachse auftretenden Schubspannung handelt, findet sich mit

$$2y = d - d_0 = 2s \qquad \varphi' = 0 \qquad d + d_0 = 2d_m$$

$$\Theta_z = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_0^4) = \frac{\pi}{64}(d^2 + d_0^2)(d + d_0)(d - d_0) = \sim \frac{\pi}{8} d_m^3 s.$$

$$M_\eta = \frac{1}{2} \pi d_m s \,.\, \frac{1}{\pi} d_m = \frac{1}{2} d_m^2 s,$$

$$\tau_{max} = \frac{S}{2s} \frac{\frac{1}{2} d_m^2 s}{\frac{\pi}{8} d_m^3 s} = 2 \frac{S}{\pi d_m s} = 2 \frac{S}{f}, \quad \ldots \quad 8)$$

sofern der Querschnitt des Ringes

$$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2) = \pi d_m s = f.$$

Hiernach erscheint die Schubspanung in der Nullachse um 100% größer als bei gleichmäßiger Verteilung der Schubkraft über den Querschnitt.

d) I-Querschnitt, Fig. 6.

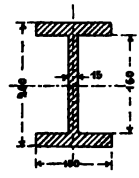


Fig. 6.

In der Mitte des Steges ist

$$2y = 1{,}5 \text{ cm} \qquad \varphi' = 0,$$

$$M_\eta = 1{,}5 \,.\, 8 \,.\, 4 + 10 \,.\, 2 \,.\, 9 = 228 \text{ cm}^3,$$

$$\Theta = \frac{1}{12}(10 \,.\, 20^3 - 8{,}5 \,.\, 16^3) = 3765 \text{ cm}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{S}{1{,}5} \frac{228}{3765} = 0{,}0404\, S.$$

Wegen

$$f = 10 \,.\, 20 - 8{,}5 \,.\, 16 = 64 \text{ qcm}$$

wird

$$\tau_{max} = 2{,}59 \frac{S}{f} .$$

Streng genommen ist für Querschnitte dieser Art, bei denen sich die Breite $2\,y$ und der Winkel φ' beim Übergang des Steges in die Flanschen plötzlich ändern, die Gleichung 2 nicht mehr richtig; jedenfalls kann sie für die Beurteilung der Schubspannungen an dieser Übergangsstelle und in der Nähe derselben ganz unzutreffende Werte liefern. Da, wo ein so plötzlicher Wechsel in der Breite des Querschnittes eintritt, muß die oben gemachte Voraussetzung des Gleichbleibens von τ_y über die ganze Breite $2\,y$ unzulässig werden.

Die Gleichung 3 und ihre Sonderwerte beruhen auf der Voraussetzung eines unveränderlichen Schubkoeffizienten. Bei Materialien, für welche diese Voraussetzung nicht zutrifft, wie z. B. bei Gußeisen, werden dieselben unter Umständen zu mehr oder minder bedeutenden Unrichtigkeiten führen können.

§ 40. Schubversuche.

Dieselben pflegen durchgeführt zu werden nach Maßgabe der Fig. 1, § 37, S. 358, oder insbesondere für Rundstäbe mit der in

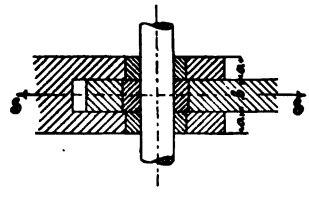


Fig. 1.

Fig. 1 dargestellten Einrichtung, wobei der Versuchsstab in zwei Querschnitten, also doppelschnittig, durchgeschert wird.

Bedeutet S die Kraft, welche erforderlich ist, um den Stab vom Querschnitte f abzuscheren, so wird der Quotient

$$\frac{S}{f} \text{ (Verfahren Fig. 1, § 37, S. 358),}$$

bezw.

$$\frac{S}{2f} \text{ (Verfahren Fig. 1)}$$

als Schubfestigkeit oder Scherfestigkeit des Materials bezeichnet. Der letztere Ausdruck erscheint als der zutreffendere. Es wird, namentlich durch das Verfahren, wie es Fig. 1, § 37, S. 358, andeutet, weniger die Widerstandsfähigkeit ermittelt, welche bei einem auf Schub beanspruchten Konstruktionsteil nach Maßgabe der Betrachtungen in den §§ 38 und 39 in Frage steht, als vielmehr diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um den Stab durchzuschneiden. Aus diesem Grunde hat es auch Bedenken, von der so ermittelten Scherfestigkeit auf die zulässige Schubanstrengung zu schließen. In dieser Beziehung sei insbesondere noch auf folgendes hingewiesen.

Nach Gleichung 6, § 31, besteht für durchaus gleichartiges Material zwischen der Schub- und Zuganstrengung die Beziehung

$$k_s = 0{,}75\ k_z \text{ bis } 0{,}8\ k_z.$$

Weiter ist beispielsweise nach Gleichung 2, § 38, für einen Stab von rechteckigem Querschnitt

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{S}{bh} = \frac{3}{2}\frac{S}{f},$$

woraus wegen $\tau_{max} \leqq k_s$

$$k_s \geqq \frac{3}{2}\frac{S}{f},$$

$$\frac{3}{2}\frac{S}{f} \leqq 0{,}75\ k_z \text{ bis } 0{,}8\ k_z,$$

$$\frac{S}{f} \leqq 0{,}5\ k_z \text{ bis } 0{,}53\ k_z,$$

Abscherversuche mit Schmiedeisen und Stahl, in einer der beiden beschriebenen Weisen angestellt, liefern die Scherfestigkeit = 0,67 bis 0,8 der Zugfestigkeit, also wesentlich höher.

Für kreisförmigen Querschnitt ist nach Gleichung 7, § 39,

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\,\frac{S}{f},$$

woraus

$$\frac{S}{f} \leq 0{,}56\ k_z \text{ bis } 0{,}6\ k_z.$$

Abscherversuche, nach Fig. 1, S. 372, durchgeführt, pflegen die Scherfestigkeit des Schmiedeisens und des Stahles zu 0,75 bis 0,8 der Zugfestigkeit zu geben, also ebenfalls wesentlich größer.

Die unten folgenden Versuche mit gußeisernen Rundstäben liefern sogar

Scherfestigkeit: Zugfestigkeit = 1620 : 1595 = 1,02 : 1,
bezw. 1967 : 1679 = 1,17 : 1.

Dieses abweichende Verhalten des Gußeisens gegenüber Schmiedeisen und Stahl erklärt sich in erster Linie aus der Veränderlichkeit des Schubkoeffizienten β (Dehnungskoeffizienten α).

Für die Beurteilung der beiden Prüfungsverfahren kommt sodann weiter in Betracht der oben festgestellte Umstand, daß die wirkende Schubkraft von einem biegenden Moment begleitet wird. Bei dem durch Fig. 1, § 37, S. 358, angedeuteten Vorgang läßt sich dasselbe allerdings auf einen unerheblichen Betrag herabdrücken, dagegen tritt es stark auf bei dem Verfahren nach Fig. 1, S. 372: wir haben tatsächlich einen im mittleren Teile (innerhalb der Strecke b) belasteten und nach außen aufliegenden Stab. Eine scharfe Beobachtung zeigt auch deutlich, daß der Versuchskörper durch die Belastung zunächst eine Durchbiegung erfährt und dann erst abgeschert wird. Ist das Material spröde wie z. B. Gußeisen, so erfolgt zunächst Bruch des Stabes durch das biegende Moment und zwar innerhalb der Strecke b; erst später (bei höherer Belastung) tritt das Abscheren ein. In dieser Hinsicht geben die nachstehenden Versuche des Verfassers lehrreichen Aufschluß.

Rundstäbe von 20,0 mm Durchmesser ($f = 3{,}14$ qcm), aus Gußeisen gedreht, geprüft nach dem Verfahren Fig. 1, S. 372.

No. 1. Bei der Belastung $S = 3000$ kg bricht der Stab infolge Biegung, die Wage der Maschine sinkt. Der Versuch wird fortgesetzt, hierbei steigt die Belastung allmählich bis $S = 10200$ kg, welche Kraft das Abscheren herbeiführt[1]).

Fig. 2 (Taf. XV) zeigt den an den Enden auf die Länge b abgescherten und im mittleren Teile durch Biegung gebrochenen Stabteil. Die von dem biegenden Moment gezogenen Fasern sind gerissen, während die gedrückten zum Teil noch unangegriffen erscheinen.

Die Scherfestigkeit beträgt $\frac{10200}{2 \cdot 3{,}14} = 1624$ kg/qcm.

No. 2. Bei der Belastung $S = 2825$ kg bricht der Stab infolge der Biegung (d. h. die gezogenen Fasern zerreißen), bei $S = 9950$ kg erfolgt das Abscheren.

$$\text{Scherfestigkeit} = \frac{9950}{2 \cdot 3{,}14} = 1584 \text{ kg/qcm.}$$

No. 3. Verhalten ganz wie bei No. 1 und 2, $S = 3350$ kg, beziehungsweise 10370 kg.

$$\text{Scherfestigkeit} = \frac{10370}{2 \cdot 3{,}14} = 1651 \text{ kg/qcm.}$$

$$\text{Durchschnitt der Scherfestigkeiten} = \frac{1624+1584+1651}{3} = 1620 \text{ kg/qcm.}$$

Eine genaue Bestimmung der Biegungsfestigkeit ist nicht möglich, da die Feststellung des biegenden Moments M_b die Kenntnis der Verteilung der Belastung über die Strecken a, b und a voraussetzt, und überdies neben der Biegungsanstrengung auch Schubanstrengung stattfindet. Außerdem kommt noch der Einfluß der

[1]) Diese Erscheinung der Aufeinanderfolge des Biegungsbruches und des Abscherens, sowie der große Unterschied zwischen den betreffenden Belastungen sind um so bemerkenswerter, als die Biegungsfestigkeit gußeiserner Rundstäbe das Doppelte der Zugfestigkeit übersteigt. (Vergl. § 22, Ziff. 2.)

Reibungskräfte in Betracht, welche durch die Biegung des Stabes in den Auflagerflächen wachgerufen werden. (Vergl. § 46, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, Fußbemerkung auf S. 224 u. f.) Wird in Übereinstimmung mit Fig. 3

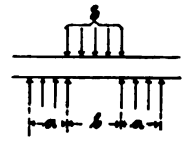


Fig. 3.

gleichmäßige Verteilung unterstellt und der Einfluß des Reibungswiderstandes vernachlässigt, so wäre

$$M_b = \frac{S}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{b}{4}\right) = \frac{S}{4}\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

und, da im vorliegenden Falle

$$a = 2{,}2 \text{ cm} \qquad b = 3{,}0 \text{ cm} \qquad \frac{\Theta}{e} = \frac{\pi}{32}2^3,$$

die Biegungsfestigkeit K_b

für No. 1 $$\frac{\frac{3000}{4}\cdot(2{,}2+1{,}5)}{\frac{\pi}{32}\cdot 2^3} = \frac{3000\,.\,3{,}7}{3{,}14} = \sim 3530\,\text{kg/qcm},$$

für No. 2 $$\frac{2825\,.\,3{,}7}{3{,}14} = \sim 3330\,\text{kg/qcm},$$

für No. 3 $$\frac{3350\,.\,3{,}7}{3{,}14} = \sim 3950\,\text{kg/qcm},$$

im Durchschnitt $K_b = 3603\,\text{kg/qcm}.$

Die Zugprobe mit denselben Rundstäben hatte ergeben die Zugfestigkeit

für No. 1 1560 kg/qcm,
für No. 2 1586 kg/qcm,
für No. 3 1640 kg/qcm,

im Durchschnitt $K_s = 1595$ kg/qcm.

Nach § 22, Ziff. 2, Gußeisen *A*, S. 249, No. 6, wäre hieraus auf eine Biegungsfestigkeit von

$$K_b = 2{,}12\, K_s = 1595 \,.\, 2{,}12 = 3381 \text{ kg/qcm}$$

zu schließen, welche Größe nicht sehr bedeutend abweicht von derjenigen, die auf Grund der Annahme gleichmäßiger Verteilung der Kräfte über die Strecken *a*, *b* und *a* erhalten wurde. Würde der das biegende Moment vermindernde Einfluß der Reibung berücksichtigt worden sein, so wäre eine noch weiter gehende Übereinstimmung eingetreten.

Rundstäbe von rund 24 mm Durchmesser, aus Gußeisen gedreht, geprüft nach Fig. 1, S. 372.

No.	Durchmesser d cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Belastung S beim Bruch durch: Biegung S_1 kg	Belastung S beim Bruch durch: Abscheren S_2 kg	Scherfestigkeit $K_s = S_2 : 2\frac{\pi}{4} d^2$ kg/qcm
1	2,38	4,45	7600	17650	1983
2	2,37	4,41	8250	17060	1934
3	2,38	4,45	8450	17750	1994
				Durchschnitt	1970

Die Zugfestigkeit der drei Stäbe war vorher zu

$$K_z = \frac{1766 + 1621 + 1649}{3} = 1679 \text{ kg/qcm}$$

ermittelt worden.

Wird Schmiedeisen der Prüfung nach Fig. 1, S. 372, unterworfen, so erfolgt allerdings vor dem Abscheren kein Bruch, weil das Material dem biegenden Momente gegenüber eine genügend weitgehende Formänderung zuläßt. Da aber bei Konstruktionsteilen derartige Formänderungen in der Regel nicht statthaft erscheinen, so erhellt, daß selbst in Fällen der Beanspruchung, wie sie durch Fig. 1, S. 372, dargestellt wird, die Berechnung auf Biegung — wenigstens der Regel nach — maßgebend ist[1]).

---

[1]) In dieser Hinsicht bringt die Literatur noch häufig irrtümliche Angaben, obgleich sie hiermit schon seit langer Zeit und naturgemäß im Widerspruch mit dem steht, was zweckmäßigerweise tatsächlich ausgeführt wird. So pflegt beispielsweise in Beziehung auf die Gelenkbolzen bei Dachkonstruktionen u. dergl., für die Keile der Keilverbindungen, die Bolzen gewisser Schraubenverbindungen, die Zähne der Sperräder u. s. f. angegeben zu werden, daß dieselben auf Schub oder gegen Abscheren zu berechnen seien. Hinsichtlich der Gelenkbolzen und ähnlicher Teile dürfte das oben Erörterte zur Klarstellung ausreichen (vergl. auch § 52, Ziff. 1a), betreffs der Keile, Gewindegänge u. s. f. sei auf des Verfassers Maschinenelemente 1880, S. 41 u. f. (Taf. 1, Fig. 28 und 30) bezw. S. 50, S. 238, 1891/92, S. 80 u. f., S. 92 u. s. w. verwiesen. In bezug auf Sperrzähne möge das Folgende bemerkt werden.

Die Kraft P, Fig. 4, im ungünstigsten Falle außen im Punkt B angreifend (vergl. Schlußabsatz dieser Fußbemerkung), ergibt in bezug auf den zunächst

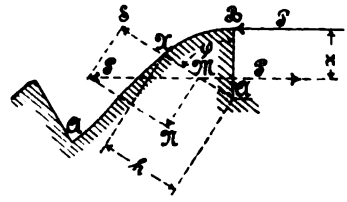


Fig. 4.

beliebig unter dem Winkel φ angenommenen Bruchquerschnitt AX mit dem Mittelpunkt M ein Kräftepaar vom Moment Px, welches auf Biegung wirkt, ferner eine Schubkraft $S = P\sin\varphi$ und eine Druckkraft $N = P\cos\varphi$, welch letztere in der Regel ohne weiteres vernachlässigt werden kann.

Bezeichnet b die Breite der Sperrzähne, so findet sich die größte Biegungsanstrengung σ des Materials nach Gleichung 10, § 16, zu

$$\sigma = \frac{Px}{\frac{1}{6} b h^2} = 6\,\frac{Px}{b h^2}.$$

Durch Verminderung von b und a kann allerdings das biegende Moment verringert werden; gleichzeitig wächst aber dann die Pressung $S:bd$ gegen die Mantelfläche des Rundstabes. Hierdurch aber wird der Verringerung von a und damit auch derjenigen des biegenden Momentes eine Grenze gezogen.

Da die Widerstandsfähigkeit des Stabes vom Durchmesser d gegen Biegung der dritten Potenz von d, gegen Schub dagegen nur der zweiten Potenz von d proportional ist, so muß das Prüfungsverfahren nach Fig. 1, S. 372, für das gleiche Material unter sonst gleichen Verhältnissen Werte für die Schubfestigkeit $S:f$ liefern, welche von d abhängig sind. Durch die großen Pressungen gegen die Mantelflächen der abzuscherenden Zylinder, welche Kräfte ihrerseits gegenüber dem Bestreben des Stabes, auf der Unterlage zu gleiten, Reibungskräfte wachrufen (vergl. § 46), findet allerdings eine weitere Trübung dieses Verhältnisses statt.

Es ist nun derjenige Querschnitt festzustellen, für welchen σ den größten Wert erlangt, was bei im allgemeinen beliebiger Gestalt der Begrenzungslinie des Zahnes am einfachsten durch Ausproben geschieht.

Zur Biegungsspannung tritt nun allerdings die Schubanstrengung. Wie in § 52 unter Ziff. 1b erörtert werden wird, ergibt sich jedoch für den rechteckigen Querschnitt, daß die Biegungsanstrengung allein maßgebend ist, solange

$$\frac{x}{\sin\varphi} \geqq 0{,}325\,h,$$

d. h. solange

$$x \geq 0{,}325\,h \sin\varphi.$$

Diese Bedingung wird fast ausnahmslos erfüllt sein, infolgedessen Sperrzähne ebenso ausnahmslos auf Biegung zu berechnen sind.

Indem der Bruchquerschnitt durch A geführt wird, wie oben geschehen, ist vorausgesetzt, es habe die Begrenzungslinie des Zahnes eine solche Form, daß die Widerstandsfähigkeit der oberhalb A möglichen Bruchquerschnitte einen größeren oder mindestens den gleichen Wert besitzt. Wird P als ganz außen angreifend angenommen, wie in Fig. 4 gezeichnet, so trifft diese Voraussetzung bei den üblichen Zahnformen allerdings nicht zu, wohl aber dann, wenn die Angriffslinie von P — in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit — um eine kleine Strecke von B nach innen verlegt wird. Beim Entwerfen pflegt man in der Weise vorzugehen, daß die Begrenzungslinie des Zahnes gewählt und sodann untersucht wird, ob die Beanspruchung die zulässige Anstrengung des Materials in keinem der möglichen Bruchquerschnitte überschreitet. Bei Inbetrachtziehung von Querschnitten, die oberhalb A gelegen sind, ist sinngemäß in der gleichen Weise vorzugehen, wie oben für den durch A gehenden Querschnitt dargelegt wurde.

Das vorstehend Erörterte führt zu dem Ergebnis, daß die Schubversuche, wie sie angestellt zu werden pflegen, nicht geeignet sind, die Richtigkeit der Hauptgleichung (2, § 39) zu prüfen, noch die Unterlagen für die zulässigen Schubanstrengungen mit der wünschenswerten Genauigkeit zu liefern. Eine unmittelbare und genaue Prüfung der Gleichung 2, § 39, auf dem Wege des Versuches begegnet erheblichen Schwierigkeiten. Dieselben erwachsen aus dem Umstande, daß die Schubkraft immer von einem biegenden Moment begleitet ist, und daß da, wo dessen Einfluß zurücktritt, so bedeutende Kräfte auf verhältnismäßig kleine Teile der Mantelfläche des Stabes zusammengedrängt wirken müssen, daß die den weiteren Entwickelungen zugrunde liegende Voraussetzung des Nichtvorhandenseins von Normalspannungen senkrecht zur Stabachse — und unter Umständen diejenige des Nichtauftretens von senkrecht zur Stabachse stehenden Schubanstrengungen, welche in Ebenen wirken, die sich in Parallelen zur Achse schneiden — unerfüllt bleibt. (Vergl. auch den Schluß von § 69.)

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung, Drehung oder Schub.

---

§ 41. Arbeit der Längenänderung.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt f sei an dem einen Ende festgehalten, am anderen freien Ende durch eine von Null an stetig wachsende Kraft P belastet. Er erfährt hierdurch eine Verlängerung. Solcher Änderungen der Länge sind nach Maßgabe der Darlegungen in § 4 und § 5 dreierlei zu unterscheiden:

1. die gesamte Längenänderung λ,
2. die bleibende Längenänderung λ',
3. die federnde Längenänderung λ'',

welche mit der Kraft P in einem solchen Zusammenhange stehen, daß

$$\begin{aligned} \lambda &= f_1(P) \quad \text{oder} \quad P = F_1(\lambda), \\ \lambda' &= f_2(P) \quad - \quad P = F_2(\lambda'), \\ \lambda'' &= f_3(P) \quad - \quad P = F_3(\lambda''). \end{aligned}$$

Handelt es sich beispielsweise um einen Lederriemen, bei dem die Verlängerungen langsamer wachsen als die Belastungen, so zeigt die Linie, welche durch $\lambda = f_1(P)$ oder $P = F_1(\lambda)$ bestimmt wird, etwa den in Fig. 1 skizzierten Verlauf. Die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, den Riemen z. B. um $\lambda = \overline{OQ_2}$ zu verlängern, wozu die von Null an gewachsene Belastung $P = \overline{OQ_1} = \overline{Q_2Q}$ gehört, wird dargestellt durch die schraffierte Fläche OQQ_2 von der Größe

$$A_1 = \int_0^{\lambda} P\,d\lambda = \int_0^{\lambda} F_1(\lambda)\,d\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Davon ist zu bleibender Formänderung verwendet worden

$$A_2 = \int_0^{\lambda'} P\,d\lambda' = \int_0^{\lambda'} F_2(\lambda')\,d\lambda', \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

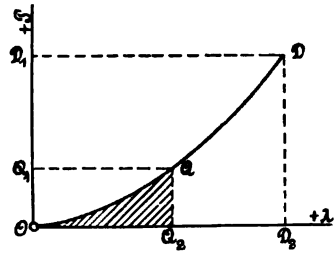


Fig. 1.

somit die mechanische Arbeit, welche der Körper infolge seiner Elastizität in sich aufgespeichert hat, und die er bei der Entlastung wieder zurückzugeben in der Lage ist,

$$A_3 = A_1 - A_2 = \int_0^{\lambda''} P\,d\lambda'' = \int_0^{\lambda''} F_3(\lambda'')\,d\lambda''. \quad . \quad . \quad 3)$$

Die Elastizitätslehre, indem sie sich lediglich mit den elastischen Formänderungen beschäftigt, pflegt nur die diesen Formänderungen entsprechende Arbeit als Formänderungsarbeit (Deformationsarbeit) in Betracht zu ziehen und überdies vorauszusetzen, daß Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht, daß also die Dehnungslinie eine Gerade ist. wie z. B. in Fig. 1, § 2, bis zum Punkte A.

Unter dieser Voraussetzung findet sich, wenn im folgenden die Formänderungsarbeit, in dem soeben bezeichneten Sinne aufgefaßt, mit A und die elastische Längenänderung kurz mit λ bezeichnet wird, die Arbeit der Längenänderung

$$A = \frac{1}{2} P\lambda = \frac{1}{2} f\sigma\lambda,$$

und da nach § 2, sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht wirken,

$$\lambda = \alpha \sigma l$$

$$A = \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 f l = \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 V, \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

d. h. die Arbeit der Längenänderung ist proportional dem Volumen $V = fl$ des Stabes und dem Quadrate der Spannung.

Wird σ durch die verhältnismäßige Dehnung ε ersetzt nach Maßgabe der Gleichung

$$\varepsilon = \alpha \sigma,$$

so folgt

$$A = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 f l = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 V. \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Handelt es sich um einen Körper von veränderlichem Querschnitt wie Fig. 1, § 6, so ergibt sich unter der Voraussetzung, daß der Dehnungskoeffizient α konstant ist und Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht tätig sind, die Arbeit A mit Annäherung[1]) durch folgende Erwägung.

Damit das im Abstande x von der freien Stirnfläche des Stabes, Fig. 1, § 6, gelegene Körperelement $f\,dx$ in der Richtung von x um $\varepsilon\,dx$ gedehnt wird, wobei die Spannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

eintritt, bedarf es der Aufwendung einer Arbeit

$$dA = \frac{1}{2} f \sigma \,.\, \varepsilon\, dx = \frac{1}{2\alpha} f\, \varepsilon^2\, dx = \frac{\alpha}{2} f \sigma^2\, dx.$$

[1]) Mit Annäherung namentlich deshalb, weil die Spannungen in sämtlichen Punkten eines Querschnittes nicht die gleiche Richtung haben können. Die Spannung im Mittelpunkte des Querschnitts fällt allerdings in die Stabachse, steht also senkrecht zu letzterem, dagegen werden beispielsweise die Spannungen in den auf der Umfangslinie des Querschnitts liegenden Elementen die Richtung der Mantellinien des Stabes besitzen, also geneigt gegen die Stabachse sein müssen.

Folglich die Arbeit, welche die Formänderung des ganzen Stabes fordert,

$$A = \frac{1}{2\alpha}\int_0^l \varepsilon^2 f\,dx = \frac{\alpha}{2}\int_0^l \sigma^2 f\,dx. \quad \ldots \quad 6)$$

Für den Fall, daß der Stab ein Prisma, wird hieraus

$$A = \frac{1}{2\alpha}\varepsilon^2 f l = \frac{\alpha}{2}\sigma^2 f l,$$

wie oben bereits ermittelt worden ist.

Bei den vorstehenden Erörterungen wurde vorausgesetzt, daß die Belastung stetig von Null an wächst, so daß in jedem Augenblick Gleichgewicht vorhanden ist zwischen der äußeren belastenden Kraft und den hierdurch wachgerufenen inneren Kräften. Wird nun der Stab plötzlich der Einwirkung der ganzen Kraft P überlassen, ohne daß jedoch ein Stoß hierbei stattfindet, d. h. ohne daß der zweite, den Stab belastende Körper diesen mit einer gewissen Geschwindigkeit trifft, so erhebt sich die Frage nach der Größe der Anstrengung σ, welche das Material in dem Augenblick der größten Verlängerung λ des Stabes erleidet. Bei der im folgenden gegebenen Beantwortung, wobei ein prismatischer Stab zugrunde gelegt wurde, soll von dem Einflusse der Zeit auf die Ausbildung der Formänderung abgesehen werden.

Unter der Voraussetzung unveränderlicher Größe des Dehnungskoeffizienten α beträgt die Arbeit, welche die Überwindung der inneren, durch die Dehnung wachgerufenen Kräfte bei der Verlängerung λ fordert,

$$\frac{1}{2}\lambda f \sigma.$$

Dieselbe muß gleich sein derjenigen mechanischen Arbeit, welche die äußere Kraft P verrichtet, indem sie in ihrer Richtung um λ fortschreitet, d. i. $P\lambda$. Also

$$P\lambda = \frac{1}{2}\lambda f \sigma,$$

woraus

$$\sigma = 2\frac{P}{f}$$

d. h. die den Stab mit ihrer ganzen Größe plötzlich, jedoch ohne Stoß belastende Kraft P veranlaßt eine doppelt so große Anstrengung des Materials, als wenn P von Null an stetig gewachsen wäre.

Nachdem der Stab sich um λ gedehnt hat, in welchem Augenblick $\sigma f = 2P$ ist, werden die inneren Kräfte, da sie um P größer sind als die äußere Kraft P, eine Wiederverkürzung einleiten, welche für den Fall vollkommener Elastizität und abgesehen von Widerständen die Stablänge auf l zurückbringt; hieran schließt sich neuerlich eine Verlängerung u. s. f.: der Stab wird Schwingungen vollführen, welche, wegen der in Wirklichkeit vorhandenen Widerstände fort und fort abnehmend, schließlich Null werden.

§ 42. Arbeit der Biegung.

Der Körper sei in der Weise gestützt und belastet, daß der Fall der einfachen Biegung vorliegt (III, § 16). Unter Vernachlässigung der Schubkräfte sowie der örtlichen Zusammendrückung, welche der Körper da erfährt, wo die äußeren Kräfte auf die Oberfläche wirken, und unter der Voraussetzung, daß der Dehnungskoefficient α konstant ist, ergibt sich die Biegungsarbeit durch folgende Betrachtung.

Um das im Abstande η von der Nullachse gelegene, streifenförmige Körperelement vom Querschnitt df und der Länge dx (in Richtung der Stabachse), Fig. 5, § 16, so zu dehnen, daß dessen Länge die verhältnismäßige Dehnung ε erfährt, wobei die Normalspannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

eintritt, ist eine Arbeit

$$dA = \frac{\sigma df}{2} \varepsilon \, dx = \frac{\alpha}{2} \sigma^2 \, df \, dx$$

erforderlich.

Unter der Annahme, daß die Ebene des den Stab biegenden Kräftepaares vom Momente M_b die eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes, dessen Trägheitsmoment in bezug auf die andere

Hauptachse mit Θ bezeichnet sei, in sich enthält, gilt nach Gleichung 9, § 16,

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta}\,\eta.$$

Infolgedessen

$$dA = \frac{\alpha}{2}\,\frac{M_b^2}{\Theta^2}\,\eta^2\,df\,dx,$$

und hiermit die mechanische Arbeit, welche die Biegung des ganzen Körpers beansprucht,

$$A = \frac{\alpha}{2}\int \frac{M_b^2}{\Theta^2}\,dx \int \eta^2\,df = \frac{\alpha}{2}\int \frac{M_b^2}{\Theta}\,dx, \quad \ldots \quad 1)$$

wobei die Integration sich auf die ganze Länge des Stabes zu erstrecken hat.

Für den Fall Fig. 1, § 16, — der prismatische Stab ist an dem einen Ende befestigt, am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet — findet sich, sofern man, von B nach A hin schreitend, $(l—x)$ mit ξ bezeichnet und dementsprechend $M_b = P\xi$ einführt sowie dx durch $d\xi$ ersetzt,

$$A = \frac{\alpha}{2}\int_0^l \frac{P^2\xi^2}{\Theta}\,d\xi = \frac{\alpha}{6}\,\frac{P^2}{\Theta}\,l^3.$$

Diese Gleichung gestattet eine sehr rasche Feststellung der Durchbiegung y' des freien Stabendes durch die Erwägung, daß die mechanische Arbeit, welche die stetig von Null bis auf P gewachsene Belastung beim Sinken um y' verrichtet, d. i.

$$\frac{1}{2}\,P\,y',$$

gleich A sein muß.

Demnach

$$\frac{1}{2}\,P\,y' = \frac{\alpha}{6}\,\frac{P^2}{\Theta}\,l^3,$$

$$y' = \frac{\alpha}{3}\,\frac{P}{\Theta}\,l^3,$$

welches Ergebnis in Übereinstimmung mit Gleichung 4, § 18, steht, sofern man in letzterer die hier nicht vorhandene Belastung Q gleich Null setzt.

Wird die Anstrengung an der Befestigungsstelle im Abstande $\eta = e_1$ von der Nullachse mit k_b bezeichnet, so folgt

$$P\,l = k_b \frac{\Theta}{e_1}$$

und damit

$$A = \frac{\alpha}{6} k_b^2 \frac{\Theta}{e_1^2} l.$$

Wenn

$$\Theta = \iota f e_1^2$$

gesetzt wird, was z. B. ergibt für den rechteckigen Querschnitt

$$\Theta = \frac{1}{12} b h^3 = \iota b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad \iota = \frac{1}{3},$$

für den kreisförmigen Querschnitt

$$\Theta = \frac{\pi}{64} d^4 = \iota \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad \iota = \frac{1}{4},$$

so findet sich unter Beachtung, daß fl gleich dem Stabvolumen V,

$$A = \frac{\alpha}{6} \iota k_b^2 f l = \frac{\alpha}{6} \iota k_b^2 V, \quad \ldots \quad 2)$$

d. h. die Biegungsarbeit ist proportional dem Volumen des Stabes und dem Quadrate der Materialanstrengung.

Handelt es sich um einen Körper von gleichem Widerstande gegen Biegung (§ 19), so ist

$$k_b = \frac{M_b}{\Theta} e$$

für die einzelnen Querschnitte konstant, wobei unter e der Abstand der hinsichtlich der größten Anstrengung maßgebenden Faser ver-

standen werden soll. Durch Einführung des hieraus folgenden Wertes von M_b in Gleichung 1 wird

$$A = \frac{\alpha}{2}\int\left(\frac{\Theta k_b}{e}\right)^2 \frac{dx}{\Theta} = \frac{\alpha}{2} k_b^2 \int \frac{\Theta}{e^2}\, dx,$$

und mit Rücksicht darauf, daß $\Theta = \iota f e^2$,

$$A = \frac{\alpha}{2}\, \iota k_b^2 \int_0^l f\, dx = \frac{\alpha}{2}\, \iota k_b^2\, V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Hiernach ist die Biegungsarbeit eines Körpers von gleichem Widerstand bei bestimmter Querschnittsform

1. unabhängig von der Art der Unterstützung (Befestigung) und der Belastung,
2. proportional dem Volumen des Körpers und dem Quadrate der Materialanstrengung,
3. verhältnismäßig 3 mal größer als der Wert Gleichung 2, welcher sich für den prismatischen Stab Fig. 1, § 16, ergibt.

Für den Stab Fig. 2, § 19, liefert Gleichung 3 wegen

$$\iota = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{\alpha}{6} k_b^2\, V.$$

§ 43. Arbeit der Drehung.

Der Körper ist in der Weise beansprucht, daß der Fall der einfachen Drehung vorliegt (V, § 32).

Vorausgesetzt sei, daß es sich um einen prismatischen Stab handle, daß die örtlichen Formänderungen an den Stellen, wo die äußeren Kräfte auf den Körper einwirken, vernachlässigt werden dürfen, daß sich ein auf gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung gerichteter Einfluß (vergl. § 34, unter Ziff. 3) nicht geltend mache, und daß der Schubkoeffizient β (§ 29) unveränderlich ist.

Um das im beliebigen Punkte P des Querschnittes (Fig. 4, § 32, Fig. 2, § 33, oder Fig. 3, § 34) gelegene Körperelement von der Grundfläche $dy\,dz = df$ und der Länge l so zu verdrehen, daß es die verhältnismäßige Schiebung γ erfährt, wobei die Schubspannung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

eintritt, ist eine Arbeit

$$dA = \frac{\tau\,df}{2}\gamma\,l = \frac{\beta}{2}\,l\tau^2\,df$$

aufzuwenden; demnach zur Verdrehung des ganzen Stabes

$$A = \frac{\beta}{2}\,l\int\tau^2\,df, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wobei die Integration sich über den ganzen Querschnitt zu erstrecken hat.[1])

Für den kreisförmigen Querschnitt, Fig. 4, § 32, folgt mit k_d als Drehungsanstrengung im Abstande r

$$\tau = k_d\frac{\varrho}{r},$$

$$A = \frac{\beta}{2}\,l\frac{k_d^2}{r^2}\int\varrho^2\,df = \frac{\beta}{2}\,l\frac{k_d^2}{r^2}\frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\beta}{4}\,k_d^2\,\pi r^2\,l$$

und da $\pi r^2 l$ gleich dem Stabvolumen V,

$$A = \frac{\beta}{4}\,k_d^2\,V, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

---

[1]) Unter Benutzung von Gleichung 5, § 35, gelangt man zu

$$A = \frac{1}{2}\,M_d\,\vartheta\,l = \frac{1}{2}\,\psi\,M_d^2\,\frac{\mathfrak{G}'}{f^4}\,\beta\,l.$$

worin k_d bei gegebenem Drehungsmoment M_d nach Beziehung 3, § 32, bestimmt ist durch die Gleichung

$$M_d = \frac{\pi}{16} k_d d^3.$$

Für den Hohlzylinder, Fig. 5, § 39, findet sich

$$A = \frac{\beta}{4} k_d^2 \frac{d^2 + d_0^2}{d^2} V, \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

worin

$$V = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2) l,$$

$$k_d = \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_0^4}.$$

Vergleicht man die mechanichen Arbeiten A_z, A_b und A_d, welche ein Kreiszylinder vom Volumen V aus durchaus gleichartigem Material bei Beanspruchung auf Zug bezw. Biegung (Fig. 1, § 16) und bezw. Drehung fordert, so erhält man zunächst

nach Gleichung 4, § 41, mit $\sigma = k_z$ $A_z = \frac{1}{2} \alpha k_z^2 V$,

- - 2, § 42, - $\iota = \frac{1}{4}$ $A_b = \frac{1}{24} \alpha k_b^2 V$,

- - 2, § 43, $A_d = \frac{1}{4} \beta k_d^2 V$.

Nach Gleichung 3 bezw. 5, § 31, ist

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha, \qquad k_s = \frac{m}{m+1} k_z.$$

Wird nun

$$m = \frac{10}{3}, \qquad k_s = k_d, \qquad k_b = k_z$$

gesetzt, womit

$$\beta = 2{,}6\, \alpha, \qquad k_d = \frac{10}{13} k_z,$$

so folgt

$$A_z : A_b : A_d = \frac{1}{2}\alpha k_z^2 : \frac{1}{24}\alpha k_z^2 : \frac{1}{4} 2{,}6\,\alpha \left(\frac{10}{13} k_z\right)^2$$

$$= 1 : \frac{1}{12} : \frac{10}{13}$$

$$= 1 : 0{,}083 : 0{,}769.$$

Hieraus erhellt, daß zur Erreichung einer bestimmten Anstrengung des Materials bei Biegung die geringste Formänderungsarbeit aufzuwenden ist, und daß infolgedessen der gebogene Zylinder auch nur eine verhältnismäßig geringe Formänderungsarbeit in sich aufnimmt.

Für den elliptischen Querschnitt, Fig. 2, § 33, mit den Halbachsen a und b ergibt Gleichung 4, § 33,

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a^3 b^3} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}.$$

Folglich nach Gleichung 1

$$A = 2 \frac{\beta}{\pi^2} \frac{M_d^2}{a^6 b^6} l \int (a^4 y^2 + b^4 z^2)\, df,$$

woraus wegen

$$\int y^2\, df = \frac{\pi}{4} a b^3, \qquad \int z^2\, df = \frac{\pi}{4} a^3 b,$$

$$A = \frac{\beta}{2\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_d^2 l, \quad \ldots\ldots 4)$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung 7, § 33, mit k_d als Drehungsanstrengung

$$A = \frac{\beta}{2} \frac{\pi}{4} k_d^2 \frac{b}{a} (a^2 + b^2)\, l = \frac{\beta}{8} \frac{a^2 + b^2}{a^2} k_d^2 V, \quad \ldots 5)$$

sofern

$$V = \pi a b l$$

das Volumen des Stabes ist.

Die Gleichung 4 ermöglicht die Feststellung des Winkels, um welchen sich jede der beiden Hauptachsen (das Hauptachsenkreuz) des einen Endquerschnittes des elliptischen Stabes gegenüber der ihr entsprechenden Achse (dem Hauptachsenkreuz) des anderen Endquerschnittes verdreht, in überaus leichter Weise. Dieser Winkel, dividiert durch die Entfernung l der beiden Querschnitte, gibt den verhältnismäßigen Drehungswinkel ϑ. (Vergl. § 33, Ziff. 1, d und e.) Seine Größe sei deshalb mit ϑl bezeichnet.

Das drehende Kräftepaar (vergl. auch Fig. 1, § 32), dessen Moment von Null an stetig bis zu M_d wächst, verrichtet bei der Drehung des einen Querschnittes gegen den anderen, d. h. des Achsenkreuzes des einen Querschnittes gegenüber demjenigen des anderen, um ϑl eine mechanische Arbeit

$$\frac{1}{2} M_d \cdot \vartheta l.$$

Dieselbe muß gleich sein der durch Gleichung 4 bestimmten Arbeit, welche die Überwindung der inneren Kräfte fordert, d. h.

$$\frac{1}{2} M_d \vartheta l = \frac{\beta}{2\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_d^2 l,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_d \beta, \quad \ldots\ldots 6)$$

wie in § 36 unter No. 3 angegeben ist.

Für den rechteckigen Querschnitt, Fig. 3, § 34, mit der Breite b und der Höhe h findet sich unter Beachtung der Gleichung 1, § 34, die Spannung im beliebigen Punkte P zu

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \sqrt{m^2 \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]^2 y^2 + n^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right]^2 z^2};$$

infolgedessen

$$\int \tau^2 df = m^2 \int y^2 df + n^2 \int z^2 df - 8 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \int y^2 z^2 df$$

$$+ \frac{16 m^2}{h^4} \int y^2 z^4 df + \frac{16 n^2}{b^4} \int y^4 z^2 df.$$

Wegen

$$\int y^2\,df = \frac{1}{12}\,b^3\,h, \qquad \int z^2\,df = \frac{1}{12}\,b\,h^3,$$

$$\int y^2\,z^2\,df = \frac{1}{144}\,b^3\,h^3,$$

$$\int y^2\,z^4\,df = \frac{1}{960}\,b^3\,h^5, \qquad \int y^4\,z^2\,df = \frac{1}{960}\,b^5\,h^3,$$

wird

$$\int \tau^2\,df = \frac{1}{10}\,m^2\,b^3\,h + \frac{1}{10}\,n^2\,b\,h^3 - \frac{1}{18}\left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) b^3\,h^3.$$

Nach § 34 ist

$$m = \frac{2}{b}\,\tau'_a \qquad\qquad n = \frac{2\,b}{h^2}\,\tau'_a.$$

Hiermit folgt, sofern noch die Spannung τ'_a im Punkte A des Querschnittumfanges, Fig. 3, § 34, durch k_d ersetzt wird,

$$\int \tau^2\,df = \frac{8}{45}\,k_d^{\,2}\,b\,\frac{b^2+h^2}{h};$$

infolgedessen nach Gleichung 1

$$A = \frac{4}{45}\,\beta\,k_d^{\,2}\,\frac{b}{h}\,(b^2+h^2)\,l = \frac{4}{45}\,\beta\,\frac{b^2+h^2}{h^2}\,k_d^{\,2}\,V, \quad . \quad 7)$$

sofern

$$V = b\,h\,l$$

das Volumen des Stabes bezeichnet.

Wird nach Maßgabe der Gleichung 5, § 34,

$$k_d = \frac{9}{2}\,\frac{M_d}{b^2\,h}$$

gesetzt, so findet sich jetzt

$$A = \frac{9}{5}\,\beta\,\frac{b^2+h^2}{b^3\,h^3}\,M_d^{\,2}\,l. \quad \ldots \quad 8)^1)$$

Diese Beziehung gestattet in ganz gleicher Weise, wie oben für den elliptischen Stab erörtert, die Ermittelung des verhältnismäßigen Drehungswinkels ϑ für Prismen mit rechteckigem Querschnitt.

Die Arbeit, welche das drehende Kräftepaar bei der Verdrehung der um l voneinander entfernten Querschnitte verrichtet, muß gleich A sein, d. h.

$$\frac{1}{2}\,M_d\,\vartheta\,l = \frac{9}{5}\,\beta\,\frac{b^2+h^2}{b^3\,h^3}\,M_d^{\,2}\,l$$

$$\vartheta = 3{,}6\,\frac{b^2+h^2}{b^3\,h^3}\,M_d\,\beta. \quad \ldots \quad 9)^1)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von den in § 36 unter No. 6 aufgenommenen de Saint Venantschen Werten durch den Zahlenkoeffizienten. Es schließt sich den Ergebnissen der Versuche, welche Bauschinger zu dem Zwecke anstellte, die de Saint Venantsche Gleichung zu prüfen, noch besser an. Wie in § 35 unter Ziff. 2 berichtet, sollten nach den de Saint Venantschen Koeffizienten sich verhalten

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}25 : 1{,}13 : 1{,}40 : 9{,}1.$$

Bauschingers Messungen ergaben

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}24 : 1{,}20 : 1{,}47 : 9{,}65.$$

Die Einführung des hier ermittelten Zahlenkoeffizienten 3,6 der Gleichung 9 für die rechteckigen Stäbe (c, d und e) führt zu

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}24 : 1{,}14 : 1{,}44 : 9{,}76.$$

---

[1]) Vergl. den Schlußabsatz von § 43.

Daß der Zahlenwert 3,6 der Gleichung 9 an sich der richtigere sei, darf hieraus jedoch nicht geschlossen werden, da die Versuche mit Gußeisen angestellt wurden, dessen Dehnungskoeffizient veränderlich ist (vergl. das S. 350 Gesagte).

Versuche des Verfassers, welche jedoch noch nicht abgeschlossen sind, deuten darauf hin, daß ψ_0 in der Gleichung

$$\vartheta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_d \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9a)$$

mit dem Verhältnis $b : h$ abnimmt und zwar etwas stärker als die de Saint-Venantschen Zahlen S. 354 unter Ziff. 6 angeben. (Vergl. S. 541.)

Dem Vorstehenden entsprechend wird sich auch der Zahlenwert in Gleichung 8 veränderlich ergeben.

Mit der Genauigkeit, mit welcher der Zahlenwert in Gleichung 5, § 34 konstant ist, folgt

$$A = \frac{1}{2} \psi_0 \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M_d^2 l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

§ 44. Arbeit der Schiebung.

Der Fall der Inanspruchnahme auf Schub allein wird dann als vorhanden betrachtet, wenn sich die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt ersetzen lassen durch eine Kraft S (Schubkraft), welche in die Ebene des letzteren fällt und die Stabachse senkrecht schneidet. Wie im zweiten Abschnitt unter VI. erörtert, kann — streng genommen — diese Schubanstrengung niemals allein vorkommen; die Schubkraft S ist vielmehr immer von einem biegenden Moment begleitet.

Wird trotzdem nur diese in Betracht gezogen, welche nach Maßgabe der Gleichung 3, § 39, und der Fig. 1, § 39, für den beliebig zwischen $P' P'$ gelegenen Punkt P die Schubspannung

$$\tau = \frac{S}{2 y \cos \varphi} \frac{M_\eta}{\Theta}$$

liefert, so ergibt sich unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Schubkoeffizienten β folgendes.

Die Herbeiführung der Schiebung γ des im Punkte P, Fig. 1, § 39, welcher um z von der senkrechten Hauptachse abstehe, zu denkenden Körperelementes von dem Querschnitt

$$df = d\eta\, dz$$

und der Länge dx, wobei eine Schubspannung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

wachgerufen wird, fordert eine mechanische Arbeit

$$dA = \frac{\tau\, df}{2}\gamma\, dx = \frac{\beta}{2}\tau^2\, df\, dx.$$

Demnach die gesamte Formänderungsarbeit der Schubkräfte

$$A = \frac{\beta}{2}\int dx \int \tau^2\, df = \frac{\beta}{2}\int dx \int\int \tau^2\, d\eta\, dz. \quad . \quad . \quad 1)$$

Hieraus findet sich beispielsweise für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h, Fig. 2, § 38, da hier (vergl. § 39 unter a)

$$\varphi = \varphi' = 0, \qquad \tau = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right], \qquad df = b\, d\eta,$$

$$A = \frac{\beta}{2}\int dx \cdot \frac{9}{4}\frac{S^2}{b\,h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^2 d\eta = \frac{3}{5}\beta\int\frac{S^2}{b\,h}\,dx. \quad 2)$$

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen). Zug, Druck und Biegung.

§ 45.

Allgemeines. Der Stab ist nur durch Kräfte beansprucht, welche in Richtung seiner Achse wirken.

Allgemeines.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in die Stabachse fallende Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente M_b, dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet.

Für einen beliebigen Punkt des Querschnittes liefert die Kraft P eine Dehnung und Normalspannung. Gleiche Wirkung hat das biegende Moment M_b. Die Gesamtdehnung wie auch die Gesamtspannung ergibt sich als die algebraische Summe aus den beiden Einzeldehnungen, bezw. Einzelspannungen.

Unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaares die eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält, findet sich die durch M_b im Abstande η von der anderen Hauptachse hervorgerufene Normalspannung nach Gleichung 9, § 16, zu

$$\frac{M_b}{\Theta}\,\eta.$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist die Normalspannung nach Maßgabe des in § 21 unter 2 Erörterten festzustellen.

Die Normalspannung, welche von P herrührt, beträgt unter

der Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt in allen Punkten des letzteren

$$\frac{P}{f}.$$

Folglich die Gesamtspannung σ im Abstande η von der bezeichneten Hauptachse

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta}\eta \pm \frac{P}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn P ziehend, das untere, wenn P drückend wirkt.

M_b, P, Θ und f sind als absolute Größen zu betrachten, während η als positiv oder negativ einzuführen ist, je nachdem die betreffende Faserschicht auf der erhabenen oder der hohlen Seite der elastischen Linie liegt.

Bei Benutzung der Gleichung 1 sind die Voraussetzungen, welche zu ihr führten, im Auge zu behalten; insbesondere kann sie ganz unrichtige Werte ergeben, wenn unter Einfluß von M_b der Stab sich in solchem Maße durchbiegt, daß P infolge dieser Durchbiegung ebenfalls Momente liefert, die von Bedeutung sind und nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

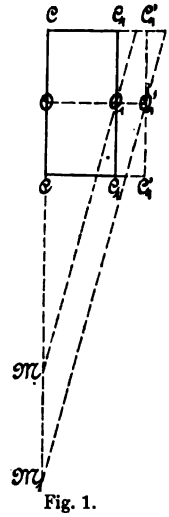


Fig. 1.

Hinsichtlich des Krümmungshalbmessers der elastischen Linie sei unter den in § 16 gemachten Voraussetzungen folgendes bemerkt.

Die beiden um dx voneinander abstehenden Querschnitte $\overline{CC}$ und $\overline{C_1 C_1}$, Fig. 1, ändern unter Einwirkungen der in die Stabachse fallenden Kraft P lediglich ihre Entfernung, und zwar um $\overline{O_1 O_1'} = \varepsilon_0\, dx$, sofern ε_0 die durch P herbeigeführte verhältnismäßige Dehnung ist, entsprechend der Normalspannung $\sigma = \frac{P}{f}$. $C_1' C_1'$ sei diese neue Lage von $C_1 C_1$ gegenüber CC.

Infolge der Wirksamkeit des Momentes M_b neigen sich die beiden Querschnitte gegeneinander. Wäre nur M_b tätig, so würden sich die beiden Querschnitte in der durch den Punkt M bestimmten Linie schneiden, wegen der Parallelverrückung um $\overline{O_1 O_1'} = \varepsilon_0\, dx$ erfolgt dieses Schneiden jedoch in

einer dazu parallelen Linie, die sich im Punkte M_1 darstellt, für den gilt

$$\overline{MM_1} : \overline{OM} = \varepsilon_0\, dx : dx = \varepsilon_0 : 1$$

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1} = \overline{OM}\,(1 + \varepsilon_0) = \varrho\,(1 + \varepsilon_0),$$

wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, wie er sich unter Einwirkung des biegenden Momentes allein ergibt. Da ε_0 eine sehr kleine Größe gegenüber 1 ist, so darf mit Annäherung $\overline{OM_1} = \sim \varrho$ gesetzt, also mit der oben bezeichneten Annäherung hinsichtlich des Krümmungshalbmessers so verfahren werden, als sei nur das biegende Moment wirksam.

Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch exzentrisch zu ihr gelegene Kraft P belastet.

1. Die Kraft P wirkt ziehend, Fig. 2 und 3.

Die durch P und die Stabachse bestimmte Ebene schneidet sämtliche Körperquerschnitte in einer der beiden Hauptachsen.

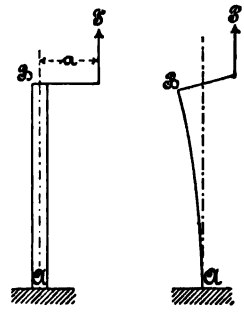


Fig. 2.

Fig. 3.

Die hierbei eintretende Biegung des Stabes, Fig. 3, ist eine derartige, daß das biegende Moment, insoweit es von der Größe der Durchbiegung beeinflußt wird, von B nach A hin abnimmt, also seinen größten Wert Pa im Querschnitt bei B besitzt. Für diesen gilt daher nach Gleichung 1, sofern der Wert von η für die am stärksten gespannte Faser gleich e ist,

$$\sigma_{max} = \frac{Pa}{\Theta}\, e + \frac{P}{f} = \frac{P}{f}\left(1 + \frac{aef}{\Theta}\right).$$

Hierbei ist der — übrigens nicht erhebliche — Einfluß, welchen die mit der Durchbiegung verknüpfte Neigung des Querschnitts nimmt, vernachlässigt.

Nach A hin wird sich σ_{max} vermindern in dem Maße, in welchem die Durchbiegung den Hebelarm der Kraft P verringert.

Für kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d und mit $a = \frac{d}{2}$ (Angriffspunkt der Kraft liegt auf dem Umfange des Querschnittes) folgt beispielsweise

$$f = \frac{\pi}{4} d^2, \qquad \Theta = \frac{\pi}{64} d^4, \qquad e = \frac{d}{2},$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{f}\left(1 + \frac{\frac{d^2}{4}\frac{\pi}{4}d^2}{\frac{\pi}{64}d^4}\right) = \frac{P}{f}(1+4) = 5\,\frac{P}{f},$$

d. h. die größte Anstrengung ist 5 mal so groß als bei zentrischem Angriff der Kraft P. Der Einfluß der Exzentrizität ist demnach ein ganz bedeutender.

Besteht der Stab aus einem Material, für welches die zulässige Anstrengung gegenüber Biegung, d. i. k_b, sich wesentlich unterscheidet von derjenigen gegenüber Zug, d. i. k_z, wie dies z. B. für Gußeisen zutrifft (vergl. § 22, Zusammenstellung auf S. 249, Spalte 4, Gleichung 1, § 22 auf S. 250), so würde es unrichtig sein, ohne weiteres nach Maßgabe der Beziehungen

$$\frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e \leqq k_b \text{ oder } \frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e \leqq k_z$$

zu rechnen. In solchem Falle ergeben sich mit

$$k_b = \beta_0 k_z$$

die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 \frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta} e \leqq k_b \quad \text{oder} \quad \frac{P}{f} + \frac{1}{\beta_0}\frac{Pa}{\Theta} e \leqq k_z, \\ \beta_0 = \frac{k_b}{k_z} = \frac{\text{zulässige Biegungsanstrengung}}{\text{zulässige Zuganstrengung}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 2)$$

2. Die Kraft P wirkt drückend, Fig. 4.

Voraussetzung wie unter Ziff. 1.

Hier nimmt bei eingetretener Durchbiegung das Moment M_b von B nach A hin zu, wie bereits in § 24 an Hand der Fig. 1 erörtert worden ist. In bezug auf den durch x bestimmten Querschnitt fand sich dort

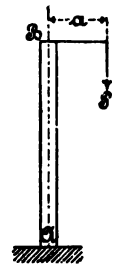


Fig. 4.

$$M_b = P(a + y' - y)$$

und hiermit, indem die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\Theta}(a + y' - y)$$

zum Ausgangspunkt genommen wurde,

$$\frac{y'}{a + y'} = 1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right),$$

woraus

$$a + y' = \frac{a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)} \quad \ldots\ldots 3)$$

und damit die Durchbiegung des freien Endes

$$y' = a\left[\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)} - 1\right] \quad \ldots\ldots 4)$$

Für den Querschnitt bei A erlangt M_b den größten Wert, nämlich

$$\max(M_b) = P(a + y') = \frac{Pa}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\alpha}{\Theta}}\right)};$$

folglich beträgt hier die Gesamtzugspannung der im Abstande $\eta = +e_1$ gelegenen Fasern nach Gleichung 1

$$\max(\sigma_1) = \frac{P a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{\Theta}}\right)} \frac{e_1}{\Theta} - \frac{P}{f} \leqq k_b \quad . \quad . \quad 5)$$

und die Gesamtpressung der im Abstande $\eta = -e_2$ gelegenen Fasern

$$\max(\sigma_2) = \frac{P a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{\Theta}}\right)} \frac{e_2}{\Theta} + \frac{P}{f} \leqq k, \quad . \quad . \quad 6)$$

sofern k_b und k die zulässigen Anstrengungen gegenüber Zug bei Biegung bezw. Druck bezeichnen.

Besteht der stabförmige Körper aus einem Material, für welches k_b erheblich von k abweicht, so muß streng genommen in sinngemäßer Weise so verfahren werden, wie am Schlusse von Ziff. 1 angegeben worden ist. Da jedoch hier unter allen Umständen eine größere Sicherheit darin liegt, wenn die Gleichung 5 ohne weiteres benützt wird, während dort die Außerachtlassung von β_0 in der ersten der Beziehungen 2 zu einer wesentlichen Unterschätzung der Materialanstrengung führen könnte, so dürfte an dieser Stelle der gegebene Hinweis genügen.

a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a klein.

Diese Sachlage entspricht dem im ersten Abschnitt unter IV behandelten Falle der Knickung. Dort wurde zwar zentrische Belastung des Stabes durch die Kraft P zunächst vorausgesetzt; wir erkannten aber, daß es sehr schwer hält, diese Voraussetzung zu erfüllen, infolgedessen ein, wenn auch sehr kleiner, Hebelarm als tatsächlich vorhanden angenommen werden mußte. Diese Annahme wurde außerdem noch dadurch zu einer Notwendigkeit, daß in Wirklichkeit die Achse bei längeren Stäben keine gerade Linie und daß tatsächlich das Material nicht vollkommen gleichartig ist. Wir gelangten sodann in § 24 zu dem Ergebnis, daß, wenn die Belastung P beträgt,

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2},$$

die Durchbiegung y' nach Gleichung 4 selbst für einen sehr kleinen Wert des Hebelarmes a die Größe ∞ annimmt. Infolgedessen war P_0 als diejenige Belastung zu bezeichnen, welche die Knickung, d. h. Bruch oder unzulässige Biegung, des Stabes herbeiführen wird, sofern nur $a > 0$. Letzteres muß aber aus den bezeichneten Gründen immer angenommen werden.

Demgemäß wurde in § 25 als zulässige Größe der den Stab belastenden Kraft P nur der $\mathfrak{S}$te Teil von P_0 in Rechnung gestellt, also gewählt

$$P = \frac{\pi^2}{4\mathfrak{S}} \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2}$$

unter Beachtung, daß überdies die Forderung der einfachen Druckbeanspruchung

$$P \leq kf$$

befriedigt sein muß.

Wird in Gleichung 4 für P der in der vorletzten Gleichung enthaltene Wert eingeführt, so ergibt sich

$$y' = a\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{S}}}\right)} - 1\right],$$

woraus beispielsweise

für $\mathfrak{S} =$	4	9	16	25
die Ausbiegungen $y' =$	$0{,}414a$	$0{,}155a$	$0{,}082a$	$0{,}052a$

folgen.

Die Bedingung

$$P \leq \frac{P_0}{\mathfrak{S}}$$

kommt demnach darauf hinaus, daß man die Abweichung y' von der Geraden, d. h. die Ausbiegung, innerhalb einer gewissen Grenze hält.

Ganz entsprechend wird auch hier vorzugehen sein. Der einzige Unterschied besteht darin, daß infolge des exzentrischen Angreifens der Kraft P von vornherein ein Hebelarm gegeben ist. Derselbe, mit a_1 bezeichnet, ist schätzungsweise um einen Betrag a_2

zu vergrößern, welcher den oben bezeichneten Umständen (Nichtgeradlinigkeit der Stabachse, Ungleichartigkeit des Materials, einschließlich Verschiedenartigkeit seines Zustandes) Rechnung trägt. Hinsichtlich a_1 wird wesentlich die Genauigkeit in Betracht kommen, mit welcher sich die Lage der auf den Stab wirkenden Kräfte feststellen und wenigstens dahin sichern läßt, daß Überschreitung des in Rechnung genommenen Wertes von a_1 in Wirklichkeit nicht stattfindet. Indem hierbei die Konstruktion, Material, Ausführung und Aufstellung Einfluß nehmen werden, greift die Größe a_1 in das Gebiet von a_2 über.

Liegen die Größen a_1 und a_2, nach Maßgabe des Vorstehenden mit Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse der jeweiligen Aufgabe ermittelt, vor, so kann unter Beachtung, daß die zulässige Biegung y' für nicht federnde Konstruktionsteile sehr klein sein muß, zunächst gesetzt werden

$$M_b = P\,(a_1 + a_2),$$

womit sich ergibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{P\,(a_1 + a_2)}{\Theta}\,e_1 - \frac{P}{f} &\leqq k_b, \\ \frac{P\,(a_1 + a_2)}{\Theta}\,e_2 + \frac{P}{f} &\leqq k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 7)$$

(Vergl. die Bemerkungen zu Gleichung 5 und 6.)

Befriedigt der Stab diese Bedingungen, so ist die Durchbiegung

$$y' = (a_1 + a_2)\left[\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\,a}{\Theta}}\right)} - 1\right] \quad \ldots 8)$$

zu berechnen und Entschließung hinsichtlich ihrer Zulässigkeit zu fassen. Erforderlichenfalls sind die Abmessungen des Stabes zu ändern.

Die Gleichungen 7 und 8 setzen voraus, daß a_2 in die Richtung von a_1 fällt, was nicht notwendigerweise der Fall sein muß. Ist das Trägheitsmoment Θ (bezogen auf die zum Abstande a_1 senkrechte Hauptachse) das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente, so wird diese Annahme allerdings im Sinne des Zweckes

der ganzen Rechnung liegen. Wenn dagegen Θ das grössere Trägheitsmoment ist, so verlangt dieser Gesichtspunkt, daß a_2 senkrecht zu a_1, sofern nicht besondere Gründe für eine andere Richtung sprechen, angenommen und nach Maßgabe des in § 21 unter 2 Erörterten verfahren wird.

Um die unmittelbare Wahl von a_2 zu umgehen, kann z. B. für Baukonstruktionen in derselben oder in ähnlicher Weise vorgegangen werden, wie dies in § 26 für den Fall einfacher Knickung besprochen worden ist[1]). Näheres Eingehen hierauf würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten, ganz abgesehen davon, daß die besonderen Einflüsse, welche bei den einzelnen Aufgaben zu berücksichtigen sind, die Berechnung des betreffenden Konstruktionsteiles dahin verweisen, wo derselbe seiner Wesenheit nach sowie in seinem Zusammenhange mit den an ihn anschließenden Teilen zu behandeln ist.

b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes groß.

In diesem Falle wird zunächst die erste der Beziehungen 7 mit $a_1 + a_2 = a$, d. h.

$$\frac{Pa}{\Theta} e_1 - \frac{P}{f} \leqq k_b$$

maßgebend; der Einfluß des Gliedes

$$\frac{P}{f}$$

tritt hierbei zurück. Sodann ist für den Fall, daß der Stab dieser Beziehung genügt, die nach Gleichung 8 eintretende Durchbiegung zu ermitteln und über deren Zulässigkeit Entscheidung zu treffen.

---

[1]) S. z. B. v. Tetmajer, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Zürich 1889 und 1905, sowie: „Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigen Baustoffe, Zürich 1901. v. Tetmajer steht hinsichtlich der Behandlung der Knickungsaufgabe auf einem anderen Standpunkt als Verfasser, weshalb auf dessen Arbeiten besonders aufmerksam gemacht sei. (Vergl. auch des Verfassers Besprechung des zuerst genannten v. Tetmajerschen Buches in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 474 u. f.)

c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Größe des Hebelarmes so bedeutend, daß eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt.

Dann sind einfach die Gleichungen 7 zu beachten und in ihnen

$$a_1 + a_2 = a$$

zu setzen; Gleichung 8 kommt nicht mehr in Betracht.

Hierher gehören auch Beispiele wie das folgende. Der senkrechte Mauerpfeiler vom Gewichte G und der Länge l, Fig. 5, empfängt durch ein Lager den abwärts gerichteten Druck P. Das im Schwerpunkte angreifende Gewicht ergibt für die Grundfläche ls des Bodens, auf welchem der Pfeiler steht, unter Voraussetzung gleichmäßiger Druckverteilung die Pressung

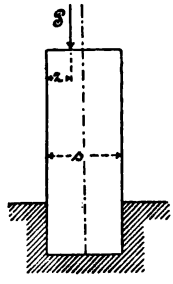


Fig. 5.

$$\frac{G}{ls}.$$

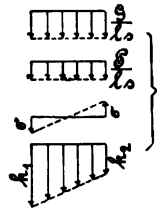


Fig. 6.

Der Druck P, in die Mittelebene des Pfeilers, d. h. um $\frac{s}{2} - z$ verlegt, liefert eine Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente

$$P\left(\frac{s}{2} - z\right).$$

Die erstere führt zu einer gleichmäßig über die Bodenfläche verteilten Pressung

$$\frac{P}{ls},$$

das letztere dagegen ergibt für die linke Mauerkante eine Pressung σ, welche sich bestimmt aus

$$P\left(\frac{s}{2}-z\right)=\frac{1}{6}\sigma l s^2$$

zu

$$\sigma=\frac{6P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l s^2},$$

mit der Genauigkeit, mit welcher die Hauptgleichung der Biegungselastizität auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf.

Damit beträgt die gesamte Pressung an der linken Mauerkante

$$k_1=\frac{G+P}{l s}+\frac{6P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l s^2},$$

an der rechten dagegen

$$k_2=\frac{G+P}{l s}-\frac{6P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l s^2}.$$

Die erstere soll die für den Boden höchstens noch als zulässig erachtete Größe nicht überschreiten.

Fig. 6 gibt ein Bild der Pressungsverteilung über die Bodenfläche.

Diese Rechnungsweise gilt für das gewählte Beispiel naturgemäß nur so lange, als $k_2 \geqq 0$ ausfällt. Würde sich k_2 negativ ergeben, so wären an der rechten Kante des Mauerpfeilers von dem Boden Zugspannungen auf diesen auszuüben, was in Wirklichkeit nicht geschehen kann. In solchem Falle würde in allen denjenigen Flächenelementen, für welche sich Zugspannungen ergeben, die Berührung zwischen Pfeiler und Boden aufhören müssen und damit dieser Teil des Querschnittes für die Druckverteilung nicht mehr in Betracht kommen können. Die Rechnung ist dann derart durchzuführen, daß nur derjenige Teil des Querschnittes berücksichtigt wird, welcher tatsächlich in Wirksamkeit tritt. Wird unter Bezugnahme auf Fig. 7 mit x die Breite dieses Querschnittsteils bezeichnet, so folgt

$$k_1 = \frac{G+P}{l\,x} + \sigma,$$

und da

$$P\left(\frac{x}{2} - z\right) - G\left(\frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{6}\sigma l x^2,$$

$$k_1 = \frac{G+P}{l\,x} + \frac{6P\left(\frac{x}{2} - z\right) - 6G\left(\frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right)}{l\,x^2}.$$

Die Unbekannte x ergibt sich aus der Erwägung, daß die Pressung im Abstande x von der linken Pfeilerkante gleich Null sein muß, d. h.

$$0 = \frac{G+P}{l\,x} - \frac{6P\left(\frac{x}{2} - z\right) - 6G\left(\frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right)}{l\,x^2},$$

woraus

$$x = 3\,\frac{G\frac{s}{2} + Pz}{G+P}.$$

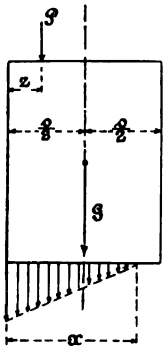


Fig. 7.

Denken wir uns P und G durch ihre Resultante $P+G$ ersetzt, so müßte diese im Abstande

$$y = \frac{G\frac{s}{2} + Pz}{G+P}$$

von der linken Pfeilerkante angreifen. Demnach

$$x = 3\,y,$$

d. h. die Breite x der für die Druckverteilung in Betracht kommenden Fläche ist gleich dem 3 fachen Werte des Abstandes y.

Die Einführung von y in den Ausdruck für k_1 liefert

$$k_1 = \frac{G+P}{l\,x} + \frac{6\,(G+P)\left(\frac{x}{2}-y\right)}{l\,x^2} = \frac{G+P}{3\,l\,y} + \frac{6\,(G+P)\,0{,}5y}{9\,l\,y^2}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{G+P}{l\,y} = 2\,\frac{G+P}{l\,x},$$

d. i. doppelt soviel als bei gleichmäßiger Verteilung des Druckes über den Querschnitt $l\,x$.

Galt der oben für k_1 gefundene Ausdruck nur für das durch

$$k_2 = \frac{G+P}{l\,s} - \frac{6\,P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l\,s^2} \geqq 0$$

umschlossene Gebiet, so ist das Geltungsbereich der zuletzt für k_1 ermittelten Gleichung durch

$$k_2 = \frac{G+P}{l\,s} - \frac{6\,P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l\,s^2} \leqq 0$$

oder durch

$$x = 3\,y = 3\,\frac{G\,\frac{s}{2}+P\,z}{G+P} \leqq s$$

begrenzt. Für den Grenzfall $k_2 = 0$ oder $x = s$ müssen beide Ausdrücke zu dem gleichen Werte führen. Die Beurteilung kann am raschesten in der Weise geschehen, daß man y ermittelt und zusieht, ob $y \gtreqless \frac{s}{3}$ ist. Im ersten und im zweiten Falle gilt der zuerst für k_1 bestimmte Wert, im zweiten und dritten Falle dagegen der zuletzt ermittelte.

§ 46. Einfluß von Kräften, welche in Richtung der Stabachse oder parallel zu ihr wirken, während der Stab durch Querkräfte durchgebogen wird.

1. Einfluß des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte durch P belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung.

Der zunächst als gewichtlos gedachte Stab, im ursprünglichen, unbelasteten Zustande, berührt die beiden Auflager mit bestimmten Teilen seiner Mantelfläche. Wenn er sich zu biegen beginnt, so muß derjenige Punkt der Stabachse, welcher ursprünglich über dem einen, etwa dem linken, Auflager sich befand, nach der Mitte rücken — vergl. Fig. 1 —, da die Achse, d. h. die elastische Linie,

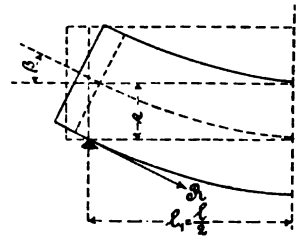


Fig. 1.

ihre Länge beibehält. Diese Verrückung Δ nach der Stabmitte hin läßt sich auffassen als Differenz zwischen der halben Stablänge $l_1 = 0{,}5\ l$ und der halben Sehne des Bogens der elastischen Linie, dessen Länge unveränderlich, nämlich gleich l_1, und dessen Pfeilhöhe gleich der Durchbiegung y' in der Mitte ist.

Wird, was für unseren Zweck zulässig, die elastische Linie als flacher Parabelbogen aufgefaßt, so erhält man, da für diesen, sofern dessen halbe Sehne a, dessen halbe Länge s und dessen Pfeilhöhe δ beträgt, bekanntlich gesetzt werden darf

$$s = a\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\delta^2}{a^2}\right),$$

entsprechend einem Unterschied von

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 a = \sim \frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{s}\right)^2 s$$

zwischen s und a,

$$\Delta = \frac{2}{3}\left(\frac{y'}{l_1}\right)^2 l_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{y'}{l}\right)^2 l.$$

Gleichzeitig mit dieser Verrückung des Endpunktes der elastischen Linie nach einwärts neigt sich derjenige Stabquerschnitt, welcher über dem Auflager stand, unter dem kleinen Winkel β. Hiermit ist eine Auswärtsbewegung der Linie (oder des Punktes), in welcher bezw. in welchem der Stab vor der Biegung das Auflager berührte, um $e\beta$ verknüpft. Da nach Gleichung 13, § 18,

$$\beta = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta},$$

so beträgt diese Auswärtsbewegung

$$\frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta} e.$$

Demnach rücken diejenigen Teile der Mantelfläche des Stabes, mit welchem derselbe im unbelasteten Zustande, d. h. bei gerader Achse, die Auflager berührte, nach auswärts um die Strecke

$$x = e\beta - \Delta = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta} e - \frac{4}{3}\left(\frac{y'}{l}\right)^2 l.$$

Gleichung 14, § 18, ergibt

$$y' = \frac{\alpha}{48}\frac{P l^3}{\Theta},$$

folglich

$$x = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta}\left(e - \frac{\alpha}{108}\frac{P l^3}{\Theta}\right).$$

Solange x positiv ist, d. h. wenn

Handelt es sich z. B. um die Ermittlung der Anstrengung, die eine Schwelle, Fig. 2, beim Eindrücken in die Bettung erfährt, so wird der Einfluß der Reibung, welche infolge der Durchbiegung zwischen Bettung und Unterfläche der Schwelle auftritt, nicht ohne Weiteres außer acht gelassen werden dürfen. Auch bei gebogenen

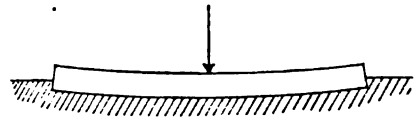


Fig. 2.

Federn, welche an beiden Enden aufliegen und in der Mitte belastet sind, können infolge des mit der Pfeilhöhe der gebogenen Mittellinie wachsenden Hebelarmes der Reibungskräfte diese von erheblicher Bedeutung werden u. s. w.

Immerhin aber werden es nur Ausnahmefälle sein, in denen auf die im vorstehenden erörterte Wirkung der Reibung zwischen gebogenem Stab und Auflager Rücksicht zu nehmen ist.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß bei — auch teilweiser — Entlastung des Stabes sich die Durchbiegung vermindert; damit kehrt die Kraft R ihre Richtung und das Moment Re seinen Sinn um, die Biegungsbeanspruchung nicht mehr vermindernd, sondern vermehrend.

2. Der an den Enden drehbar befestigte und hier durch Zugkräfte gespannte prismatische Stab wird durch die gleichmäßig über ihn verteilte Querkraft $Q = pl$ belastet.

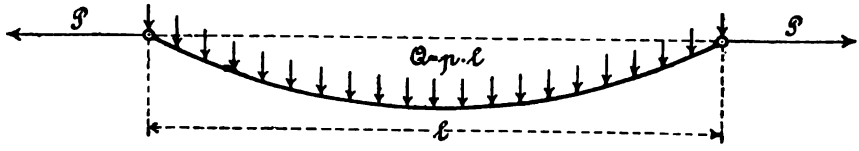


Fig. 3.

Wir denken uns den nach einem flachen Bogen durchhängenden Stab in der Mitte durchschnitten und daselbst eingespannt,

Rollenauflager erhalten, was meist zu geschehen pflegt. (Vergl. hierüber Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 244 u. f., Fußbemerkung daselbst.)

wie in Fig. 4 gezeichnet. Dann ergibt sich für den beliebigen um x von der Mitte abstehenden Querschnitt bei P das biegende Moment

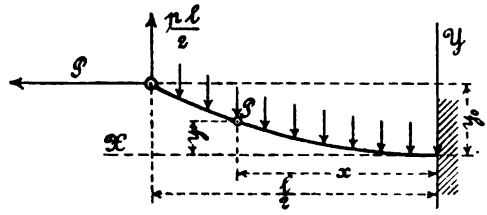


Fig. 4.

$$M_b = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - p\,\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{2} - P\,(y_0 - y)$$

$$= \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,x^2}{2} - P\,(y_0 - y)$$

und hiermit unter Beachtung von Gleichung 15, § 16,

$$\frac{\Theta}{\alpha}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,x^2}{2} - P\,(y_0 - y)$$

$$\frac{\Theta}{\alpha}\,\frac{d^2y}{dx^2} - P\,y + \frac{p\,x^2}{2} - \frac{p\,l^2}{8} + P\,y_0 = 0.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung liefert unter der Voraussetzung, daß Θ und α konstant sind,

$$y = C_1\,e^{x\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}} + C_2\,e^{-x\sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}} + \frac{p}{2P}\,x^2 + \frac{\Theta\,p}{\alpha P^2} - \frac{1}{P}\left(\frac{p\,l^2}{8} - P\,y_0\right). \quad 4)$$

Da für $x = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0,$$

so folgt

$$y'_{x=0} = \left| C_1 \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\, e^{x\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} - C_2 \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\, e^{-x\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} + \frac{p}{P}\, x \right|_{x=0} = 0,$$

d. h.

$$C_1 = C_2 = C.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ ist $M_b = 0$, somit $\varrho = \infty$, also

$$\frac{1}{\varrho} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

demnach

$$y''_{x=\frac{l}{2}} = \left| C\left[\frac{\alpha P}{\Theta}\, e^{x\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} + \frac{\alpha P}{\Theta}\, e^{-x\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}}\right] + \frac{p}{P} \right|_{x=\frac{l}{2}} = 0,$$

woraus

$$C = -\frac{p\Theta}{\alpha P^2\left[e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}}\right]}.$$

Ferner muß für $x = 0$ $y = 0$ sein, womit aus Gleichung 4 unter Berücksichtigung der Werte der Konstanten folgt

$$y_0 = \frac{1}{P}\left[\frac{pl^2}{8} - \frac{p\Theta}{\alpha P} + \frac{2p\Theta}{\alpha P\left(e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}}\right)}\right].$$

Hiermit findet sich das biegende Moment in der Mitte der Stange, d. i. für $x = \frac{l}{2}$,

$$\max\,(M_b) = \frac{pl^2}{8} - P y_0 = \frac{p\Theta}{\alpha P}\left[1 - \frac{2}{e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}}}\right] \quad 5)$$

und infolgedessen die Biegungsanstrengung

$$\sigma_b = \frac{\max(M_b)}{\frac{\Theta}{e_1}} = e_1 \frac{p}{\alpha P}\left[1 - \frac{2}{e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{\theta}}}}\right]. \quad 6)$$

Diese Gleichung liefert beispielsweise für eine 6 m lange Stange von 25 mm Durchmesser, die durch $P = 3000$ kg gespannt ist, bei Einführung von

$$e_1 = \frac{2{,}5}{2}, \quad p = \frac{\pi}{4} \cdot 2{,}5^2 \cdot 0{,}0078 = \sim 0{,}04 \text{ kg}, \quad \alpha = \frac{1}{2000000},$$

$$\Theta = \frac{\pi}{64} \cdot 2{,}5^4 = 1{,}914.$$

$$\sigma_b = \frac{2{,}5}{2} \frac{0{,}04}{\frac{1}{2000000}} 3000 \left[1 - \frac{2}{e^{300\sqrt{\frac{3000}{2000000 \cdot 1{,}914}}} + e^{-300\sqrt{\frac{3000}{2000000 \cdot 1{,}914}}}}\right]$$

$$= \frac{100}{3}\left(1 - \frac{1}{2220{,}5}\right) = 33{,}3 \text{ kg/qcm}.$$

Wie ersichtlich, tritt der Einfluß des zweiten Gliedes der Klammer ganz zurück, so daß es für den Fall größerer Länge der Zugstange und großer Zugkraft bei mäßigem Trägheitsmoment vollständig genügt, die Biegungsanstrengung zu berechnen aus

$$\sigma_b = e_1 \frac{p}{\alpha P}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

d. i. die bereits in § 6, Gleichung 12, für den frei aufgehängten Draht gefundene Biegungsinanspruchnahme, wenn dort e durch e_1 und H durch P ersetzt wird.

Unter den bezeichneten Verhältnissen erscheint hiernach die Biegungsbeanspruchung einer Zugstange so gut wie unabhängig von der Spannweite[1]).

[1]) Die Berechnung der Biegungsbeanspruchung, z. B. der oben behandelten Stange in der Weise, daß gesetzt wird

In ähnlicher Weise ist vorzugehen, wenn es sich um an den Enden eingespannte oder auch um schräge Zugstangen handelt.

3. *Ein dünner Stab ist um eine Rolle geschlungen und durch Zugkräfte belastet,* Fig. 5.

Die Beanspruchung des Bandes von der Stärke s, der Breite b, also dem Querschnitt $f = b\,s$, setzt sich zusammen aus der An-

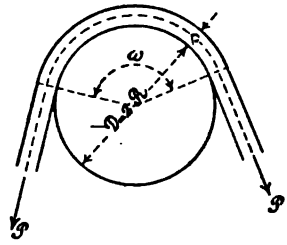


Fig. 5.

strengung, herrührend von der Zugkraft P, und aus der Anstrengung, welche dadurch hinzutritt, daß das Band um die Scheibe geschlungen, also gebogen werden muß.

Die erstere Inanspruchnahme gibt mit der Genauigkeit, mit welcher gleichmäßige Verteilung über den Querschnitt des Bandes angenommen werden kann, die Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{P}{b\,s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

$$M_b = \frac{p\,l^2}{8} = \frac{0{,}04 \,.\, 600^2}{8} = \sigma_b \frac{\Theta}{e} = \sigma_b \frac{\pi}{32} 2{,}5^3,$$

woraus folgen würde

$$\sigma_b = \sim 1150 \text{ kg/qcm},$$

ergibt somit eine durchaus irrtümliche Beurteilung der Biegungsanstrengung. Sie vernachlässigt eben den starken, das biegende Moment vermindernden Einfluß der Zugkraft P (vergl. Fig. 4) infolge der Durchbiegung.

Die erste dahingehende Veröffentlichung, welche dem Verfasser bekannt geworden ist, rührt von J. Schmidt her und findet sich im Civilingenieur 1874, S. 215 u. f. In neuerer Zeit hat Tolle den Gegenstand eingehend behandelt: Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 885 u. f.

Die letztere Anstrengung pflegt in folgender Weise berechnet zu werden.

Unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte des um die Scheibe gebogenen Stabes senkrecht zur gekrümmten Mittellinie stehen, erlangen die äußersten Fasern eine Länge $\omega\,(R+s)$, während sie vor der Biegung die Länge $\omega\left(R+\frac{s}{2}\right)$ besaßen; sie erfahren also eine Verlängerung um

$$\omega(R+s)-\omega\left(R+\frac{s}{2}\right)=\omega\frac{s}{2},$$

entsprechend der Dehnung

$$\frac{\frac{1}{2}\omega s}{\left(R+\frac{s}{2}\right)\omega}=\sim\frac{s}{2R},$$

somit der Spannung

$$\sigma_b=\frac{1}{\alpha}\frac{s}{2R}=\frac{1}{\alpha}\frac{s}{D}, \quad \ldots\ldots 9)$$

sofern α den innerhalb der eintretenden Beanspruchung als konstant vorausgesetzten Dehnungskoeffizienten bezeichnet.

Nach dieser Rechnung zeigt sich in den Querschnitten, welche dem gekrümmten Teile des Stabes angehören, die in Fig. 6 — mit übertrieben groß gezeichneter Bandstärke — nach der Linie $a\,b\,c$ dargestellte Spannungsverteilung. Zu diesen Biegungsspannungen tritt die von P herrührende Normalspannung σ_z, womit sich als Begrenzungslinie der Gesamtspannungen die Gerade $a_1\,b_1\,c_1$ und infolgedessen $\sigma_z+\sigma_b$ als Größtwert der Inanspruchnahme ergibt.

Diese Rechnungsweise liefert jedenfalls für den durch $A\,B$ gegebenen Querschnitt des Bandes eine zu große Beanspruchung, wie sofort aus folgender Erwägung erhellt. In dem durch den Umschlingungswinkel ω bestimmten Endquerschnitt $A\,B$ des gebogenen Stabes soll die Spannungsverteilung nach der Linie $a_1\,b_1\,c_1$ herrschen, also in der äußersten Faser die Zugspannung $\sigma_z+\sigma_b$, in

der innersten dagegen die Druckspannung $\sigma_b - \sigma_z$, sofern $\sigma_z < \sigma_b$ ist. Im unmittelbar danebenliegenden Querschnitt EF dagegen soll die konstante Zugspannung $\sigma_z = \overline{b\,b_1}$ vorhanden sein. In Wirklichkeit wird sich ein gewisser Ausgleich vollziehen, derart, daß im Querschnitt AB die von der Biegung herrührende Spannung außen und innen kleiner ist, als Gleichung 9 angibt, d. h. der Querschnitt des Stabes nimmt nicht die radiale Lage ein, welche die Rechnung voraussetzt, bleibt vielleicht auch nicht ganz eben. Die Biegungsanstrengung ist also tatsächlich im Quer-

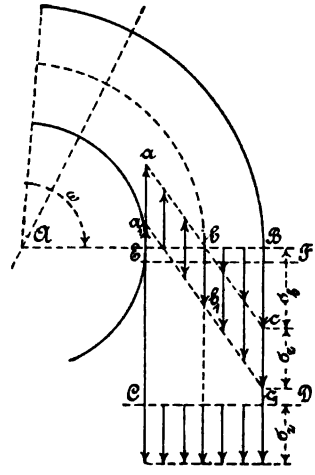


Fig. 6.

schnitt AB kleiner, als Gleichung 9 angibt. Dagegen wird sie jedenfalls in dem durch den Umschlingungswinkel $\frac{\omega}{2}$ bestimmten Stabquerschnitt diese Größe erreichen.

Für den Fall, daß die eine der beiden Zugkräfte P größer ist als die andere, infolgedessen sich Reibungskräfte zwischen Band und Scheibe geltend machen, kann durch diese eine mehr oder minder große Abänderung der Spannungsverteilung über die Querschnitte veranlaßt werden[1]).

[1]) Es ist hier der Ort, auf eine häufig anzutreffende irrtümliche Beurteilung der Beanspruchung von Bändern, Drähten u. s. w. aufmerksam zu machen, welche über eine Rolle oder Stütze gebogen sind.

Fig. 7 zeigt die Einrichtung einer ziemlich verbreiteten Drahtzerreißmaschine. Das eine Ende des Drahtes wird um einen Zylinder geschlungen und

VIII. Beanspruchung durch Schubspannungen (Schiebungen).

§ 47. Schub und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in denselben fallende Kraft S und ein Kräftepaar vom Momente M_d, dessen Ebene die Stabachse senkrecht schneidet.

In einem beliebigen Element des Querschnittes erzeugt die Schubkraft S eine Schubspannung τ_s und das auf Drehung wirkende Moment M_d eine Schubspannung τ_d; die Resultante aus τ_s und

---

mittelst eines Backens gegen denselben gepreßt. Das andere, durch Backen gehaltene Ende wird durch eine Schraubenspindel wagrecht gezogen, wobei die Belastung des Drahtes in dem Maße stetig steigt, wie der Hebelarm wächst, an welchem das Gewicht wirkt. Nach üblicher Auffassung müßte der

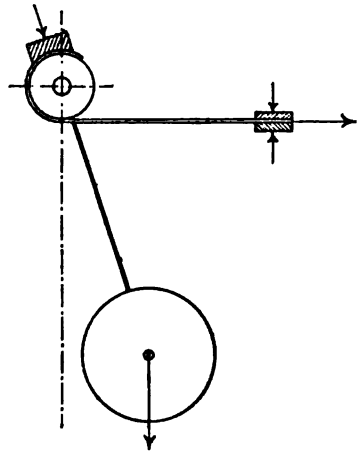


Fig. 7.

Draht da reißen, wo er um den Zylinder gebogen ist. In der Regel zerreißt er jedoch in der geraden Strecke.

Dieses Verhalten, auf dem die Verwendbarkeit der Umschlingung des Drahtes als Einspannung beruht, läßt sich auf folgende Weise erklären. Bei dem Biegen

τ_d liefert die Inanspruchnahme in dem betreffenden Querschnittselemente.

Bei Beurteilung derselben sowie bei Wahl der zulässigen Anstrengung ist es von Bedeutung, zu beachten, daß sie nicht bloß in dem Querschnitt, sondern auch senkrecht dazu auftritt (§ 30, s. auch Fig. 5, § 32, und Fig. 6, Taf. IX, bezw. die Erörterung, welche in § 45, Ziff. 1, zur Einführung von β_0 und in § 48, Ziff. 2, zur Einführung von α_0 Veranlassung gibt).

1. Kreisquerschnitt.

Nach § 39, b ist die von S herrührende Schubspannung am größten für die Umfangspunkte des zu S senkrechten Durchmessers, und zwar beträgt sie daselbst

$$\tau_s = \frac{4}{3}\frac{S}{f} = \frac{16}{3\pi}\frac{S}{d^2},$$

sofern

$$f = \frac{\pi}{4} d^2$$

die Größe des Querschnittes und d dessen Durchmesser bezeichnet.

---

des Drahtes um den verhältnismäßig kleinen Zylinder erfährt er eine starke bleibende Krümmung; die Beanspruchung entspricht auch entfernt nicht mehr der durch Gleichung 9 bestimmten Größe. Dabei wird das Material überanstrengt, die Festigkeit desselben nimmt zu, die Zähigkeit dagegen ab. Somit besitzt die gekrümmte Strecke eine größere Festigkeit. Bei der Durchführung der Zerreißprobe selbst vermindert sich die Zugbelastung des auf dem Zylinder liegenden Drahtstabes um so mehr, je weiter die Querschnitte von der Ablaufstelle entfernt liegen. Das Reißen erfolgt alsdann, wenigstens der Regel nach, in der geraden Strecke.

Ähnlich verhält es sich mit einem Bremsband, das um die Bremsscheibe geschlungen wird, oder mit dem Bleche eines Kessels, das kalt gerollt wird, und — wenn auch etwas verschieden davon — mit dem Kabel einer Kabelbrücke da, wo dasselbe auf den gewölbten Lagern ruht u. s. w.

Eine solche Überschreitung der zulässigen Anstrengung des Materials erscheint, bei ausreichender Zähigkeit des letzteren, in den meisten Fällen ebenso wie z. B. das kalte Richten eines Stabes aus zähem Eisen unbedenklich; nur darf es sich nicht oft wiederholen, jedenfalls nicht öfter, als es die Zähigkeit des Materials und dessen nachherige Verwendung gestattet.

Nach § 32 ist für alle Umfangspunkte die durch M_d wachgerufene Schubspannung

$$\tau_d = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3}$$

die größte. Demnach beträgt die resultierende Anstrengung, welche in jenen beiden Umfangspunkten den größten Wert erreicht,

$$\tau_s + \tau_d = \frac{16}{3\pi}\frac{S}{d^2} + \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3} = \frac{16}{\pi d^2}\left(\frac{S}{3} + \frac{M_d}{d}\right).$$

2. Kreisringquerschnitt von geringer Wandstärke, Fig. 5, § 39.

Nach § 39, c ist

$$\tau_s = 2\frac{S}{f},$$

nach § 32

$$\tau_d = \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_0^4} = \sim 2\frac{M_d}{d_m f},$$

sofern

$$d_m = \frac{d + d_0}{2} \qquad f = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2).$$

Folglich

$$\tau_s + \tau_d = \frac{2}{f}\left(S + \frac{M_d}{d_m}\right).$$

3. Rechteckiger Querschnitt, Fig. 2, § 38.

Unter der Voraussetzung, daß S senkrecht zur Breite b wirkt, werden beide Schubspannungen am größten in den Mitten der langen Seiten.

Nach § 38 beträgt hier

$$\tau_s = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h},$$

und nach § 34

$$\tau_d = \frac{9}{2}\frac{M_d}{b^2 h}.$$

Somit

$$\tau_s + \tau_d = \frac{3}{2}\frac{1}{b\,h}\left(S + 3\frac{M_d}{b}\right).$$

IX. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen) und Schubspannungen (Schiebungen).

§ 48. Größte Anstrengung bei gleichzeitig vorhandener Dehnung (Normalspannung) und Schiebung (Schubspannung).

1. Begriff der zulässigen Anstrengung des Materials.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß hinsichtlich des Begriffs der zulässigen Anstrengung ein Zweifel nicht bestehe. So lange nur Normalspannungen in Richtung der Stabachse (Zug, Druck, Biegung) oder lediglich Schubspannungen (Drehung, Schub) vorhanden sind, pflegt ein solcher auch tatsächlich nicht in die Erscheinung zu treten; anders gestaltet sich jedoch die Sachlage, sobald Normalspannungen und Schubspannungen gleichzeitig tätig, oder senkrecht zueinander wirkende Normalspannungen vorhanden sind. Dann kann in der Tat eine Unsicherheit entstehen. Aus diesem Grunde ist hier, wo uns erstmals gleichzeitig Normalspannungen und Schubspannungen entgegentreten, der Begriff der zulässigen Anstrengung zu erörtern.

Bei der Herleitung der Abmessungen von Maschinen- oder Bauteilen sowie von ganzen Konstruktionen aus den beanspruchenden Kräften sind drei Gesichtspunkte festzuhalten, sofern abgesehen wird von den Fällen, in denen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung, Abnützung u. s. w. maßgebend erscheinen.

Davon liegen nur zwei dieser Gesichtspunkte auf dem Gebiete der statischen Elastizitätslehre, mit der sich das vorliegende Buch

allein beschäftigt. Im Interesse der Klarstellung erscheint es geboten, hinsichtlich dieser Abgrenzung folgendes zu bemerken.

Die statische Elastizitätslehre setzt voraus, daß in jedem Augenblick zwischen den äußeren Kräften, welche den Körper belasten, und den hierdurch infolge der Formänderung wachgerufenen inneren Kräften Gleichgewicht besteht. Wenn z. B. die äußeren Kräfte, welche auf den Stab einwirken, dies sofort in voller Größe tun und dann wieder aufhören, tätig zu sein, so wird der Körper in Schwingungen geraten, d. h. in eine Aufeinanderfolge wechselnder Formänderungszustände gelangen. Infolge äußerer und innerer Widerstände nimmt die Größe dieser Schwingungen fortgesetzt ab, und schließlich geht der Körper in den Zustand der Ruhe über. Schwingungen des Körpers, wie soeben besprochen, stellen sich auch ein, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte in raschem Wechsel Größe oder Richtung oder beides ändern. Sie vermögen unter Umständen unerwartet große Werte zu erreichen. Die Feststellung der Inanspruchnahmen, welche infolge dieser Schwingungen auftreten können, erfordert Eingehen auf die in Betracht kommenden dynamischen Verhältnisse und geht deshalb über das Gebiet der statischen Elastizitätslehre hinaus. Die Verfolgung dieser Verhältnisse kann in manchen Fällen notwendig werden, wenn man sich ein zutreffendes Urteil über den Größtwert der Beanspruchung verschaffen will. Namentlich treten solche Fälle im Maschineningenieurwesen auf, haben jedoch in der Literatur erst in neuester Zeit die ihnen gebührende Beachtung gefunden[1]).

Der erste Gesichtspunkt, welcher das bestimmt, was der Regel nach als zulässige Anstrengung gilt, liefert die Forderung, daß

a) (nach der Ansicht der einen) die Spannung,

oder

b) (nach der Ansicht der anderen) die verhältnismäßige Dehnung

in keinem Punkte des Körpers die höchstens für zulässig erachtete Größe überschreite.

---

[1]) Frahm, Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1902, S. 797 u. f. oder Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 6,

Sommerfeld, Beitrag zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre, Physikalische Zeitschrift 1902, S. 266 u. f.

u. a.

Bei einfacher Zug-, Druck- und Biegungselastizität sowie bei Verbindung derselben besteht — streng genommen allerdings nur im Falle der Unveränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten — Proportionalität zwischen Dehnungen und den ihnen entsprechenden Normalspannungen. In diesen Fällen kommt deshalb die Forderung a) auf dasselbe hinaus wie diejenige unter b); denn multipliziert man die höchstens für zulässig erachtete Normalspannung mit dem Dehnungskoeffizienten, so tritt an ihre Stelle die höchstens noch für zulässig gehaltene Dehnung.

Da bei einfacher Drehungs- und Schubelastizität sowie bei Verbindung beider ebenfalls Proportionalität zwischen Schubspannungen und den zugehörigen Dehnungen vorhanden ist (§ 31), so dürfen auch in diesen Fällen — Unveränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten vorausgesetzt — die Bedingungen unter a) und b) als zusammenfallend betrachtet werden.

Wirken dagegen senkrecht zueinander stehende Normalspannungen gleichzeitig, so hört die sonst vorhandene Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen auf, wie in § 7 und § 14 erörtert worden ist, und die Auffassung nach a) fordert etwas anderes als diejenige nach b). Die erstere räumt den senkrecht zum gezogenen oder gedrückten Stab wirkenden Kräften keinen Einfluß auf die zulässige Anstrengung ein, sie läßt die in § 9, Ziff. 1, erörterten Versuchsergebnisse unbeachtet, sie belastet einen in Richtung der Achse gezogenen und senkrecht zu seiner Achse gedrückten Stab ebenso stark, als wenn diese Druckkräfte nicht vorhanden wären, sie wählt die zulässige Anstrengung der Bleischeibe Fig. 1, § 14, ebenso groß wie diejenige der Fig. 2, § 14, obgleich dieselbe im letzteren Falle erfahrungsgemäß weit größer genommen werden darf; für sie ist die zulässige Anstrengung im Falle der Fig. 5, § 13 (Fig. 3, § 13), dieselbe, gleichgültig, ob $z = 60$ mm oder $z = 5$ mm, und zwar auch dann, wenn etwa an Stelle des Steinwürfels ein solcher aus Schmiedeisen träte; sie kann folgerichtig den in § 20, Ziff. 2, besprochenen Einfluß der Fasern aufeinander nicht anerkennen u. s. f.

Treten gleichzeitig Normal- und Schubspannungen auf, so ergeben sich für den betreffenden Punkt des Körpers eine größte Spannung und eine größte Dehnung; beide stehen jedoch nicht in dem Verhältnisse wie einfache Normalspannung und Dehnung nach Maßgabe der Gleichung 2 oder 4, § 2. Die Bedingung unter a)

verlangt deshalb in solchem Falle auch nicht das gleiche wie die Forderung unter b).

Die Auffassung unter a) ist die ältere und erfreut sich auch heute noch einer großen Verbreitung. Mariotte dürfte wohl der erste gewesen sein, welcher darauf hingewiesen hat, daß die Dehnung eine gewisse Grenze nicht überschreiten soll; dagegen scheint es, daß erst Poncelet die Forderung unter b) mit Entschiedenheit vertreten und durchgeführt hat.

Daß die Bedingung unter a) in verschiedenen Fällen nicht zutreffend ist, erhellt aus dem Erörterten. Unter diesen Umständen erachtet Verfasser die Feststellung des Begriffs der zulässigen Anstrengung nach Maßgabe der Forderung unter b) für die zweckmäßigere, wenigstens zunächst. Welcher Grad der Zuverlässigkeit ihr innewohnt, welche Mängel ihr anhaften, wird durch ausgedehnte — übrigens erheblichen Schwierigkeiten begegnende — Versuche noch zu entscheiden sein[1]).

Folgerichtig wäre hiernach, mit zulässigen Dehnungen statt mit zulässigen Spannungen zu rechnen. Da sich jedoch der Begriff der zulässigen Anstrengung als einer auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft eingebürgert hat, es auch keine Schwierigkeit bietet, zu jeder zulässigen Spannung eine entsprechende Dehnung zu bestimmen[2]), so erscheint die Beibehaltung der auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft als Maß der zulässigen Anstrengung ausführbar und berechtigt. Nur ist hierbei festzuhalten, daß dann in den Fällen gleichzeitigen Vorhandenseins von senkrecht zueinander stehenden Normalspannungen oder von Normal- und Schubspannungen an die Stelle der höchstens zulässigen Dehnung keine

[1]) Erst in neuester Zeit ist das Interesse an der Lösung der hier bezeichneten Aufgabe ein allgemeines geworden. Vergl. u. a. die Veröffentlichungen von Mohr in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1900, S. 1524 u. f., 1901, S. 740 u. f., Guest, Philosophical Magazine 1902, Roth, Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues, Leipzig 1902, Scily, Baumaterialienkunde 1902, Heft 21. Letzterer gelangt, ohne jedoch die Aufgabe als gelöst anzusehen, zu dem Ergebnis: „In unserem Falle scheint es als experimentell bewiesen, daß es nicht die maximale Spannung, sondern die maximale Dehnung ist, welche bei der Zerstörung des Materials eine ausschlaggebende Rolle spielt."

[2]) Nach S. 301 ist die Normalspannung mit α, die Schubspannung mit $\frac{m+1}{m}\alpha$ zu multiplizieren. (Vergl. auch S. 433.)

wirkliche, sondern nur eine gedachte Spannung tritt, nämlich der Quotient: zulässige Dehnung dividiert durch den Dehnungskoeffizienten. (S. Gleichung 3, 7.)

Der zweite Gesichtspunkt ergibt sich in der Forderung, daß die Gesamtformänderung des belasteten Körpers innerhalb der Grenzen bleibe, welche durch den besonderen Zweck desselben oder durch den Zusammenhang mit anderen Konstruktionsteilen gesteckt sind. Da, wo eine höchstens zulässige Durchbiegung, Verdrehung u. s. w. die Abmessungen bestimmt, ist im allgemeinen eine Rechnung mit zulässiger Anstrengung im soeben erörterten Sinne des Wortes nicht mehr richtig. Dieselbe ist dann eine Funktion der Form und Größe des in Frage stehenden Körpers. (S. auch die erste Fußbemerkung zu § 26, vierten Absatz.)

Der dritte Gesichtspunkt wird durch Eingehen auf die oben (S. 425) bezeichneten dynamischen Verhältnisse gegeben.

2. Ermittlung der größten Anstrengung.

Wir denken uns in dem Stabe, Fig. 1, ein Körperelement, eine Faser $A\,B\,C\,D$ von der Länge $\overline{A\,B} = \overline{C\,D}$ abgegrenzt derart, daß die in $A\,D$ sich projizierende Stirnfläche mit dem in Betracht

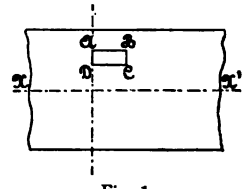


Fig. 1.

gezogenen Stabquerschnitt zusammenfällt, während die Richtungen $A\,B$ und $D\,C$ mit der Stabachse parallel laufen. In Fig. 2 sei dieses Faserstück, entsprechend dem ursprünglichen Zustande, d. h. vor der Inanspruchnahme des Stabes, in größerem Maßstabe durch die ausgezogenen Linien dargestellt.

Unter Einwirkung der äußeren Kräfte dehne sich die Faser in der Richtung $A\,B$ um

$$\overline{B\,E} = \overline{K\,F} = \varepsilon \,.\, \overline{A\,B},$$

sofern

$$\varepsilon = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$$

die verhältnismäßige Dehnung bezeichnet. Nach § 1 muß sich die Faser gleichzeitig senkrecht zu ihrer Achse zusammenziehen.

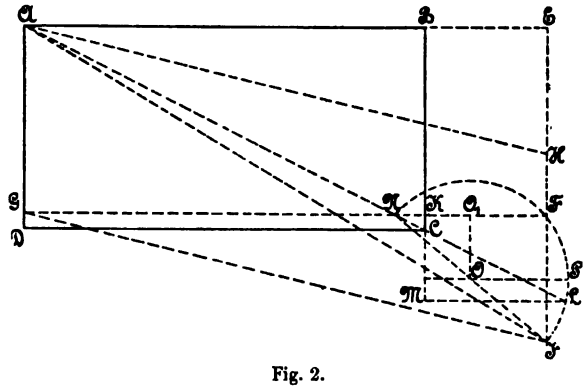


Fig. 2.

Diese Zusammenziehung betrage

$$\overline{CK} = \overline{DG} = \varepsilon_q . \overline{BC},$$

wenn

$$\varepsilon_q = \frac{\overline{CK}}{\overline{BC}},$$

(vergl. § 7).

Zu dieser mit der Normalspannung verknüpften Formänderung tritt nun die der Schubspannung entsprechende. Es verschiebe sich der Querschnitt EF (ursprünglich BC) um

$$\overline{EH} = \overline{FJ} = \gamma . \overline{AB}$$

gegen den Querschnitt AGD, sofern γ die Schiebung (vergl. § 28) bedeutet.

Hierbei dehnt sich die ursprünglich $\overline{AC}$ lange Strecke bis zur Größe $\overline{AJ}$. Fällt man von J ein Lot JL auf die über C hinaus verlängerte Linie AC, so daß also $\measuredangle\, JLA = 90^0$ ist, so ergibt sich die Verlängerung, welche $\overline{AC}$ beim Übergang in $\overline{AJ}$

erfahren hat, mit Rücksicht darauf, daß die Formänderungen überhaupt klein sind, angenähert zu $\overline{CL}$. Hiermit wird dann die verhältnismäßige Dehnung ε_1 der Strecke $\overline{AC}$

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{CL}}{\overline{AC}}.$$

Dieser Wert ist aber auch gleich $\overline{LM} : \overline{AB}$, sofern $LM \parallel BA$ durch L gezogen wird; folglich

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}.$$

ε_1 erlangt seinen größten Wert, wenn dies bei $\overline{LM}$ eintritt, da die ursprüngliche Faserlänge $\overline{AB}$ als Konstante gilt.

Zur Feststellung von max $(\overline{LM})$ führt nachstehende Betrachtung.

Mit N als Schnittpunkt der Linien GF und AC findet sich

$$\overline{FN} = \overline{FK} + \overline{KN} = \varepsilon \cdot \overline{AB} + \overline{KC}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = (\varepsilon + \varepsilon_q)\,\overline{AB}.$$

Außerdem ist

$$\overline{FJ} = \gamma \cdot \overline{AB}.$$

Über der Hypotenuse NJ des durch FN und FJ bestimmten rechtwinkeligen Dreiecks NFJ beschreiben wir mit NJ als Durchmesser und O als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Punkte L und F in sich enthalten muß (wegen $\sphericalangle JLN = 90^0$ und $\sphericalangle JFN = 90^0$). Man erkennt nun leicht, das $\overline{LM}$ seinen größten Wert erreicht, wenn L, auf dem Kreisbogen sich bewegend, in die durch den Kreismittelpunkt O gehende Horizontale, d. h. nach P gelangt.

Ist O_1 die Projektion von O auf GF, so ergibt sich

$$\max(\overline{LM}) = \overline{KO_1} + \frac{1}{2}\overline{NJ}.$$

Wegen

$$\overline{KO_1} = \overline{NO_1} - \overline{NK} = \frac{\overline{NF}}{2} - \overline{NK}$$

unter Beachtung, daß

$$\overline{NF} = (\varepsilon + \varepsilon_q)\,\overline{AB},$$

$$\overline{NK} = \overline{CK}\,\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \varepsilon_q \,.\, \overline{AB},$$

infolgedessen

$$\overline{KO_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_q)\,\overline{AB} - \varepsilon_q\,\overline{AB} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_q)\,\overline{AB};$$

und da

$$\overline{NJ} = \sqrt{\overline{NF}^2 + \overline{JF}^2} = \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2\overline{AB}^2 + \gamma^2 \,.\, \overline{AB}^2}$$

$$= \overline{AB}\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

so findet sich

$$\max(\overline{LM}) = \frac{1}{2}\overline{AB}(\varepsilon - \varepsilon_q) + \frac{1}{2}\overline{AB}\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

und hieraus

$$\max\left(\frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}\right) = \max(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon - \varepsilon_q + \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2}\right]. \quad 1)$$

Unter der Voraussetzung, daß innerhalb der in Betracht gezogenen Stabstrecke senkrecht zur Stabachse Kräfte von Bedeutung überhaupt nicht einwirken, so daß die verhältnismäßige Querzusammenziehung

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m}$$

gesetzt werden darf (§ 1 und § 7), folgt zunächst

$$\max(\varepsilon_1) = \frac{m-1}{2m}\,\varepsilon + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^2\gamma^2}. \quad 2)$$

und sodann (nach § 2, Gleichung 2, bezw. § 31, Gleichung 3) mit

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma$$

und

$$\gamma = \beta\,\tau = 2\,\alpha\,\frac{m+1}{m}\,\tau$$

$$\max(\varepsilon_1) = \alpha\left(\frac{m-1}{2\,m}\,\sigma + \frac{m+1}{2\,m}\,\sqrt{\sigma^2+4\,\tau^2}\right).$$

Hierdurch ist die Größe von $\max(\varepsilon_1)$ und damit nach Ziff. 1 auch die größte Anstrengung

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m-1}{2\,m}\,\sigma + \frac{m+1}{2\,m}\,\sqrt{\sigma^2+4\,\tau^2} \quad . \quad . \quad 3)$$

des Materials festgestellt.

Der im vorstehenden zur Bestimmung der letzteren beschrittene Weg wurde nach Wissen des Verfassers zuerst von Poncelet eingeschlagen[1]).

Wie aus dem Gange der Entwicklung folgt, setzt die Gleichung 3 voraus, daß die Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, auf die ganze Erstreckung weder einen Zug noch einen Druck noch einen Querschub aufeinander ausüben, also auch nicht von außen empfangen.

Was die Richtung anbetrifft, in welcher die größte Anstrengung stattfindet, so erkennt man, daß diese mit der Verbindungslinie der Punkte N und P, d. h. mit NP zusammenfällt. Wird nun berücksichtigt, daß $\sphericalangle FNP = \varphi$ wegen $\overset{\frown}{FP} = \overset{\frown}{PJ}$ die Hälfte von $\sphericalangle FNJ$ ist, und daß

$$\operatorname{tg} \sphericalangle FNJ = \frac{\overline{FJ}}{\overline{NF}} = \frac{\gamma \cdot \overline{AB}}{(\varepsilon+\varepsilon_q)\,\overline{AB}},$$

so findet sich

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{\gamma}{\varepsilon+\varepsilon_q} = \frac{m}{1+m}\,\frac{\gamma}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Hiermit erscheint die durch φ gegenüber der Stabachse (Richtung der Normalspannung) festgelegte Richtung AC, in welcher die Dehnung ihren größten Wert erlangt, bestimmt.

---

[1]) Die Ableitung aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre findet sich im § 69.

Mit

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma, \qquad \gamma = 2\,\alpha\,\frac{m+1}{m}\,\tau$$

wird

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{m\,\gamma}{(1+m)\,\varepsilon} = 2\,\frac{\tau}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Für $\tau = 0$ ergibt sich $\varphi = 0$, d. h. die größte Dehnung findet dann in Richtung der Stabachse statt, wie ohne weiteres klar ist.

Für $\sigma = 0$ wird

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0,$$

wie bereits in § 31, Ziff. 1, festgestellt wurde.

Für $\tau = 0$ ergibt Gleichung 3

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma$$

und für $\sigma = 0$

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m+1}{m}\,\tau.$$

Hiernach entspricht die Schubspannung τ allein einer Dehnung

$$\frac{m+1}{m}\,\alpha\,\tau,$$

während die Normalspannung σ mit einer solchen im Betrage von

$$\alpha\,\sigma$$

verknüpft ist. Bei gleicher Größe der beiden Spannungen ergibt sich die erstere Dehnung im Verhältnis von $(m+1):m$ bedeutender als die letztere. Soll die Dehnung, d. h. die Anstrengung, in beiden Fällen die gleiche sein, so muß τ im Verhältnis von $m:(m+1)$ weniger betragen als σ, wie bereits aus dem in § 31 Erörterten hervorgeht[1]).

Die Gleichung 3 setzt voraus, daß das Material in allen Punkten des Körpers nach allen Richtungen hin gleich beschaffen

[1]) Die tatsächlichen Anstrengungen verhalten sich hiernach nicht wie $\tau:\sigma$, sondern wie $\frac{m+1}{m}\,\tau:\sigma$.

(isotrop) ist. Diese Voraussetzung trifft nun nicht immer zu, so z. B. bei Walzeisen nicht, dessen Widerstandsfähigkeit namentlich gegenüber Schubspannungen in Ebenen, parallel zur Walzrichtung und senkrecht zur Richtung des beim Walzen ausgeübten Druckes, sich vergleichsweise erheblich geringer erweist. In derartigen Fällen ist es natürlich unzutreffend, den Einfluß der Dehnung ε, welche einer bestimmten Schubspannung entspricht, gegenüber derjenigen Dehnung, welche bei Normalspannungen als höchstens zulässig erachtet wird, nach Maßgabe der Gleichung

$$\varepsilon_1 = \frac{m+1}{m} \alpha \tau = \alpha \sigma \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

zu beurteilen. Dann muß vielmehr die Beziehung

$$\gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \tau$$

vor Einführung in die Gleichung 2 eine Berichtigung oder Ergänzung erfahren, am einfachsten durch Multiplikation mit einem Koeffizienten α_0, welcher ganz allgemein die Aufgabe haben soll, dem Umstande Rechnung zu tragen, daß die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung für die zwischen 4 und 3 liegende Größe m nicht immer in dem Verhältnisse

$$m : (m+1) = 4 : 5 \text{ bis } 3 : 4 = 1 : 1{,}25 \text{ bis } 1 : 1{,}33$$

steht. (S. auch Gleichung 5, § 31.)

Mit

$$\gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \alpha_0 \tau$$

geht Gleichung 3 über in

$$\left.\begin{aligned} \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) &= \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung in kg}}{\frac{m+1}{m} \text{ zulässige Anstrengung bei Schubspannung in kg}} \end{aligned}\right\} . \quad 7^1)$$

[1]) S. des Verfassers Maschinenelemente, 1881, S. 11, 207, 208, 210, 211, 216 u. s. f., 1891/92, S. 22 u. f., 330, 331 u. s. f., 1903 (9. Aufl.), S. 27 u. f. S. 501 u. s. w.

Mit Rücksicht hierauf werde α_0 als das Verhältnis der zulässigen Anstrengungen für den gerade vorliegenden Fall oder kurz als Anstrengungsverhältnis bezeichnet.

Setzt man, dem heutigen Stande der Versuchsergebnisse entsprechend, und in der Absicht, zu runden Zahlenkoeffizienten zu gelangen,

$$m = \frac{10}{3},$$

so gehen die Gleichungen 7 über in

$$\left.\begin{aligned} \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) &= 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung}}{1{,}3 \text{ zulässige Anstrengung bei Schubspannung}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 8)$$

Der Unterschied, welcher sich hinsichtlich der Anstrengung $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$ ergibt, je nachdem man $m = 3$ oder $m = 4$ oder einen dazwischen gelegenen Wert setzt, ist übrigens unbedeutend.

Durch die Feststellung in den Gleichungen 7 und 8 erfüllt der Koeffizient α_0 nicht bloß seinen Zweck beim Mangel allseitiger Gleichartigkeit des Materials, sondern auch dann, wenn die Werte für die beiden zulässigen Anstrengungen aus anderen Gründen nicht in dem Verhältnisse $(m + 1) : m$ stehen. Das wird bei vorhandener Isotropie des Materials allgemein dann der Fall sein, wenn die gleichzeitig auftretenden Normalspannungen und Schubspannungen nicht gleichartig sind, beispielsweise dann, wenn die erstere eine fortgesetzt wechselnde ist (Biegungsanstrengung einer sich drehenden Welle u. s. w.), während die letztere als unveränderlich gelten kann (Drehungsanstrengung derselben Welle bei Überwindung eines konstanten Arbeitswiderstandes) u. s. f.[1]).

Bei Entwicklung der grundlegenden Beziehungen 1 bis 3 war in Übereinstimmung mit der hierfür entworfenen Figur 2, S. 429, angenommen worden, daß die Dehnung ε (die Normalspannung σ)

[1]) S. des Verfassers Maschinenelemente, 1881, S. 18 u. f., 1891/92, S. 34 u. f., 1903 (9. Aufl.), S. 44 u. f.

in Richtung der Stabachse eine positive sei, entsprechend einem an der betreffenden Stelle wirkenden Zug. Ist das Entgegengesetzte der Fall, erfährt der Stab in Richtung seiner Achse eine Zusammendrückung, d. h. sind ε und σ negativ, so führt die gleiche Betrachtung zu dem Ergebnis

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = -\frac{m-1}{2m}\cdot\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \quad . \quad 3a)$$

Hierbei ist σ nur mit seiner absoluten Größe einzusetzen. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Beziehung 3 lediglich dadurch, daß hier die größte Anstrengung als Druckbeanspruchung erscheint, während sie dort als Zuginanspruchnahme auftrat. Dementsprechend treten an die Stelle der Gleichungen 7 und 8 die Beziehungen

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = -\frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2+4(\alpha_0\tau)^2} \quad 7a)$$

bezw.

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2+4(\alpha_0\tau)^2} \quad . \quad 8a)$$

Neben dieser Druckbeanspruchung, wie sie hierdurch bestimmt ist, wird unter Umständen noch eine größte Zuganstrengung maßgebend sein können, nämlich dann, wenn die positive Dehnung, welche der Schiebung γ entspricht (vergl. § 31, S. 298), die Zusammendrückung, welche mit der negativen Normalspannung in Richtung der Stabachse verknüpft ist, bedeutend überwiegt. Diese größte Zuganstrengung, welche dann gleichzeitig mit der größten Druckbeanspruchung $\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$ auftritt, und die mit $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ bezeichnet sei, kann in gleicher Weise ermittelt werden, wie oben die Gleichungen 1 bis 3 gefunden wurden, oder man kann sie unmittelbar aus Gleichung 3 ableiten, indem in der letzteren σ negativ gesetzt wird. Auf beiden Wegen ergibt sich

$$\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = -\frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \quad . \quad 3b)$$

und damit nach Gleichung 7 und 8

$$\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = -\frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}, \quad 7\,\text{b})$$

$$\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = -0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}. \quad . \quad . \quad 8\,\text{b})$$

In diese Beziehungen ist σ natürlich nur mit seiner Größe ohne Rücksicht auf das Vorzeichen einzuführen.

Der absolute Wert von $\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$ ist nach Gleichung 3a allerdings größer als derjenige, welchen Gleichung 3 b für $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ liefert. Da aber die zulässige Zuganstrengung in manchen Fällen bedeutend geringer zu sein pflegt als die zulässige Druckinanspruchnahme, so kann trotzdem $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ maßgebend werden.

§ 49. Zug (Druck) und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in die Richtung der Stabachse fallende Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente M_d, dessen Ebene die Stabachse senkrecht schneidet.

In einem beliebigen Element des Querschnitts von der Größe f wird durch die Zugkraft P eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{f}$$

wachgerufen, während das auf Drehung wirkende Moment M_d eine Schubspannung τ erzeugt, welche nach den §§ 32 bis 36 zu bestimmen ist. Da σ für alle Punkte des Querschnittes als gleich groß aufgefaßt werden darf, so tritt die bedeutendste Anstrengung da auf, wo τ seinen größten Wert erlangt.

Nach den Gleichungen 7, § 48, ergibt sich mit k_z als zulässiger Zug- und k_d als zulässiger Drehungsanstrengung

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{\frac{m+1}{m} k_d}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 1)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\, k_d}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; 2)$$

Wirkt P nicht ziehend, sondern drückend, so wird σ negativ, infolgedessen nach Gleichung 8a, § 48, zunächst die mit k als zulässiger Druckanstrengung gültige Beziehung

$$\left.\begin{aligned} k &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k}{1{,}3\, k_d} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; 3)$$

und sodann auch nach Gleichung 8b, § 48, die Forderung

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq -0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\, k_d} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 3a)$$

befriedigt sein muß. Hierbei ist vorausgesetzt, daß Rücksichtnahme auf Knickung (§ 23) nicht nötig wird.

Die Werte von τ können unmittelbar aus der Spalte 3 der Zusammenstellung des § 36 entnommen werden, sofern k_d durch τ ersetzt wird. Die Normalspannung σ tritt nur mit ihrer absoluten Größe in die Beziehungen 1 bis 3a ein.

§ 50. Biegung und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für den betrachteten Querschnitt zwei Kräftepaare, das eine (biegende) vom Momente M_b und das andere (drehende) vom Momente M_d; die Ebene des ersteren schneidet den Querschnitt, diejenige des letzteren die Stabachse senkrecht.

In einem beliebigen Punkte des Querschnitts verursacht

M_b eine Normalspannung σ, welche nach § 16 oder § 21 festzustellen ist,

M_d eine Schubspannung τ, deren Bestimmung nach den §§ 32 bis 34 zu erfolgen hat.

Die für den betreffenden Punkt resultierende Anstrengung ergibt sich alsdann aus Gleichung 7, § 48. Bezeichnet k_b die zulässige Biegungs- und k_d die zulässige Drehungsanstrengung, so gilt mit $m = \frac{10}{3}$

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_b}{1{,}3\,k_d}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

Naturgemäß sind σ und τ für denjenigen Querschnitt und hier für denjenigen Punkt einzuführen, für welchen die rechte Seite den größten Wert erlangt.

1. Kreisquerschnitt.

Hier fallen die Punkte der größten Normalspannung

$$\sigma = \frac{32}{\pi}\frac{M_b}{d^3}$$ (Gleichung 10, § 16, und Gleichung 5, § 17)

und die Punkte der größten Schubspannung

$$\tau = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3}$$ (Gleichung 3, § 32)

zusammen, folglich

$$k_b \geqq 0{,}35\,\frac{32}{\pi}\frac{M_b}{d^3} + 0{,}65\,\sqrt{\left(\frac{32}{\pi}\frac{M_b}{d^3}\right)^2 + \left(\frac{32}{\pi}\frac{M_d}{d^3}\,\alpha_0\right)^2}$$

$$k_b \geqq \frac{32}{\pi}\frac{1}{d^3}\,[0{,}35\,M_b + 0{,}65\,\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}]. \quad . \quad . \quad 2)$$

Auch für den Kreisringquerschnitt findet dieses Zusammenfallen statt.

2. *Elliptischer Querschnitt,* Fig. 2, § 33.

a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kleinen Achse der Ellipse.

Die größte Normalspannung

$$\sigma = \frac{4}{\pi}\frac{M_b}{a b^2}$$

tritt hier auf in den Endpunkten B der kleinen Achse (Gleichung 10, § 16, und 7, § 17).

Die Schubspannung erlangt ihren Größtwert

$$\tau = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a b^2}$$

an denselben Stellen (Gleichung 6, § 33).

Hiernach findet die größte Anstrengung in den Punkten B statt. Demgemäß ergibt sich aus Gleichung 1

$$k_b \geqq 0{,}35\,\frac{4}{\pi}\frac{M_b}{a b^2} + 0{,}65\,\sqrt{\left(\frac{4}{\pi}\frac{M_b}{a b^2}\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi}\frac{M_d}{a b^2}\,\alpha_0\right)^2}$$

$$k_b \geqq \frac{4}{\pi}\frac{1}{a b^2}\,[0{,}35\,M_b + 0{,}65\,\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}\,] \quad . \quad . \quad 3)$$

b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur großen Achse der Ellipse.

Die Normalspannung besitzt ihren Größtwert in den Endpunkten A der großen Achse, während die Schubspannung in den Endpunkten B der kleinen Achse am größten ausfällt. Infolgedessen muß zunächst ermittelt werden, an welchen Stellen die größte Anstrengung eintritt.

Daß dieselben auf dem Umfange liegen, ist ohne weiteres klar. Nun ist nach Gleichung 9, § 16, die Normalspannung σ im Abstande z' von der kleinen Achse

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} z' = \frac{M_b}{\frac{\pi}{4} a^3 b} z'$$

und nach Gleichung 5, § 33, die vom drehenden Moment verursachte Schubspannung in den um z' von derselben Achse abstehenden Umfangspunkten

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2} \sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

oder unter Beachtung, daß

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z'}{a}\right)^2,$$

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2}.$$

Hieraus ergibt sich die Anstrengung in den durch z' bestimmten Umfangspunkten zu

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}35 \frac{4 M_b}{\pi a^3 b} z' + 0{,}65 \sqrt{\left(\frac{4 M_b}{\pi a^3 b} z'\right)^2 + \left(\frac{4 M_d}{\pi a b^2} \alpha_0\right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2\right)}$$

$$= \frac{4 M_b}{\pi a^3 b} \left[0{,}35 z' + 0{,}65 \sqrt{z'^2 + \left(\frac{M_d}{M_b} \frac{a^2}{b} \alpha_0\right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} z'^2\right)}\right]. \quad 4)$$

Dieser Ausdruck erlangt seinen Größtwert für den durch

$$d\frac{\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)}{dz'}=0, \qquad z'=z'_0$$

bestimmten Wert z'_0, womit dann

$$k_b \geqq \frac{4\,M_b}{\pi a^2 b}\left[0{,}35\,\frac{z'_0}{a}+0{,}65\sqrt{\left(\frac{z'_0}{a}\right)^2+\left(\frac{M_d}{M_b}\frac{a}{b}\alpha_0\right)^2\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^4}z'^2_0\right)}\right]. \quad 5)$$

Zweckmäßigerweise wird zur Feststellung der größten Anstrengung auch in der Weise vorgegangen werden können, daß man aus Gleichung 4 für verschiedene Werte von z' die Anstrengungen ermittelt, diese dann in den zugehörigen Abständen als Ordinaten aufträgt, wie dies in § 52 unter a) und b) für den Fall der Beanspruchung auf Biegung und Schub geschehen ist (Fig. 2 und 3, § 52), und aus dem Verlaufe der so gewonnenen Kurve die größte Ordinate mit der Sicherheit bestimmt, welche das zeichnerische Verfahren gestattet.

3. *Rechteckiger Querschnitt,* Fig. 3, § 34.

a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks.

Hier fallen die Stellen der größten Drehungsanstrengung τ, d. s. die Mitten der langen Seiten, auf solche der größten Biegungsanstrengung σ, d. s. sämtliche Punkte der langen Seiten.

Wegen

$$\sigma = 6\frac{M_b}{b^2 h} \text{ (Gleichung 10, § 16, und 2, § 17),}$$

$$\tau = 4{,}5\,\frac{M_d}{b^2 h} \text{ (Gleichung 4, § 34)}$$

ergibt sich nach Gleichung 1

$$k_b \geqq \frac{6}{b^2 h}\left[0{,}35\,M_b+0{,}65\sqrt{M_b^2+(1{,}5\,\alpha_0 M_d)^2}\right] \quad . \quad . \quad 6)$$

und für das Quadrat mit $h = b$

$$k_b \geqq \frac{6}{b^3}\left[0{,}35\, M_b + 0{,}65\sqrt{M_b^2 + (1{,}5\,\alpha_0 M_d)^2}\right] . \quad . \quad . \quad 7)$$

b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur langen Seite h des Rechtecks.

Hier erlangen σ und τ ihre Größtwerte nicht in den gleichen Punkten (σ wird am größten in den kurzen Seiten, τ dagegen in den Mitten der langen Seiten), infolgedessen in derselben Weise vorzugehen ist, wie unter Ziff. 2, b für den elliptischen Querschnitt angegeben wurde.

c) Die Ebene des biegenden Kräftepaares hat keine der beiden unter a) und b) bezeichneten Lagen.

Für ein beliebiges, durch y und z bestimmtes Querschnittselement betrug die Biegungsanstrengung σ nach § 21, Ziff. 2, mit den daselbst gebrauchten Bezeichnungen

$$\sigma = M_b\left(\frac{z\cos\beta}{\Theta_1} - \frac{y\sin\beta}{\Theta_2}\right),$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{12}\,b\,h^3, \qquad \Theta_2 = \frac{1}{12}\,b^3\,h,$$

die Drehungsanstrengung τ folgt aus § 34

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2},$$

und nach Einführung von

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= 9\,\frac{M_d}{b^3\,h}\left[1 - \left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right] y, \\ \tau_z &= 9\,\frac{M_d}{b\,h^3}\left[1 - \left(\frac{2\,y}{b}\right)^2\right] z, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

$$\tau = 9\,\frac{M_d}{b\,h}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right]^2 \frac{y^2}{b^4} + \left[1 - \left(\frac{2\,y}{b}\right)^2\right]^2 \frac{z^2}{h^4}} \quad . \quad 9)$$

Diese Werte von σ und τ sind nun in die rechte Seite der Gleichung 1 einzuführen, hiermit die Punkte, in denen dieser Ausdruck seinen Größtwert erlangt, zu ermitteln und sodann der letztere selbst zu bestimmen, wie dies unter Ziff. 2, b für den Fall des elliptischen Querschnitts angedeutet worden ist.

Hier führt das am Schlusse von Ziff. 2, b angedeutete zeichnerische Verfahren, den Verhältnissen der vorliegenden Aufgabe entsprechend angepaßt, zu einer verhältnismäßig raschen Lösung[1]).

§ 51. Zug (Druck) und Schub.

Die äußeren Kräfte liefern für den in Betracht gezogenen Querschnitt f eine in die Richtung der Stabachse fallende Zugkraft P und eine diese senkrecht schneidende Kraft S.

Die mit P verknüpfte und in allen Punkten als gleich angenommene Normalspannung beträgt

$$\sigma = \frac{P}{f},$$

die durch S wachgerufene Schubspannung unter Bezugnahme auf Fig. 1, § 39, und mit den in § 39 aufgeführten Bezeichnungen nach Gleichung 2, § 39, allgemein in dem durch y oder η bestimmten Umfangspunkte

$$\tau' = \frac{S}{2\,y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta}.$$

Maßgebend ist der größte Wert, welchen τ' erreicht, also beispielsweise

für den Kreis $\quad \tau = \frac{4}{3}\frac{S}{\frac{\pi}{4}d^2}$,

für das Rechteck $\tau = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h}$.

---

[1]) Die vorliegende Aufgabe ist beispielsweise zu lösen bei der Berechnung einer Dampfmaschinenkurbel. In des Verfassers Maschinenelementen, 1891 92,

Nach Gleichung 8, § 48, folgt alsdann mit k_z als zulässiger Zuganstrengung und k_s als zulässiger Schubanstrengung

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\,k_s}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

wobei die Punkte der größten resultierenden Anstrengung diejenigen sind, in denen die Schubspannung den größten Wert erlangt.

Wirkt P drückend (Fall der Knickung, § 23, ausgeschlossen), so müssen die aus den Gleichungen 8a und 8b, § 48, folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} k &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k}{1{,}3\,k_s}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq -\,0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\,k_s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1b)$$

befriedigt sein.

§ 52. Biegung und Schub.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte ergeben für den betrachteten Querschnitt ein Kräftepaar M_b, dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet, und eine in den letzteren fallende Kraft S.

S. 474 u. f., 1903 (9. Aufl.), S. 698 u. f., findet sich diese Berechnung vollständig durchgeführt. Außer den Schubspannungen, welche durch das drehende Moment hervorgerufen werden, sind dabei auch noch die von der Schubkraft veranlaßten Spannungen berücksichtigt.

1. Anstrengung des Materials.

In einem beliebigen Querschnittselement verursacht

M_b eine Normalspannung σ, welche nach § 16 oder § 21 festzustellen ist,

S eine Schubspannung τ, zu deren Bestimmung die Gleichung 3, § 39, zur Verfügung steht.

Da die letztere unter der Voraussetzung entwickelt wurde, daß die Schubkraft S in eine Symmetrielinie des Querschnitts fällt, so muß auch hier diese Beschränkung bezüglich der Lage von S getroffen werden. Demgemäß wurde vorausgesetzt, daß der Querschnitt symmetrisch ist, und daß die Ebene des biegenden Kräftepaares M_b den Querschnitt in der Symmetrielinie schneide. Dann folgt nach § 16 und § 39 unter Bezugnahme auf Fig. 1, § 39, sowie mit den daselbst gewählten Bezeichnungen:

für die in allen um η von der wagrechten Schwerlinie abstehenden Querschnittselementen gleich große Normalspannung

$$\sigma = -\frac{M_b}{\Theta}\eta$$

und für die in den Umfangspunkten $P'P'$ ihren Größtwert erlangende Schubspannung

$$\tau' = -\frac{S}{2y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta}.$$

Demnach mit k_b und k_s als zulässiger Biegungs- bezw. Schubanstrengung aus Gleichung 8, § 48, die größte Anstrengung in diesen Punkten

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) \\ &= 0{,}35\frac{M_b}{\Theta}\eta + 0{,}65\sqrt{\left(\frac{M_b}{\Theta}\eta\right)^2 + 4\left(\frac{S}{2y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta}\alpha_0\right)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{k_b}{1{,}3\,k_s}. \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Hierbei ist derjenige Querschnitt in Betracht zu ziehen sowie für η derjenige Wert einzuführen, wodurch der Ausdruck auf der rechten Seite seinen Größtwert annimmt, und zu beachten, daß im allgemeinen S und M_b nicht in ein und demselben Querschnitt ihre Größtwerte zu erlangen brauchen.

a) Kreisquerschnitt, Fig. 4, § 39.

Unter Voraussetzung der durch Fig. 1 dargestellten Belastungsweise ergibt sich

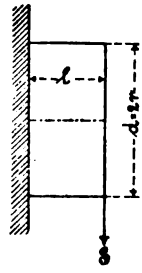


Fig. 1.

$$M_b = S\,l$$

und mit

$$\Theta = \frac{\pi}{4} r^4, \qquad \eta = r \sin \varphi',$$

$$\sigma = \frac{S\,l}{\frac{\pi}{4} r^4} r \sin \varphi' = \frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi'.$$

Gemäß § 39, Gleichung 6, ist

$$\tau' = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi',$$

somit nach Gleichung 8, § 48,

$$k_b \geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$$

$$= 0{,}35\,\frac{4}{\pi}\,\frac{Sl}{r^3}\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{Sl}{r^3}\sin\varphi'\right)^2 + 4\left(\frac{4}{3}\,\alpha_0\,\frac{S}{\pi r^2}\cos\varphi'\right)^2},$$

$$k_b \geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{Sl}{\frac{\pi}{4}r^3}\left[0{,}35\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\,\alpha_0\,\frac{r}{l}\cos\varphi'\right)^2}\right].$$

Wird hierin das Anstrengungsverhältnis $\alpha_0 = 1$ gesetzt, d. h.

$$k_b = 1{,}3\,k_s \quad \text{oder} \quad k_s = 0{,}77\,k_b,$$

und außerdem die von dem biegenden Moment herrührende Normalspannung

$$\frac{Sl}{\frac{\pi}{4}r^3},$$

welche, in der äußersten Faser stattfindend, die maßgebende Anstrengung sein würde, wenn die Schubkraft gleich Null wäre, durch σ_b ersetzt, so findet sich

$$k_b \geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$$

$$= \sigma_b\left[0{,}35\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\,\frac{r}{l}\cos\varphi'\right)^2}\right] . \quad 2)$$

Behufs Gewinnung eines Urteils über das Gesetz, nach welchem sich die resultierende Anstrengung mit $\frac{r}{l}$ und φ' ändert, werde dieselbe für verschiedene Werte von $\frac{r}{l}$ und φ' ermittelt.

α) $l = r = \frac{d}{2}$.

Aus Gleichung 2 wird

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b\left[0{,}35\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

und damit

für $\varphi' = 0^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}43\,\sigma_b$ im Punkte 0, Fig. 2,

- $\sin\varphi' = 0{,}25$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}54\,\sigma_b$ - - 1, -

- $\varphi' = 30^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}67\,\sigma_b$ - - 2, -

- $\varphi' = 45^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}80\,\sigma_b$ - - 3, -

- $\varphi' = 60^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}91\,\sigma_b$ - - 4, -

- $\varphi' = 90^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b$ - - 5, -

Wir ziehen durch die Kreispunkte 0, 1, 2, 3, 4, 5, Fig. 2,

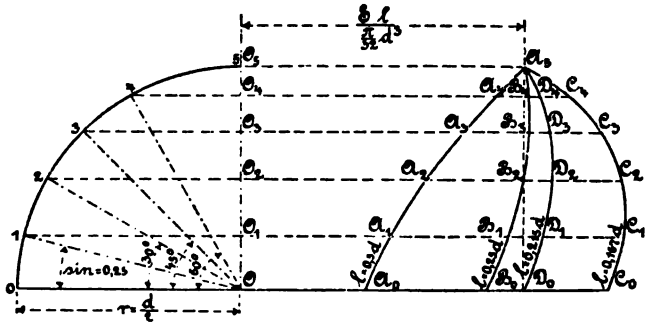


Fig. 2.

wagrechte Gerade und tragen alsdann von den Punkten O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 des senkrechten Halbmessers $O\,O_5$ die Strecken

$$\overline{O\,A_0} = 0{,}43, \qquad \overline{O_1 A_1} = 0{,}54, \qquad \overline{O_2 A_2} = 0{,}67,$$

$$\overline{O_3 A_3} = 0{,}80, \qquad \overline{O_4 A_4} = 0{,}91, \qquad \overline{O_5 A_5} = 1{,}00$$

auf und erhalten so in der Schaulinie $A_0\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5$ ein Bild über das Gesetz, nach welchem sich die von σ und τ herrührende

Anstrengung von Punkt zu Punkt des Umfanges ändert. Im Punkte 0 ist $\sigma = 0$ und deshalb τ' allein maßgebend, im Punkte 5 dagegen ist $\tau' = 0$ und deshalb σ allein bestimmend für die Anstrengung. Wir erkennen, daß im vorliegenden Falle, d. h. bei

$$l = r = \frac{d}{2},$$

gemäß den Verhältnissen der Fig. 1 die der größten Schubspannung entsprechende Anstrengung noch nicht die Hälfte derjenigen Anstrengung beträgt, welche im Umfangspunkte 5 durch die Normalspannung allein bedingt wird. Würde man, wie dies nicht selten für derartige Verhältnisse angegeben ist, den Stab auf Schubinanspruchnahme berechnen, so läge hierin ein Fehler von über 100 %.

$\beta)$ $l = \frac{1}{2} r = \frac{d}{4}$.

Gleichung 2, welche hiermit übergeht in

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b\left[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{4}{3}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

liefert

für $\varphi' = 0^0$ $\quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}87\,\sigma_b$,

- $\sin\varphi' = 0{,}25$ $\quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}94\,\sigma_b$,

- $\varphi' = 30^0$ $\quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}99\,\sigma_b$,

- $\varphi' = 45^0$ $\quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}01\,\sigma_b$,

- $\varphi' = 60^0$ $\quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}01\,\sigma_b$,

- $\varphi' = 90^0$ $\quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b$.

Die bildliche Darstellung liefert in Fig. 2 die Schaulinie $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 A_5$. Wir erkennen, daß auch für $l = 0{,}5\ r = 0{,}25\ d$ die größte in der Nullachse eintretende Schubanstrengung noch wesentlich kleiner ist als die Anstrengung, welche im Punkte 5 von dem biegenden Moment allein veranlaßt wird. Der Größtwert der resultierenden Anstrengung tritt zwischen $\varphi' = 45^0$ und $\varphi' = 60^0$ auf und überschreitet σ_b um rund 1,5 %.

$$\gamma)\quad l = \frac{1}{3} r = \frac{d}{6}.$$

In gleicher Weise wie unter α und β erhalten wir hier

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b\,[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65\,\sqrt{\sin^2\varphi' + (2\cos\varphi')^2}]$$

und

$$\text{für}\quad \varphi' = 0^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}30\,\sigma_b,$$

$$\text{-}\quad \sin\varphi' = 0{,}25 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}35\,\sigma_b,$$

$$\text{-}\quad \varphi' = 30^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}35\,\sigma_b,$$

$$\text{-}\quad \varphi' = 45^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}28\,\sigma_b,$$

$$\text{-}\quad \varphi' = 60^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}16\,\sigma_b,$$

$$\text{-}\quad \varphi' = 90^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b.$$

Die zugehörige Kurve ergibt sich in $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 A_5$. Wie ersichtlich, überschreitet hier die Schubanstrengung in der Nullachse die Biegungsanstrengung im Punkt 5 um 30 %, also bedeutend. Der Größtwert der resultierenden Anstrengung findet sich in einem zwischen $0{,}25\,r$ und $0{,}5\,r$ gelegenen Abstande von

der Nullachse und überschreitet die Anstrengung in letzterer um etwa 4%, also nur um wenig; hiernach würde es zulässig sein, bei

$$l = \frac{d}{6}$$

den Stab nur auf Schubinanspruchnahme zu berechnen.

δ) $l = 0{,}43\, r = 0{,}215\, d.$

Im Falle

$$l = \frac{d}{4}$$

ergab sich die Schubanstrengung in der Stabmitte zu 0,87 der Biegungsanstrengung im Abstande r, für

$$l = \frac{d}{6}$$

dagegen um 30% größer als die letztere. Es ist nun von Interesse, festzustellen, für welches Verhältnis $l : r$ beide gleich werden.

Dasselbe muß nach Gleichung 2 mit

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b \quad \varphi' = 0$$

sich ergeben aus

$$1 = 0{,}65\,\frac{2}{3}\,\frac{r}{l}$$

zu

$$\frac{l}{r} = \frac{1{,}3}{3} = 0{,}43.$$

Wird dieser Wert in Gleichung 2 eingeführt, so folgt

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b \left[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\,\frac{3}{1{,}3}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

und hieraus

$$\text{für} \quad \varphi' = 0^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b,$$

$$\text{- sin} \quad \varphi' = 0{,}25 \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}07\,\sigma_b,$$

$$\text{-} \quad \varphi' = 30^0 \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}10\,\sigma_b,$$

$$\text{-} \quad \varphi' = 45^0 \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}09\,\sigma_b,$$

$$\text{-} \quad \varphi' = 60^0 \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}06\,\sigma_b,$$

$$\text{-} \quad \varphi' = 90^0 \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b.$$

Die bildliche Darstellung liefert in Fig. 2 die Schaulinie $D_0 D_1 D_2 D_3 D_4 A_5$ mit dem Größtwert der Anstrengung ungefähr in halber Höhe. Derselbe beträgt rund 10% mehr als die Schubanstrengung in der Nullachse und um ebensoviel mehr als die Biegungsanstrengung im Punkte 5.

Fassen wir das im vorstehenden unter α bis δ Gefundene zusammen, so ergibt sich folgendes:

Bei der Belastungsweise des kreiszylindrischen Stabes nach Fig. 1 genügt es, denselben mit Rücksicht auf die Biegungsanstrengung

$$\sigma_b = \frac{S\,l}{\frac{\pi}{32}\,d^3} = \sim \frac{10\,S\,l}{d^3}$$

allein zu berechnen, solange l nicht wesentlich kleiner als $\frac{d}{4}$ ist. Beträgt l erheblich weniger als $\frac{d}{4}$, so erscheint es ausreichend, nur die Schubanstrengung

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{S}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

zu berücksichtigen[1]).

Der etwaige Fehler, der hierbei begangen wird und nach Maßgabe der soeben durchgeführten Berechnungen beurteilt werden kann, liegt innerhalb des Genauigkeitsgrades, welcher bei Festigkeitsrechnungen erreichbar zu sein pflegt.

Die Berechnung auf Schubanstrengung allein in Fällen, in denen

$$l \geqq \frac{d}{4},$$

erscheint unzutreffend, insbesondere dann, wenn

$$\tau = \frac{S}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

gesetzt wird.

(Vergl. auch die in § 40 mitgeteilten Versuchsergebnisse sowie die Fußbemerkung S. 378.)

Ist das Anstrengungsverhältnis α_0 von 1, welcher Wert den besonderen Erörterungen unter α bis δ zugrunde liegt, wesentlich verschieden, so wird auf die Gleichung

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b\left[0{,}35\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\alpha_0\frac{r}{l}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

zurückgegriffen werden müssen.

---

[1]) Hiernach hat die Bestimmung der Abmessungen des Körpers von gleichem Widerstande, Fig. 3, § 19, in der Nähe der Punkte A und B zu erfolgen, wobei

$$S = P\frac{b}{l} \quad \text{bezw.} \quad P\frac{a}{l}$$

ist. Streng genommen, wäre die Stabform überhaupt auf Grund der Gleichung 1 festzustellen und hierbei darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Kraft P wie auch S über eine, wenn auch kleine Strecke verteilt angreift.

b) Rechteckiger Querschnitt.

In ganz entsprechender Weise wie unter a) gelangen wir, sofern b die Breite, h die Höhe des Rechtecks bedeutet, und die Richtung von S parallel zu h läuft, mit

$$M_b = S\,l \text{ (s. Fig. 1)}$$

zu

$$\sigma = \frac{S\,l}{\frac{1}{12}\,b\,h^3}\,\eta,$$

und nach Gleichung 1, § 38, zu

$$\tau = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right],$$

gültig für die Spannungen im Abstande η von der Nullachse.

Unter der Voraussetzung $\alpha_0 = 1$ liefert Gleichung 1

$$k_b \geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$$

$$= \sigma_b\left\{0{,}35\cdot\frac{\eta}{\frac{h}{2}} + 0{,}65\sqrt{\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^2}\right\}, \quad 3)$$

wenn die Biegungsspannung der äußersten Faser

$$-\frac{S\,l}{\frac{1}{6}\,b\,h^2} = \sigma_b$$

gesetzt wird.

Wählen wir $l = 0{,}325\ h$, so findet sich

$$\text{für } \eta = 0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\ \sigma_b,$$

$$\text{- } \eta = \frac{1}{8}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}04\ \sigma_b,$$

$$\text{- } \eta = \frac{1}{4}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}99\ \sigma_b,$$

$$\text{- } \eta = \frac{3}{8}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}91\ \sigma_b,$$

$$\text{- } \eta = \frac{1}{2}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\ \sigma_b.$$

Die bildliche Darstellung gibt die Fig. 3. Wie ersichtlich, erlangt die Anstrengung zwischen der Nullachse und

$$\eta = \frac{h}{2}$$

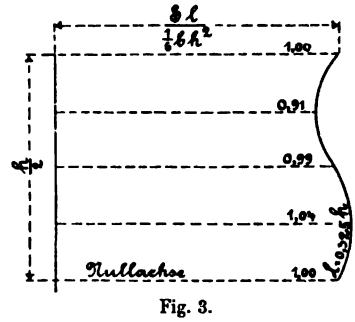


Fig. 3.

einen größten und einen kleinsten Wert. Ersterer überschreitet σ_b um etwa 4%, letzterer bleibt um 9% darunter. Die Anstrengung in der Nullachse (lediglich Schub) ist gleich der Anstrengung in der äußersten Faser (nur Biegung). Wird $l < 0{,}325\ h$ genommen, so übersteigt die erstere die letztere; für $l > 0{,}325\ h$ tritt das Entgegengesetzte ein.

Demgemäß folgt:

Ist bei dem Stabe mit rechteckigem Querschnitt, belastet nach Maßgabe der Fig. 1, $l \geqq 0{,}325\ h$, so genügt es, ihn mit Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{6\,S\,l}{b\,h^2}$$

allein zu berechnen; beträgt dagegen $l \leqq 0{,}325\ h$, so reicht es aus, lediglich die Schubbeanspruchung

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h}$$

der Berechnung zugrunde zu legen[1]).

Die Rücksichtnahme auf die Schubkraft allein, bei l erheblich größer als $0{,}325\ h$, muß unzutreffende Ergebnisse liefern. (Vergl. Fußbemerkung S. 378.)

Wenn das Anstrengungsverhältnis α_0 von 1 wesentlich abweicht, so ist auf Gleichung 1 zurückzugehen.

c) I-Querschnitt.

Für Querschnitte dieser und ähnlicher Art lassen sich so einfache Festsetzungen, wie sie unter a) und b) für den Kreis bezw. das Rechteck ausgesprochen werden konnten, nicht aufstellen. Hier muß im einzelnen Falle die Gleichung 1 zum Ausgangspunkt genommen werden unter Beachtung der daselbst angeschlossenen Bemerkung sowie des in § 39 d Gesagten.

Hinsichtlich der erforderlichen Stärke des Steges pflegt für den Fall, daß nicht Herstellungsrücksichten die Entscheidung treffen, die Fernhaltung von Ausbiegungen (Knickung) und nicht die Schubspannung in der Nullachse bestimmend zu sein, namentlich dann, wenn die Belastung des Trägers örtlich zusammengedrängt angreift, wie Versuche mit eisernen I-Trägern lehren, und wie sich auch unter Beachtung der geringen Widerstandsfähigkeit verhältnismäßig dünner Wandungen gegenüber

[1]) Hiernach sind die Abmessungen der in der Nähe des Punktes B gelegenen Querschnitte der Körper gleicher Festigkeit, Fig. 1 und Fig. 2, § 19, zu bestimmen. Vergl. auch Fußbemerkung zu a, S. 454.

Einflüssen, welche auf seitliche Ausbiegung hinwirken, aus dem unter „IV. Knickung“ erörterten ohne weiteres ergibt, selbst unter Voraussetzung einer (in bezug auf den Trägerquerschnitt) symmetrischen Belastung. Oft ist jedoch auf eine solche nicht zu rechnen, beispielsweise dann nicht, wenn die Belastung durch Querbalken erfolgt, die mit ihren Enden aufliegen. Indem sich dieselben unter ihrer Last durchbiegen, belasten sie den inneren Teil der Trägerflansche stärker, während der äußere Teil entlastet wird. Die Kraft geht nicht mehr durch die Mitte des Steges; sie kann bei entsprechender Flanschenbreite für den Steg unter Umständen ein verhältnismäßig sehr bedeutendes Biegungsmoment ergeben.

Um die Formänderung eines in der Mitte hinsichtlich des Querschnittes symmetrisch belasteten und an den Enden unterstützten Trägers deutlich erkennen zu lassen, wurde ein Träger von 200 mm Höhe aus Hartblei[1]) (Flanschen: 70 mm breit, 20 mm stark, Steg: 10 mm stark, Entfernung der Auflager 500 mm) vor der Belastung mit einem Quadratnetz versehen. Fig. 4, Taf. XVII, gibt das Bild des mittleren Teiles dieses Trägers, wie er sich infolge der Belastung gestaltet hat, wieder. Von Interesse ist namentlich die Verfolgung der Änderungen, welche die Form einzelner Quadrate erfahren hat.

2. Formänderung.

a) Im allgemeinen.

Ein prismatischer Stab sei in der aus Fig. 4, § 20, ersichtlichen Weise belastet. Die auf denselben wirkenden äußeren Kräfte ergeben — abgesehen von dem Eigengewicht —

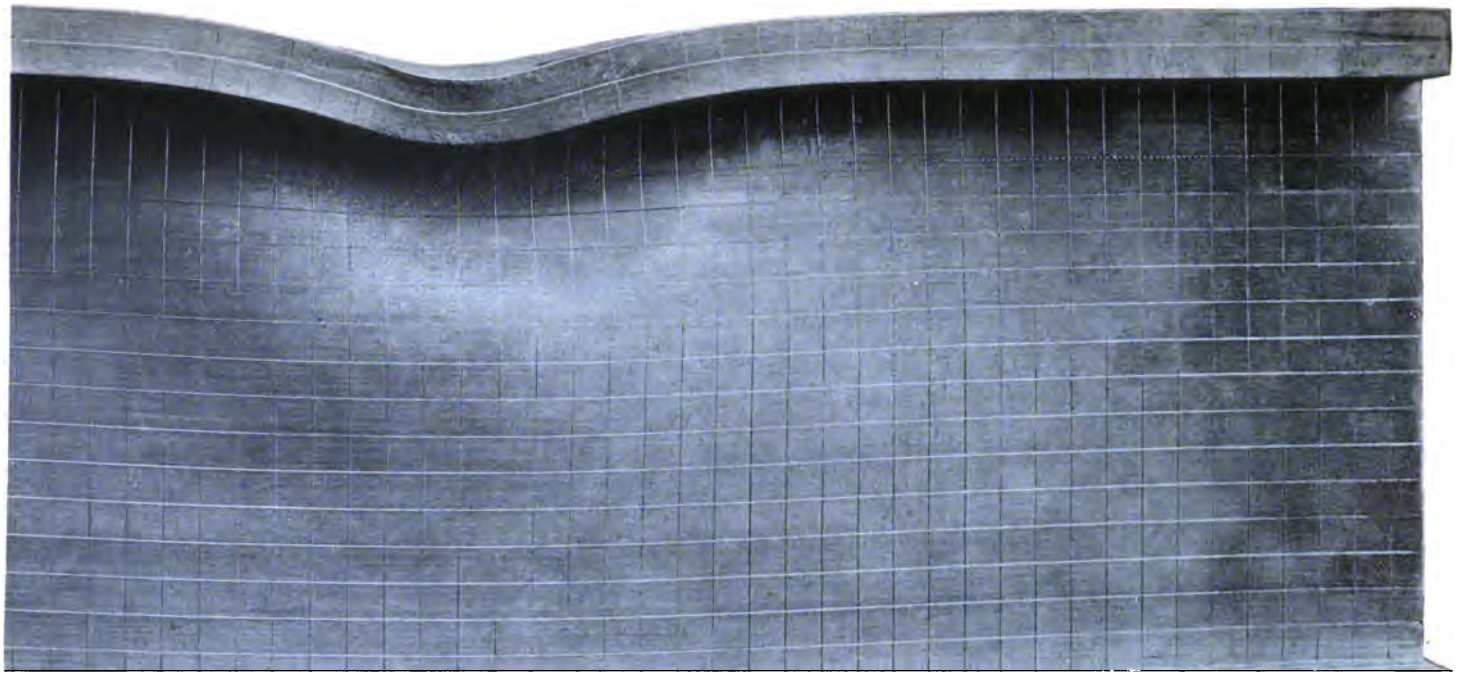
a) für jeden innerhalb der Strecke AB gelegenen Querschnitt ein biegendes Kräftepaar vom konstanten Moment $M_b = Pa$; infolgedessen die elastische Linie zwischen A und B (vergl. § 16, Gleichung 13) einen Kreisbogen vom Halbmesser

$$\varrho = \frac{\Theta}{\alpha M_b}$$

bildet;

[1]) Vergl. Fußbemerkung S. 309.

Fig. 4, § 52.



b) für die Querschnitte außerhalb der Strecke AB, je nach ihrem Abstand von der Querschnittsebene A bezw. B ein verschieden großes, zwischen Pa (im Querschnitt bei A bezw. B) und Null (in den Endquerschnitten) liegendes Moment und eine Schubkraft P.

Um uns ein anschauliches Bild über die hierbei auftretenden Formänderungen zu verschaffen, ziehen wir auf dem unbelasteten Stabe, dessen Querschnitt ein Rechteck mit der Breite b und der in der Bildebene liegenden Höhe h sein mag, nach Maßgabe der Fig. 5, welche den halben Stab von der Länge $a + \frac{l}{2}$ darstellt, gerade Linien, und zwar zunächst parallel zur Stabachse, die als Achsenlinien bezeichnet werden sollen, und sodann senkrecht zu letzteren, d. s. Querschnittslinien, je in gleichem Abstande voneinander. Hierdurch wird die Seitenfläche von der Höhe h in eine Anzahl gleicher Rechtecke eingeteilt.

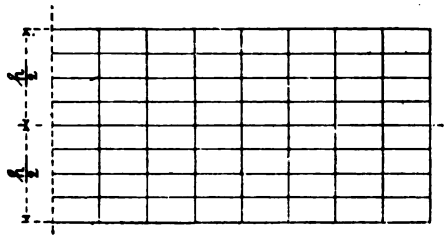


Fig. 5.

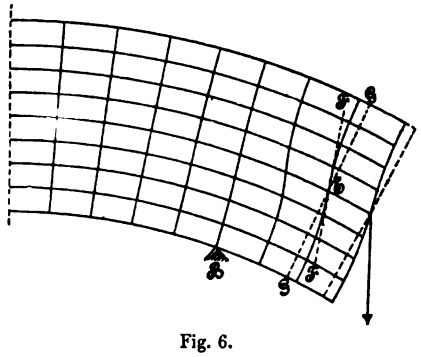


Fig. 6.

Unter Einwirkung der Belastung — Fig. 4, § 20 — wird der Stab eine Änderung seiner Gestalt erfahren, wobei die Rechtecke ebenfalls ihre Form ändern müssen.

Für die Stabquerschnitte zwischen A und B liefert die Belastung, wie oben unter a) bereits hervorgehoben wurde, lediglich ein biegendes Moment. Demgemäß werden nach § 16 die oberhalb der Nullachse gelegenen Fasern eine mit ihrem Abstande von dieser zunehmende Dehnung, die unterhalb gelegenen eine entsprechende Zusammendrückung erfahren. Die ursprünglich parallelen Querschnitte sind jetzt gegeneinander geneigt, ihr früherer Abstand ist nur noch in der Stabachse vorhanden. Es treten lediglich Normalspannungen auf, Schubspannungen fehlen; infolgedessen müssen die auf die Stabfläche gezeichneten Achsen- und Querschnittslinien die rechten Winkel, unter denen sie sich ursprünglich schnitten, beibehalten: die ursprünglichen Rechtecke gehen in Kreisringsektoren über. Fig. 6 läßt dieselben für die rechte Hälfte von AB (Fig. 4, § 20) erkennen.

Auf die rechts von B gelegenen Querschnitte wirkt, wie oben unter b) bereits bemerkt, außer dem biegenden Moment noch eine Schubkraft, welche Schubspannungen wachruft, die nach § 38 (s. namentlich Fig. 4, § 38) im Abstande $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ von der Nullachse, d. h. in der oberen und in der unteren Begrenzungsfläche des Stabes, sofern hier äußere Kräfte nicht angreifen, Null sein müssen, während sie nach der Achse hin zunehmen und in letzterer den größten Wert erreichen. Daraus folgt, daß die auf der Staboberfläche gezogenen Querschnittslinien auch außerhalb der Strecke AB — Fig. 4, § 20 — die im Abstande $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ befindlichen Begrenzungslinien da, wo äußere Kräfte nicht angreifen, rechtwinklig schneiden müssen, daß sie dagegen die nach der Stabachse zu gelegenen Achsenlinien schiefwinklig zu treffen haben. Die Abweichung von der Rechtwinkligkeit wird in der Stabachse ihren größten Wert erreichen. Nach Fig. 6 muß, sofern GG in E senkrecht zur gekrümmten Stabachse und FF Tangente im Punkte E der Querschnittslinie ist, dieser Größtwert gleich dem Bogen γ_{max} des Winkels FEG sein und mit der durch Gleichung 2, § 38, bestimmten Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}$$

in der Beziehung

$$\gamma_{max} = \beta \tau_{max}$$

stehen, worin β den Schubkoeffizienten bedeutet (§ 29). Für eine beliebige, um η von der Nullachse abstehende Stelle ist die Schubspannung nach Gleichung 1, § 38,

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

und somit die Abweichung von der Rechtwinkligkeit

$$\gamma = \beta \tau = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] \beta.$$

Für

$$\eta = \pm \frac{h}{2}$$

wird $\gamma = 0$, wie bereits hervorgehoben.

Dem Vorstehenden gemäß wird der ursprünglich ebene Querschnitt auch dann, wenn er unter Einfluß des biegenden Momentes eben geblieben ist, durch die Einwirkung der Schubkraft in eine gekrümmte Fläche übergehen, wie dies Fig. 6 rechts von B — in übertrieben gezeichneter Weise — erkennen läßt. Diese Wölbungslinie, welche in der Stabachse einen Wendepunkt besitzt, ist hiernach eine notwendige Folge der besprochenen Veränderlichkeit der Schubspannung. Eine strenge Darstellung derselben wird zu berücksichtigen haben, daß die äußeren Kräfte nicht in einem Punkte oder einer Linie, sondern in einer Fläche den Stab treffen, so daß also beispielsweise die Querschnitte unmittelbar rechts vom Mittelpunkte oder der Mittelebene B des Auflagers nicht sofort die volle Krümmung annehmen, während die unmittelbar links davon gelegenen auch nicht mehr vollkommen eben sein können.

Die Feststellung der besprochenen Querschnittswölbung auf dem Wege des Versuches begegnet großen Schwierigkeiten. Um

die Krümmung deutlich zu machen, sind im Vergleich zur Länge verhältnismäßig hohe Stäbe zu verwenden; dann aber müssen zur Herbeiführung einer für den bezeichneten Zweck genügenden Formänderung so bedeutende Kräfte auf verhältnismäßig kleine Teile der Staboberfläche wirken, daß hier starke örtliche Formänderungen eintreten, welche die Reinheit des Bildes erheblich beeinträchtigen. Soll dieser Übelstand vermieden werden, so wird man suchen müssen, dem Stabe eine solche Gestalt zu geben, daß schon weit kleinere Schubkräfte erhebliche Schubspannungen wachrufen. Ein solcher Körper ist in Fig. 7 dargestellt: I-Träger, in der Mittellinie zum Teil angebohrt, so daß zur Übertragung der

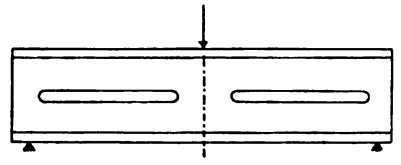


Fig. 7.

Schubkräfte in der Stabachse nur ein verhältnismäßig kleiner Querschnitt zur Verfügung steht, weshalb hier die Schubspannungen bedeutend ausfallen müssen. Wird der Stab in der Mitte belastet und an den Enden unterstützt, so nimmt die ursprünglich ebene Stirnfläche die Gestalt Fig. 8 (Schmiedeisenträger), Taf. XVIII, an. Dieselbe entspricht der Form, welche in Fig. 6 rechts von B angegeben wurde: Die gedrückten Fasern widerstreben der Verkürzung, die gezogenen der Verlängerung infolge der Kleinheit des Querschnittes, durch welchen sich die Druckkräfte (oberhalb der Nullachse) und die Zugkräfte (unterhalb dieser Achse) ins Gleichgewicht setzen, mit sichtbarem Erfolg.

b) Durchbiegung mit Rücksicht auf die Schubkraft.

Ein prismatischer Stab sei auf zwei um l voneinander abstehenden Stützen aufgelagert und in der Mitte durch die Kraft P belastet. Die Durchbiegung, welche von P veranlaßt wird, setzt sich aus zwei Teilen zusammen: aus derjenigen Durchbiegung, welche von dem biegenden Moment $\left(\text{in der Mitte } M_b = \frac{Pl}{4}\right)$

Fig. 8, § 52.

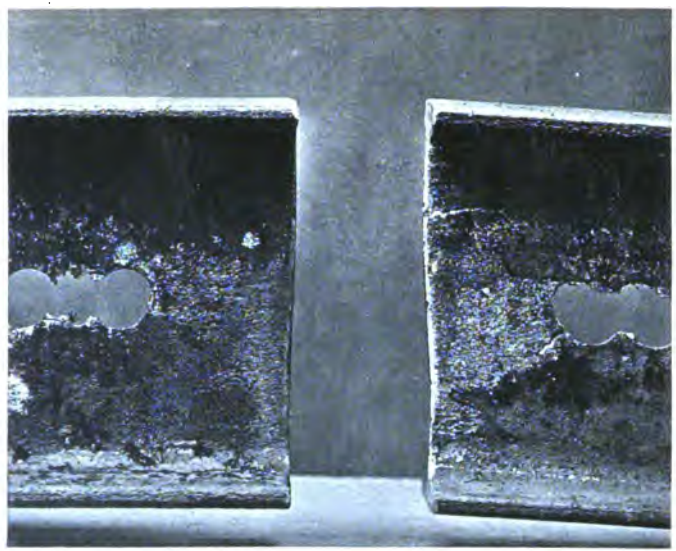


Fig. 12, § 64

allein verursacht wird, und aus der Verschiebung, welche die Querschnitte durch die Schubkraft $\frac{P}{2}$ (Auflagerdruck) erfahren.

Die Durchbiegung der ursprünglich geraden Stabachse im mittleren Querschnitt infolge des biegenden Moments beträgt nach Gleichung 14, § 18,

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{P l^3}{\Theta},$$

sofern Θ das gegenüber der Biegung in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeutet.

Zur Feststellung desjenigen Teiles der tatsächlichen Durchbiegung, welcher von der Verschiebung der Querschnitte herrührt, führt die nachstehende Betrachtung.

$ABCD$, Fig. 9, sei ein zwischen den beiden Querschnitten AC und BD gelegenes Körperelement des unbelasteten Stabes.

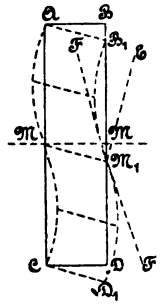


Fig. 9.

Denken wir uns jetzt im Querschnitte BD eine abwärts wirkende Schubkraft S tätig, während AC festgehalten wird, so rückt der Querschnitt BD um einen gewissen Betrag $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ abwärts. Unter der Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung der Schubkraft S über den Querschnitt würde die Formänderung des Körperelements darin bestehen, daß das Rechteck $ABDC$ in das Parallelogramm AB_1D_1C übergeht. Die Querschnitte würden Ebenen bleiben. Da nun aber die Schubspannungen von der Mitte nach außen (d. i. von M_1 nach B_1 und D_1) hin bis auf Null abnehmen, so müssen dies die Schiebungen ebenfalls tun und damit

auch die äußersten Elemente der Querschnittslinien die Begrenzungsstrecken AB_1 und CD_1 senkrecht schneiden, d. h. die Querschnitte müssen sich krümmen, wie in Fig. 9 gestrichelt angegeben ist. Die Strecke MM_1 der Achse, welche ursprünglich die Lage MM einnahm und hierbei mit der Querschnittslinie BD einen rechten Winkel bildete, weist jetzt, sofern $M_1E \perp MM_1$ und FF Tangente im Punkte M_1 der Querschnittslinie ist, eine Abweichung um den Winkel FM_1E von dieser Rechtwinkligkeit auf. Nach außen hin nimmt diese Abweichung ab bis auf Null. Wie wir wiederholt gesehen, mißt der Bogen γ, welcher diesem Abweichungswinkel entspricht, die Schiebung und steht nach Gleichung 2, § 29, zu der Schubspannung τ an der betreffenden Stelle in der Beziehung

$$\gamma = \beta\,\tau.$$

Für die Stabachse weist γ (τ) seinen Größtwert auf und zwar ist

$$\gamma_{max} = \operatorname{tg} \measuredangle EM_1F = \sim \operatorname{arc} \measuredangle EM_1F.$$

Der Winkel EM_1F setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich

$$\measuredangle EM_1F = \measuredangle EM_1B_1 + \measuredangle B_1M_1F.$$

Der erste Teil ist gleich

$$\measuredangle BAB_1 = \measuredangle MMM_1 = \measuredangle DCD_1.$$

Er entspricht also der senkrechten Verschiebung des ganzen Querschnitts, während der zweite Teil die Folge der Querschnittskrümmung ist. Für die Ermittlung der Durchbiegung y'' infolge der Verschiebung des Querschnitts kann demnach nur der erste Teil in Betracht kommen[1]). Dieselbe erscheint dadurch bestimmt,

---

[1]) Die Ermittlung der von der Schubkraft S bewirkten Durchbiegung y' nach dem Vorgange Poncelets und Grashofs — Theorie der Elastizität und Festigkeit, 1878, S. 213 u. f. — derart, daß gesetzt wird

$$y'' = \int \gamma_{max}\,dx = \beta \int \tau_{max}\,dx,$$

muß, wie vorstehende Darlegung erkennen läßt, y'' zu groß ergeben. In den-

daß die mechanische Arbeit, welche die Schubkraft beim Sinken um $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ verrichtet, gleich sein muß der Summe der Arbeiten der Schubspannungen beim Übergang des Stabelementes $ABCD$ in die Form $AB_1^{\frown}CD_1$ mit gekrümmter Querschnittsfläche.

---

jenigen Fällen, in welchen die Rücksichtnahme auf y'' überhaupt in Frage zu kommen pflegt (vergl. § 22, S. 243 und 244, auch weiter oben), ist übrigens der Einfluß dieses Zugroß nicht von erheblicher Bedeutung.

Die vorstehende Betrachtung über die Wölbung der ursprünglich ebenen Querschnitte eines durch Schub in Anspruch genommenen Körpers läßt sich auch auf den durch ein drehendes Kräftepaar belasteten Stab übertragen, wie folgende Bemerkungen, die der Einfachheit wegen einen bestimmten, und zwar rechteckigen Querschnitt voraussetzen mögen, erkennen lassen.

Das Gesetz, nach welchem sich die Schubspannung in den Querschnittselementen der Umfangsstrecke AC des auf Drehung beanspruchten rechteckigen Stabes, Fig. 3, § 34, ändert, ist das gleiche, dem die Schubspannungen des durch die Schubkraft belasteten rechteckigen Stabes, Fig. 4, § 38, folgen; bei beiden Körpern entspricht der Verlauf der Spannungskurve einer Parabel. Wir haben demnach im ersteren Falle (Drehung) für die in der Umfangsstrecke AC liegenden Querschnittselemente auch dasselbe Krümmungsgesetz zu erwarten, wie im zweiten Falle. Tatsächlich zeigen die auf der Staboberfläche liegenden Querschnittslinien der Fig. 1, Taf. XI, den gleichen Verlauf, der sich in Fig. 8 fand. Auch für Fig. 1, Taf. XI, ergibt die Abweichung von der Rechtwinkligkeit, d. i. der Winkel, welcher die Schiebung und damit die Schubspannung mißt, zwei Teile, von denen der eine die Verschiebung der Querschnittselemente senkrecht zur Stabachse bestimmt, während der andere der eingetretenen Neigung des Querschnittselementes entspricht. Für die Mitte der längeren Seite erreichen beide den größten Wert. Hier wird ihre Summe gemessen durch das Produkt aus τ'_a (Gleichung 4, § 34) und β, während der erste Teil durch den Drehungswinkel ϑ (Gleichung 9, § 43) bestimmt erscheint, so daß der zweite Teil, d. i. die Neigung, welche die gewölbte Querschnittslinie, Fig. 1, Taf. XI, in der Mitte der längeren Seite (im Wendepunkte) gegenüber dem ursprünglichen Querschnitt besitzt, den Bogen

$$4{,}5\,\frac{M_d}{b^2 h}\,\beta - 3{,}6\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}\,M_d\,\beta\,\frac{b}{2} = 4{,}5\,\frac{M_d}{b^2 h}\left[0{,}6 - 0{,}4\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\beta$$

$$= \tau'_a\left[0{,}6 - 0{,}4\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\beta$$

ergibt.

Je größer h im Vergleich zu b, um so bedeutender wird diese Neigung; sie nähert sich hierbei asymptotisch dem Werte

$$4{,}5\,.\,0{,}6\,\frac{M_d}{b^2 h}\,\beta = 2{,}7\,\frac{M_d}{b^2 h}\,\beta = 0{,}6\,\tau'_a\,\beta.$$

Nach § 44 findet sich für die mechanische Arbeit, welche die Formänderung des $\overline{AB} = \overline{MM} = \overline{CD} = dx$ langen Körperelementes bei der Verschiebung fordert,

$$\frac{\beta}{2} dx \iint \tau^2 \, d\eta \, dz.$$

Für $h = b = a$, d. h. für den quadratischen Querschnitt, wird sie am kleinsten, nämlich gleich

$$4{,}5 \,.\, 0{,}2 \frac{M_d}{a^3} \beta = 0{,}9 \frac{M_d}{a^3} \beta = 0{,}2 \, \tau'_a \, \beta.$$

Fig. 1, Taf. XI, und Fig. 2, Taf. XII (vergl. je die gewölbte Querschnittslinie mit der ursprünglich geraden, durch Striche bezeichneten Querschnittslinie), bestätigen die Abnahme der Neigung mit Näherung von h an b.

Würde man z. B. für den quadratischen Querschnitt diese Neigung dem eigentlichen Drehungswinkel zuzählen, indem man setzt

$$\vartheta \frac{a}{2} = \tau'_a \beta = 4{,}5 \frac{M_d}{a^3} \beta,$$

so ergäbe sich

$$\vartheta = 9 \frac{M_d}{a^4} \beta,$$

welcher Wert mit der von Grashof in seiner Theorie der Elastizität und Festigkeit 1878, S. 144 gefundenen Größe (Gleichung 246) übereinstimmt.

Nach Maßgabe unserer Darlegungen erscheint somit diese um

$$100 \frac{9 - 7{,}2}{7{,}2} = 25\,\%$$

zu groß. Wie aus den Erörterungen des Verfassers „Über die heutige Grundlage der Berechnung auf Drehung beanspruchter Körper“ in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 139 (oder auch „Abhandlungen und Berichte“ 1897, S. 81 u. f.) erhellt, ergibt sich in Übereinstimmung hiermit der Drehungswinkel nach der Grashofschen Gleichung

für Gußeisen um

$$100 \frac{1{,}43 - 1{,}20}{1{,}20} = 19\,\%,$$

für Schmiedeisen und Stahl um

$$100 \frac{0{,}883 - 0{,}696}{0{,}696} = 27\,\%,$$

größer, als Bauschinger durch Messung bestimmte (vergl. auch Schluß von § 43).

Hierin ist unter Bezugnahme auf Fig. 1, § 39, und nach Gleichung 3, § 39,

$$\tau = \frac{S}{2\,y\cos\varphi}\,\frac{M_\eta}{\Theta}$$

die Schubspannung in dem um z von der η-Achse abstehenden Punkte P, der mit dem Flächenelemente $d\eta\,dz$ zusammenfällt.

Wird nun $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ mit dy'' bezeichnet, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\,S\,dy'' = \frac{\beta}{2}\,dx\iint \tau^2\,d\eta\,dz$$

$$dy'' = \frac{\beta}{S}\,dx\iint \tau^2\,d\eta\,dz$$

$$y'' = \beta\int\frac{dx}{S}\iint \tau^2\,d\eta\,dz, \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

sofern der Schubkoeffizient β unveränderlich ist.

Beispielsweise findet sich für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h (vergl. Schluß von § 44), da hier wegen $\varphi = \varphi' = 0$ die Schubspannung für alle in demselben Abstande η gelegenen Flächenelemente gleich ist, nämlich

$$\tau' = \tau = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right],$$

so daß an die Stelle von $d\eta\,dz$ sofort der Flächenstreifen $b\,d\eta$ treten kann,

$$y'' = \frac{9}{4}\,\beta\int\frac{S\,dx}{b\,h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^2 d\eta = \frac{6}{5}\,\beta\int\frac{S}{b\,h}\,dx \quad 5)$$

und bei Unveränderlichkeit von S, b und h innerhalb der Strecke x

$$y'' = \frac{6}{5}\,\beta\,\frac{S}{b\,h}\,x,$$

d. i. $\frac{6}{5} = 1{,}2$ mal so groß, als wenn die Schubkraft sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilt haben würde.

Für den in der Mitte durch P belasteten prismatischen Stab folgt unter Vernachlässigung des Eigengewichtes wegen

$$S = \frac{P}{2},$$

$$y'' = \frac{6}{5}\beta \frac{\frac{1}{2}P}{bh}\frac{l}{2} = 0{,}3\,\beta \frac{P}{bh} l. \quad \ldots \quad 6)$$

Hiernach die Gesamtdurchbiegung des rechteckigen Stabes in der Mitte

$$y' + y'' = \frac{\alpha}{48}\frac{P l^3}{\frac{1}{12} b h^3} + 0{,}3\,\beta \frac{P}{bh} l$$

$$= \left\{ 0{,}25\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}3\,\beta \right\} \frac{P}{bh} l.$$

Wird der Schubkoeffizient β nach Gleichung 3, § 31, durch

$$\beta = 2\frac{m+1}{m}\alpha$$

ersetzt, so folgt

$$y' + y'' = \left\{ 0{,}25 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}6\,\frac{m+1}{m} \right\} \alpha \frac{P}{bh} l \quad . \quad 7)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$y' + y'' = \left\{ 0{,}25 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}78 \right\} \alpha \frac{P}{bh} l. \quad . \quad 8)$$

Hierin bestimmt das erste Glied der Klammer den Einfluß des biegenden Momentes auf die Durchbiegung, während das zweite denjenigen der Schubkraft zum Ausdruck bringt. Das Verhältnis von y'' zu y' ist demnach

$$\frac{y''}{y'} = \frac{0{,}78}{0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2} = \frac{3{,}12}{\left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Es beträgt

für $l =$	$2h$	$4h$	$8h$	$16h$
	0,78 : 1	0,195 : 1	0,049 : 1	0,012 : 1.

Von praktischer Bedeutung kann die Rücksichtnahme auf y'' werden, wenn es sich um die Ermittlung des Dehnungskoeffizienten α aus Biegungsversuchen mit Stäben oder Trägern handelt, deren Höhe erheblich ist, worauf bereits § 22, Ziff. 1, aufmerksam gemacht wurde. Durch die bisher übliche Vernachlässigung von y'' beging man im Falle des rechteckigen Querschnittes bei $l = 1000$ mm und

$h = \frac{l}{4} = 250$ mm einen Fehler von 19,5 %,

$h = \frac{l}{8} = 125$ - - - - 4,9 -

$h = \frac{l}{16} = 62{,}5$ - - - - 1,2 -

Hieraus folgt, daß die Höhe der Stäbe verhältnismäßig nicht bedeutend sein darf, wenn die Außerachtlassung von y'' zulässig erscheinen soll.

Allgemein wird zur Bestimmung von α oder $\frac{1}{\alpha}$ aus Versuchen mit Stäben von rechteckigem Querschnitt die Gleichung 7 zu verwenden sein. Dieselbe liefert

$$\alpha = \frac{b\,h}{\left\{0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}6\,\frac{m+1}{m}\right\} l} \cdot \frac{y' + y''}{P}.$$

Hierbei ist streng genommen m für das untersuchte Material besonders zu bestimmen; doch erweist sich der Einfluß der Abweichung der besonders ermittelten Werte von dem Mittelwert $\frac{10}{3}$

als so unbedeutend, daß es genügt, α aus der Gleichung 8, d. h. nach

$$\alpha = \frac{b\,h}{\left\{0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}78\right\} l}\,\frac{y' + y''}{P}$$

zu berechnen. $y' + y''$ wird zu jedem Werte von P beobachtet und damit für jede Belastung der Dehnungskoeffizient α bestimmbar.

Ganz bedeutenden Einfluß erlangt unter Umständen die Schubkraft auf die Durchbiegung bei I-Trägern, da hier im Steg die Querschnittsbreite gering, also γ und τ groß sein können. (Vergl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 222 u. f. sowie § 22, Ziff. 1.)

Der Einfluß des in § 46 erörterten Widerstandes, welcher aus Anlaß des Gleitens der Staboberfläche auf den Stützen (infolge der Durchbiegung) entsteht, ist bei strengen Biegungsversuchen mit erheblich hohen Stäben durch Verwendung von Rollenauflagern nach Möglichkeit herabzumindern.

Im Falle des Kreisquerschnitts vom Halbmesser $r = \frac{d}{2}$ findet sich nach Gleichung 6, § 39, für die Umfangspunkte P' die Schubspannung

$$\tau' = \frac{4}{3}\,\frac{S}{\pi r^2}\cos\varphi'.$$

Die Schubspannung τ (Fig. 1, § 39), welche in dem beliebigen um η von der Nullachse und um z von der η-Achse abstehenden Punkte P wirkt, werde in ihre zwei Komponenten zerlegt:

die eine senkrecht zur y-Achse sei $\tau_y = \tau\cos\varphi$,
die andere senkrecht zur η-Achse $\tau_\eta = \tau\sin\varphi$.

Nach § 39 ist die erstere für alle im gleichen Abstande η liegenden Flächenelemente konstant, also

$$\tau_y = \tau'\cos\varphi' = \frac{4}{3}\,\frac{S}{\pi r^2}\cos^2\varphi' = \tau'_y,$$

während die letztere, von außen nach der Mitte zu bis auf Null abnehmend, in den Umfangspunkten P' die Größe

$$\tau'_\eta = \tau' \sin \varphi' = \tau'_y \operatorname{tg} \varphi',$$

in dem beliebigen um z von der η-Achse abstehenden Punkte P den Wert

$$\tau_\eta = \tau_y \operatorname{tg} \varphi = \tau_y \frac{z}{y} \operatorname{tg} \varphi'$$

besitzt.

Wegen

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_\eta^2 = \left(1 + \frac{z^2}{y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi'\right) \tau_y^2$$

ergibt Gleichung 4

$$y'' = \beta \int \frac{dx}{S} \int \tau_y^2 \, d\eta \int_{-y}^{+y} \left(1 + \frac{z^2}{y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi'\right) dz$$

$$= 2\beta \int \frac{dx}{S} \int \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi'\right) y \, \tau_y^2 \, d\eta.$$

Hieraus folgt mit

$$\tau_y = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos^2 \varphi', \quad y = r \cos \varphi', \quad d\eta = d(r \sin \varphi') = r \cos \varphi' \, d\varphi',$$

$$y'' = \frac{32}{27} \frac{\beta}{\pi r^2} \int S \, dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (3 + \operatorname{tg}^2 \varphi') \cos^6 \varphi' \, d\varphi'$$

$$= \frac{32}{27} \frac{\beta}{\pi r^2} \int S \, dx,$$

und, sofern S unveränderlich innerhalb der Strecke x

$$y'' = \frac{32}{27} \beta \frac{S}{\pi r^2} x$$

d. i.

$\frac{32}{27} = 1{,}185$ mal so groß, als wenn die Schubkraft sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilt haben würde.

Für den Fall des auf beide Enden im Abstande l gestützten und in der Mitte mit P belasteten Stabes ist unter Vernachlässigung des Eigengewichts $S = \frac{P}{2}$ und damit

$$y'' = \frac{32\,\beta}{27\,\pi r^2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2}\,dx = \frac{32}{27}\,\beta\,\frac{\frac{P}{2}}{\pi r^2}\,\frac{l}{2}$$

$$= \frac{8}{27}\,\beta\,\frac{P}{\pi r^2}\,l = \frac{8}{27}\,\beta\,\frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Hiernach beträgt die Gesamtdurchbiegung

$$y' + y'' = \frac{\alpha}{48}\,\frac{P\,l^3}{\frac{\pi}{64}d^4} + \frac{32}{27}\,\beta\,\frac{P}{\pi d^2}\,l$$

$$= \left\{\frac{4}{3}\,\alpha\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{32}{27}\,\beta\right\}\frac{P}{\pi d^2}\,l.$$

Mit

$$\beta = 2\,\frac{m+1}{m}\,\alpha$$

wird

$$y' + y'' = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{16}{27}\,\frac{m+1}{m}\right\}\alpha\,\frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}\,l, \quad . \quad 10)$$

und für $m = \frac{10}{3}$

$$y' + y'' = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 0{,}77\right\}\alpha\,\frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}\,l \quad . \quad . \quad 11)$$

Unter Umständen erscheint es vorteilhaft, die nach Maßgabe des Vorstehenden ermittelte Größe y'' allgemein in Vergleich zu stellen mit derjenigen Verschiebung, die sich ergibt, wenn man die (tatsächlich nicht zutreffende) Annahme macht, daß sich die

Schubkraft S gleichmäßig über den Querschnitt f verteile. Diese Unterstellung führt für das Körperelement von der Länge dx zu

$$\gamma\, dx = \beta\, \tau\, dx = \beta \frac{S}{f}\, dx,$$

während Gleichung 4 für dasselbe liefert

$$\beta \frac{\int\int \tau^2\, d\eta\, dz}{S}\, dx.$$

Demnach das Verhältnis μ der letzteren Größe (der tatsächlichen Verschiebung) zu der ersteren (der unterstellten Verrückung)

$$\mu = \frac{f}{S^2} \int\int \tau^2\, d\eta\, dz \quad \ldots\ldots\ 12)$$

Der Koeffizient μ, welcher für jeden Querschnitt besonders ermittelt werden muß[1]), und welcher als Koeffizient der Querschnittsverschiebung bezeichnet werden kann, ist dann diejenige Zahl, mit welcher die unter Voraussetzung gleichmäßiger Spannungsverteilung gewonnene Verschiebung multipliziert werden muß, um die tatsächliche zu erhalten. Beispielsweise beträgt derselbe für das Rechteck 1,2, für den Kreis 1,185[2]) — wie wir oben bereits gefunden haben — für I-Querschnitt steigt er bis auf 3 und darüber.

§ 53. Frage der Einspannung eines Stabes.

Wie in § 18, Ziff. 1, 3 und später, erörtert sowie benützt, liegt dem Begriff der Einspannung eines auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes die Auffassung zugrunde, daß an der Einspannstelle die elastische Linie von der ursprünglich geraden Stabachse berührt wird, d. h., daß in diesem Punkte die letztere

---

[1]) Ritter hat sich in den „Anwendungen der graphischen Statik", Zürich 1888, No. 32 und 36, mit dieser Aufgabe eingehend und erfolgreich befaßt.

[2]) Die in der Literatur zu findende Angabe $\mu = 1{,}11$ beruht auf der Voraussetzung, daß die oben in der Rechnung auftretende Schubspannung τ_η für alle Querschnittselemente gleich Null sei.

Tangente an der elastischen Linie ist. Hierdurch wird dieser an der Einspannstelle eine bestimmte Ordinate sowie eine bestimmte Richtung zugewiesen.

Die Einspannung stellt man sich hierbei nicht selten in der Weise vor, daß das eingespannte Ende durch zwei, von entgegengesetzten Seiten stützende Auflager, die man als unbeweglich und unzusammendrückbar betrachtet, gehalten wird, wie Fig. 1

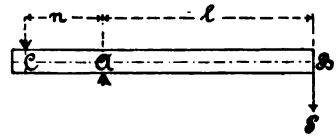


Fig. 1.

zeigt. Als Einspannstelle gilt der Querschnitt A. Zur Bestimmung der beiden in A und C wirkenden Auflagerdrücke denken wir uns in A eine senkrecht abwärts gerichtete Kraft $+P$ und eine zweite vertikal aufwärts wirkende Kraft $-P$ angebracht. Da sich diese zwei Kräfte gegenseitig aufheben, wird hierdurch nichts an dem Gleichgewichtszustande geändert. Wir haben alsdann mit der am freien Ende B angreifenden Last P — das Eigengewicht des Stabes werde vernachlässigt — drei Kräfte. $+P$ können wir uns aufgehoben vorstellen unmittelbar durch die Stütze A, während $-P$ und die Last P ein rechtsdrehendes Kräftepaar vom Moment Pl bilden, zu dessen Auffangung in A und C je der Widerlagsdruck P_1 erforderlich ist, welcher durch die Gleichung

$$P_1 n = P l$$

zu

$$P_1 = P \frac{l}{n}$$

bestimmt wird.

Demnach ergibt sich der Widerlagsdruck in A

$$N_a = P + P \frac{l}{n} = P \left(1 + \frac{l}{n}\right)$$

und derjenige in C

$$N_c = P \frac{l}{n}.$$

Je kleiner n im Vergleich zu l, um so bedeutender werden die Kräfte N_a und N_c ausfallen. Selbst wenn man sich diese nicht in dem Punkte oder in der Linie A bezw. C zusammengedrängt angreifend denkt, sondern auf kleine Flächen verteilt vorstellt, so werden sie doch eine Zusammendrückung des Materials der Stützen A und C sowie der Oberfläche des Stabes an den Angriffsstellen zur Folge haben. Hiermit aber ist eine Abwärtsbewegung des Stabes bei A und eine — unter sonst gleichen Umständen wegen $N_a > N_c$ jedoch geringere — Aufwärtsbewegung desselben bei C verknüpft. Der ganze Stab wird sich — abgesehen von der Verschiebung seiner Querschnitte gegeneinander sowie von seiner Biegung — gegen seine ursprüngliche Lage neigen müssen, entsprechend der Drehung um einen zwischen A und C befindlichen Punkt, welcher infolge $N_a > N_c$ bei sonst gleichen Verhältnissen

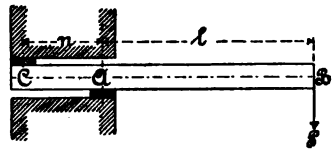


Fig. 2.

näher an C als an A gelegen ist. Wir erkennen, daß die Stützung des Stabes nach Fig. 1 die Auffassung nicht rechtfertigt, die elastische Linie, d. i. die gekrümmte Achse des durch P gebogenen Stabes, habe an der Einspannstelle (d. i. in A) die ursprünglich gerade Stabachse zur Tangente.

Nur dann, wenn n verhältnismäßig groß gewählt wird, und die Flächen, gegen welche sich der Stab bei A und C legt, so bedeutend sind, daß die Zusammendrückung der Stützen und ihrer Widerlager sowie die örtliche Zusammenpressung des Stabes als unerheblich betrachtet werden dürfen, erscheint diese Auffassung mit Annäherung zulässig. Wir gelangen dann zur Konstruktion Fig. 2 mit zwei Auflagerplatten unter A bezw. über C.

Genauer würde die in Frage stehende Auffassung zutreffen im Falle der Fig. 3, wenn der Stab in der Mitte A eine genügend große Auflagerfläche besitzt, so daß die Zusammendrückung daselbst verschwindend wenig beträgt, und wenn er an den beiden

Enden gleich starke Belastung erfährt. Dann fällt die Richtung der Tangente im Punkte A der elastischen Linie mit der Richtung der früher geraden Stabachse zusammen. Bei erheblicher Zusammendrückung des Widerlagers und des Stabes würde im Punkte A nur Parallelismus zwischen beiden bestehen.

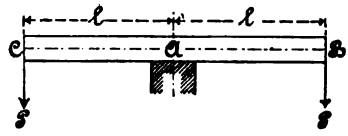


Fig. 3.

Wird der Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h sei, nach Maßgabe der Fig. 4 derart befestigt, daß er in unbelastetem Zustande unter Vernachlässigung des Eigengewichtes die obere und untere Wandung, gegen die er sich legt, gerade spannungslos berührt, so liefert die Verlegung der Kraft P in die Mitte zwischen A und C die daselbst senkrecht abwärts wirkende Kraft P und ein rechtsdrehendes Kräftepaar vom Moment $P\left(l+\frac{a}{2}\right)$.

Unter Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung von P über die Fläche $a\,b$ ergibt sich die von P allein herrührende Pressung p_1, zwischen dem Stab und der unteren Wandungsfläche,

$$p_1 = \frac{P}{a\,b}.$$

In Fig. 5 ist dieselbe dargestellt.

Das Moment $P\left(l+\frac{a}{2}\right)$ ruft gegenüber der rechten Hälfte der unteren Wandungsfläche von außen nach innen zu abnehmende Pressungen wach, während die obere Wandungsfläche auf der linken Hälfte aufwärts gerichtete, von der Mitte nach außen wachsende Pressungen erfährt, wie in Fig. 6 dargestellt ist. Mit der Genauigkeit, mit welcher die Gleichung 10, § 16, auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf, findet sich wegen

$$\sigma_1 = p_2, \qquad M_b = P\left(l + \frac{a}{2}\right), \qquad \Theta = \frac{1}{12} b\, a^3, \qquad e_1 = \frac{a}{2}$$

die Pressung

$$p_2 = \frac{P\left(l + \frac{a}{2}\right)}{\frac{1}{6} b\, a^2} = 6\,\frac{P}{a\,b}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right).$$

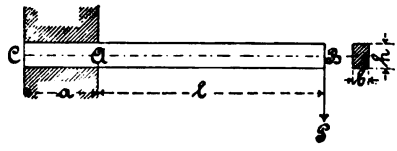


Fig. 4.

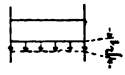


Fig. 5.

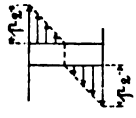


Fig. 6.

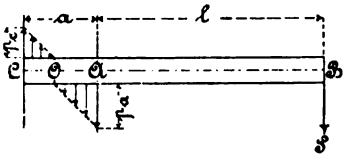


Fig. 7.

Hiermit folgt die resultierende Pressung in der Kante bei A

$$p_a = p_1 + p_2 = \frac{P}{a\,b} + 6\,\frac{P}{a\,b}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\,\frac{P}{a\,b}\left(2 + 3\,\frac{l}{a}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

und an derjenigen bei C

$$p_c = -p_1 + p_2 = -\frac{P}{a\,b} + 6\frac{P}{a\,b}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\frac{P}{a\,b}\left(1 + 3\frac{l}{a}\right). \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

In Fig. 7 ist diese Spannungsverteilung dargestellt. Naturgemäß darf p_a den für die betreffenden Materialien (Stab, Stütze) noch höchstens für zulässig erachteten Wert der Druckanstrengung nicht überschreiten.

Infolge der örtlichen Zusammenpressung des Stabes wie auch der Zusammendrückung des Materials der Wandung wird sich die Stabachse um den Punkt O drehen, dessen Abstand η von der Mitte der Wandung sich aus der Erwägung ergibt, daß

$$p_2 \frac{\eta}{\frac{a}{2}} = p_1,$$

$$6\frac{P}{a\,b}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)\frac{\eta}{\frac{a}{2}} = \frac{P}{a\,b},$$

$$\eta = \frac{a}{12\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Demnach

$$AO = \frac{a}{2} + \eta = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{1}{6\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)}\right].$$

Wir erkennen, daß auch hier die ursprünglich gerade Stabachse im Einspannungsquerschnitt A die elastische Linie nicht berühren kann.

Würde der Stab im unbelasteten Zustande, d. h. für $P = 0$, die obere und die untere Wandungsfläche nicht spannungslos, sondern mit einer gewissen Pressung p_0 berühren[1]), was z. B. der Fall sein kann, wenn auf dem Balken ein Teil des Gewichts der darüber aufgeführten Mauer lastet, so wird sich die Stabachse auch hier innerhalb der Wandung drehen, jedoch nicht so viel, wie folgende Betrachtung erkennen läßt. Durch die Pressung p_0 findet zunächst eine Zusammenpressung der sich berührenden Oberflächen statt, so daß bei Beginn der Einwirkung der Belastung P die betreffenden Flächen des Stabes und der Wandung sich bereits in weit vollkommenerer Weise berühren als bei ursprünglich spannungsloser Befestigung, infolgedessen der in Frage kommende Einfluß der von P veranlaßten Pressungen kleiner ausfallen muß. Auch die Reibung, welche zwischen Wandung und Stab mit innerhalb der Wandung eintretender Biegung (vergl. § 46) wachgerufen wird, wirkt in diesem Sinne, und zwar um so stärker, je größer p_0.

In ähnlicher Weise wie bei dem nur einerseits gestützten Stabe gelangt man hinsichtlich des beiderseits befestigten Stabes, Fig. 2, § 18, zu der Erkenntnis, daß infolge der Zusammendrückbarkeit des Materials der Wandungen und des Stabes Einspannung in dem strengen Sinne, in welchem sie von der Rechnung für ihre Zwecke aufgefaßt wird, auch nicht angenähert vorhanden zu sein pflegt. Recht anschaulich tritt dies vor das Auge, wenn man in einzelnen Fällen, für welche ermittelt werden soll, ob der Stab als eingespannt betrachtet werden darf, zunächst unterstellt, der Stab liege beiderseits frei auf, und sodann die Neigung der elastischen Linie über den Stützen bestimmt; hierauf prüft, ob der Stab durch die Befestigung in Wirklichkeit, wenn auch nicht vollständig, so doch ausreichend verhindert ist, diese Neigung anzunehmen. Hierbei wird in der Regel gefunden werden, daß man schon zur Befestigungsweise Fig. 2 mit verhältnismäßig großem Werte von n greifen muß, um die fragliche Neigung genügend zu verhindern.

---

[1]) Bei den Spannungsverbindungen des Maschinenbaues ist eine solche Pressung stets vorhanden (s. des Verfassers Maschinenelemente 1881, S. 39, 1891/92, S. 77, 1903 [9. Aufl.], S. 113).

Auch die gegenüber gewissen Teilen der Baukonstruktionen — wie z. B. gegenüber den durch Druck in Anspruch genommenen Brückenstäben, bei welchen die Gefahr der Knickung, d. h. der seitlichen Ausbiegung, besteht u. s. w. — oft ohne weiteres gemachte Unterstellung, daß der Stab beiderseits als fest eingespannt zu betrachten sei, erweist sich bei genauer Prüfung ziemlich häufig als unzutreffend.

Am nächsten kommt dem Zustande der vollkommenen Einspannung ein außer an den Enden auch noch in der Mitte so gelagerter und entsprechend belasteter Träger, daß die ursprünglich

Fig. 8.

gerade Stabachse Tangente an der elastischen Linie im Querschnitt der Mittelstütze ist. Letzterer Querschnitt — bei B, Fig. 8 — kann dann als Einspannstelle betrachtet werden.

Es ist von Interesse und zur Beurteilung der tatsächlichen Inanspruchnahme nicht selten von Wert zu beachten, daß durch die Nachgiebigkeit an den Befestigungsstellen die Größe der Biegungsanstrengung bis zu einem gewissen Grade der Nachgiebigkeit hin vermindert wird[1]), wie folgende Betrachtung erkennen läßt.

Der an den Enden befestigte und auf der Längeneinheit mit p belastete Stab, Fig. 9, ist bei vollkommener Einspannung nach § 18, Ziff. 3 beansprucht:

an der Befestigungsstelle A (rechts) durch das rechtsdrehende Moment $M_a = \frac{p l^2}{12}$ und durch die senkrechte Kraft $\frac{p l}{2}$ (vergl. auch Fig. 10),

in der Mitte C durch das drehende Moment $M_c = \frac{p l^2}{24}$.

[1]) S. des Verfassers Arbeit: Über die Formänderungen und die Anstrengung flacher Böden in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 1223 und 1224, oder auch Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 3.

Gibt die Befestigungsstelle nach, so daß das Moment hier auf einen Wert $M_a < \frac{pl^2}{12}$ sinkt, dann findet sich unter Beachtung von Fig. 10 das Moment in der Stabmitte zu

$$M_c = M_a - \frac{pl}{2}\frac{l}{2} + \frac{pl}{2}\frac{l}{4} = M_a - \frac{pl^2}{8},$$

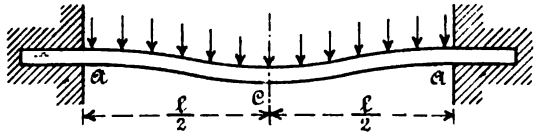


Fig. 9.

worin M_a zwischen $\frac{pl^2}{12}$ (Stab vollkommen eingespannt) und 0 (Stab frei aufliegend) schwanken kann; somit beispielsweise für

$M_a =$	$\frac{pl^2}{12}$	$\frac{pl^2}{15}$	$\frac{pl^2}{16}$	$\frac{pl^2}{24}$	0
$M_c =$	$\frac{pl^2}{24}$	$\frac{7pl^2}{120}$	$\frac{pl^2}{16}$	$\frac{pl^2}{12}$	$\frac{pl^2}{8}$.

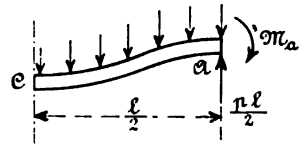


Fig. 10.

Wie ersichtlich, nimmt M_a ab, und der Wert von M_c wächst, bis für $M_a = \frac{pl^2}{16}$ beide gleich geworden sind; d. h. insbesondere für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt: gibt die Befestigung an den Stabenden gegenüber dem Zustande vollkommener Einspannung so weit nach, daß hier das biegende Moment von $\frac{pl^2}{12}$ auf $\frac{pl^2}{16}$ sinkt, sich also im Verhältnis von $16 : 12 = 4 : 3$

vermindert, so verringert sich auch die größte Biegungsinanspruchnahme des Stabes in dem gleichen Verhältnis, oder die Tragfähigkeit erhöht sich im Verhältnis von 3 : 4[1]).

Ist die Nachgiebigkeit der Befestigung eine weitergehende, so wird die größte Beanspruchung, die nunmehr in C statthat, wieder wachsen, bis das Moment den Wert $\frac{p l^2}{8}$ erreicht hat für $M_a = 0$.

Für $M_a = M_c = \frac{p l^2}{16}$ liegt der Wendepunkt um 0,1465 l von dem Stabende entfernt gegen 0,2113 l bei $M_a = \frac{p l^2}{12}$.

[1]) Ist der Querschnitt des prismatischen Stabes in bezug auf die zur Ebene der belastenden Kräfte senkrecht stehende Hauptachse unsymmetrisch, so muß beachtet werden, daß die am stärksten gezogene Faser an der Befestigungsstelle A oben, in der Stabmitte C unten liegt.

Fünfter Abschnitt.

Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

I. Die Mittellinie ist eine einfach gekrümmte Kurve, ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte sowie der Richtungslinien der äußeren Kräfte.

Die den Stab belastenden Kräfte ergeben dann für einen beliebigen Querschnitt im allgemeinen

1. eine im Schwerpunkte des letzteren angreifende Kraft R, welche zerlegt werden kann
   a) in eine tangential zur Mittellinie, also senkrecht zum Querschnitt gerichtete Kraft P (Normalkraft), und
   b) in eine in den Querschnitt fallende Kraft S (Schubkraft),
2. ein auf Biegung wirkendes Kräftepaar vom Moment M_b.

§ 54. Dehnung. Spannung. Krümmungshalbmesser.

In dem gekrümmten stabförmigen Körper denken wir uns zwei unendlich nahe gelegene Querschnitte $C_1 O_1 C_1$ und $C_2 O_2 C_2$, Fig. 1. Dieselben begrenzen das Stabelement $C_1 O_1 C_1 C C_2 O_2 C_2 C$ und schneiden sich in der Krümmungsachse M. Der folgenden Betrachtung unterwerfen wir nur die Hälfte $C O C C_1 O_1 C_1$ und fassen hierbei die Bogenelemente $C C_1$, $O O_1$ und $C C_1$ als gerade Linien auf, wie durch Fig. 2, S. 486, in größerem Maßstabe dargestellt ist.

Es bezeichne nun unter Bezugnahme auf Fig. 2:

f den Querschnitt COC allgemein und dessen Größe im besonderen,

f_1 den Querschnitt $C_1O_1C_1$ allgemein und dessen Größe im besonderen,

O den Schwerpunkt von f,

O_1 denjenigen von f_1,

$r = MO = \overline{MO_1}$ den Krümmungshalbmesser im Punkte O der Mittellinie vor Eintritt der Formänderung,

$d\varphi = \sphericalangle\, OMO_1$ den Winkel, welchen die Ebenen der beiden Querschnitte f und f_1 vor der Formänderung miteinander einschließen, oder den Winkel, unter welchem die beiden Tangenten an der Mittellinie in den Punkten O und O_1 (vergl. Fig. 1) sich schneiden,

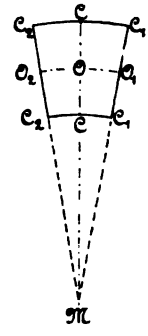


Fig. 1.

$ds = r\,d\varphi$ die Länge des Bogenelementes $\overline{OO_1}$ der Mittellinie im ursprünglichen Zustande,

$\overline{PP_1} = ds_1 = (r + \eta)\,d\varphi = r\,d\varphi + \eta\,d\varphi = ds + \eta\,d\varphi$ die Entfernung zweier in den Querschnitten f und f_1 gleich gelegener, um η von der Mittellinie abstehender Punkte, bevor die äußeren Kräfte auf den Stab wirken; wobei der Abstand η als positiv gilt, wenn er von O aus in der Richtung MO zu messen ist, negativ dagegen, wenn er in der Richtung OM, d. h. nach der Krümmungsachse hin, liegt,

e_1 den größten positiven Wert von η,

e_2 den größten negativen Wert von η,

$e = e_1 = e_2$, falls der Querschnitt so beschaffen ist, daß beide Abstände gleich groß sind,

$\Theta = \int \eta^2 df$ das Trägheitsmoment des Querschnitts f in bezug auf die in O sich projizierende, also parallel zur Krümmungsachse laufende Hauptachse.

Ferner

P die Normalkraft im Punkte O des Querschnitts f, positiv oder negativ, je nachdem sie ziehend oder drückend tätig ist,

M_b das für den Querschnitt f sich ergebende, auf Biegung wirkende Moment, positiv, wenn es eine Vermehrung der Krümmung, also eine Verkleinerung des Krümmungshalbmessers herbeiführt, negativ, wenn das Entgegengesetzte der Fall ist,

$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ (§ 2) die durch P und M_b im Abstande η (von der in O sich projizierenden Hauptachse des Querschnittes f) hervorgerufene Spannung, entsprechend der daselbst eingetretenen Dehnung ε, wobei vorausgesetzt werde, daß Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht,

k_z, k, k_b die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zug, bezw. Druck, bezw. Biegung,

ε_0 die Dehnung der Mittellinie im Punkte O, d. i. $\frac{\Delta ds}{ds}$, sofern sich das Bogenelement ds unter Einwirkung der äußeren Kräfte um Δds verlängert,

ω die verhältnismäßige Änderung des Winkels $d\varphi$ der beiden Querschnitte, d. i. $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$, wenn der Winkel $d\varphi$ infolge der Formänderung in $d\varphi + \Delta d\varphi$ übergeht, also um $\Delta d\varphi$ sich ändert,

ϱ der Krümmungshalbmesser im Punkte O der Mittellinie nach Eintritt der Formänderung.

1. *Anstrengung des Materials.*

Die Normalkraft P wirke allein.

Hätte der Stab eine gerade Achse, so wären die beiden Querschnitte f und f_1 parallel; die Normalkraft P würde bei gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt sämtliche dazwischen gelegenen Fasern wegen der Gleichheit ihrer Länge um gleichviel dehnen: es ändert sich nur die Entfernung der beiden Querschnitte, nicht aber ihre Neigung zueinander, dieselbe bleibt Null.

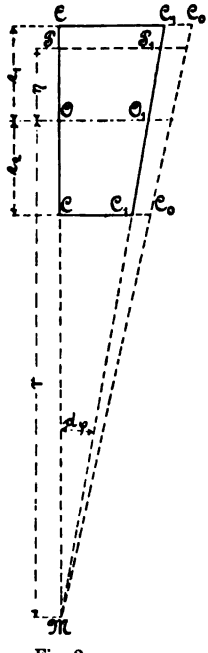


Fig. 2.

Anders verhält sich das Körperelement, Fig. 2. Hier sind die Fasern zwischen den beiden Querschnitten ungleich groß, und zwar um so länger, je weiter sie von der Krümmungsachse abstehen. Bei gleichmäßiger Verteilung von P über den Querschnitt muß die Spannung σ in allen Querschnittspunkten gleich groß sein; infolgedessen müssen sich die längeren Fasern, absolut genommen, mehr dehnen als die kürzeren, und zwar genau in dem Verhältnis, in welchem sie größer sind, d. h. die Verlängerungen müssen sich verhalten wie die Abstände der Fasern von der Krümmungsachse M. Daraus folgt, daß die Ebene des Querschnitts, von dem angenommen wird, daß er eben bleibt[1]), in ihrer neuen Lage C_0C_0 die Krümmungsachse M schneidet, wie in Fig. 2 angedeutet ist. Wir erkennen: unter alleiniger Einwirkung der über den Querschnitt sich gleichmäßig verteilenden Normalkraft P ändert sich die Neigung desselben derart, daß seine Ebene die bisherige Krümmungsachse schneidet, sich also um diese dreht, daß somit der Krümmungshalbmesser derselbe bleibt.

[1]) In bezug auf diese Annahme vergl. § 56, Ziff. 2.

Normalkraft P und biegendes Kräftepaar vom Moment M_b sind vorhanden.

Wie soeben erörtert, führt die Normalkraft P den Querschnitt f_1 in die Lage $C_0 C_0$, Fig. 3, über. Beginnt jetzt das Moment M_b zu wirken, so wird der Querschnitt f_1 aus der Lage $C_0 C_0$ in eine andere, etwa $C'_1 O'_1 C'_1$, gelangen und die Krümmungsachse von M nach M' rücken, entsprechend einer Verkürzung des Krümmungshalbmessers von r auf ϱ sowie einer Vergrößerung des Querschnittswinkels $d\varphi$ auf $d\varphi + \Delta d\varphi$. Hierbei erfährt das Bogenelement $\overline{O O_1} = ds$ der Mittellinie die gesamte Dehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\overline{O_1 O'_1}}{\overline{O O_1}},$$

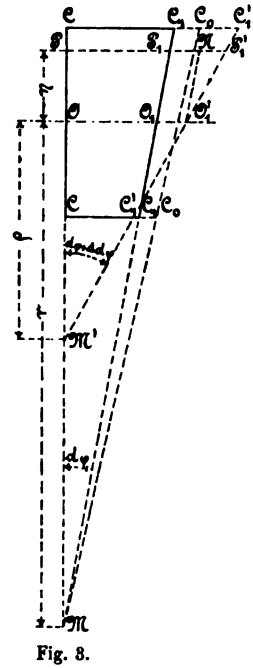


Fig. 3.

während diejenige der im Abstande η gelegenen Faserschicht $P P_1$ aus der Verlängerung $\overline{P_1 P'_1}$ zu bestimmen ist. Wird durch O'_1 die Gerade $O'_1 N \parallel$ zu $C_1 C_1$ gezogen, so findet sich

$$\overline{P_1 P'_1} = \overline{P_1 N} + \overline{N P'_1} = \overline{O_1 O'_1} + \overline{N P'_1}$$
$$= \varepsilon_0 ds + \eta \operatorname{arc} N O'_1 P'_1 = \varepsilon_0 r d\varphi + \eta \Delta d\varphi;$$

hiermit die Dehnung ε im Abstande η

$$\varepsilon = \frac{\overline{P_1 P'_1}}{\overline{P P_1}} = \frac{\varepsilon_0 r d\varphi + \eta \Delta d\varphi}{(r+\eta) d\varphi}$$
$$= \frac{\varepsilon_0 + \frac{\eta}{r}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{1 + \frac{\eta}{r}},$$

unter Beachtung, daß

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\frac{\eta}{r}}{1 + \frac{\eta}{r}}, \quad \ldots\ldots 1)$$

und die zugehörige Spannung, sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht einwirken,

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right] \quad . \; . \; . \; 2)$$

Die im Innern des Stabes wachgerufenen Kräfte müssen sich mit den äußeren im Gleichgewicht befinden, d. h. (§ 16, Gleichung 3 und Gleichung 6)

$$\int \sigma \, df = P = \int \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right] df, \; . \; . \; 3)$$

$$\int \sigma \, df \, . \, \eta = M_b = \int \frac{1}{\alpha}\,\eta\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right] df. \quad . \; 4)$$

Unter Voraussetzung, daß der Dehnungskoeffizient α konstant ist, folgt

$$P = \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 \int df + (\omega - \varepsilon_0)\int \frac{\eta}{r+\eta}\, df\right],$$

$$M_b = \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 \int \eta \, df + (\omega - \varepsilon_0)\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\, df\right].$$

Mit

$$\int df = f, \qquad \int \eta \, df = 0,$$

$$\int \frac{\eta}{r+\eta}\, df = -\varkappa f, \quad . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\, df = \int \left(\eta - r\frac{\eta}{r+\eta}\right) df = -r\int \frac{\eta}{r+\eta}\, df = \varkappa f r \; 6)$$

wird

$$P = \frac{f}{\alpha}\left[\varepsilon_0 - (\omega - \varepsilon_0)\,\varkappa\right],$$

$$M_b = \frac{\varkappa f r}{\alpha}(\omega - \varepsilon_0),$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \omega - \varepsilon_0 &= \alpha \frac{M_b}{\varkappa f r} \\ \varepsilon_0 = \alpha \frac{P}{f} + (\omega - \varepsilon_0)\varkappa &= \frac{\alpha}{f}\left(P + \frac{M_b}{r}\right) \\ \omega = \varepsilon_0 + \alpha \frac{M_b}{\varkappa f r} &= \frac{\alpha}{f}\left(P + \frac{M_b}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r}\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 7)$$

Hiermit liefert Gleichung 2

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Handelt es sich um ein Material, für welches die zulässige Anstrengung gegenüber Biegung, d. i. k_b, erheblich abweicht von derjenigen gegenüber Zug k_z, so ist das in § 45, Ziff. 1, hierüber Bemerkte zu beachten. Die hier in Betracht kommenden Verhältnisse sind allerdings weniger einfach und erscheinen deshalb der weiteren Klarstellung durch Versuche dringend bedürftig. (Vergl. in dieser Hinsicht die Versuchsergebnisse in § 56.)

Wenn

$$P = 0,$$

so wird

$$\sigma = \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta}$$

und für $\eta = 0$

$$\sigma = \frac{M_b}{fr}.$$

Bei dem geraden Stab ergibt sich nach Gleichung 9, § 16, für $\eta = 0$

$$\sigma = 0,$$

d. h. während bei dem nur durch M_b belasteten Stabe mit gerader Achse die Normalspannungen in der zur Ebene des Kräftepaares senkrechten Hauptachse des Querschnittes Null sind, herrscht bei dem gekrümmten, auch

nur durch M_b belasteten Stabe in dieser Linie die Spannung $M_b : fr$. Die bezeichnete Hauptachse ist demnach hier nicht Nullachse.

Der Grund für dieses abweichende Verhalten liegt einfach darin, daß bei dem gekrümmten Stab die zwischen zwei Querschnitten gelegenen Fasern verschiedene Längen besitzen, während bei dem geraden Stab Gleichheit besteht. (Vergl. das zu Anfang von Ziff. 1 Erörterte.)

Entsteht M_b dadurch, daß eine Last Q senkrecht zu dem in Betracht gezogenen Querschnitt im Abstande r von dem Schwerpunkt desselben ziehend angreift, also durch den Krümmungsmittelpunkt der Stabachse geht, dabei auf Verminderung der Krümmung hinwirkt, so ist wegen

$$P = Q, \qquad M_b = -Qr$$

nach Gleichung 8

$$\sigma = \frac{Q}{f} - \frac{Qr}{fr} - \frac{Qr}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta} = -\frac{Q}{\varkappa f}\frac{\eta}{r+\eta} = \frac{M_b}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta}. \quad 9)$$

Für $\eta = 0$ ergibt sich hieraus $\sigma = 0$, obgleich eine Normalkraft vorhanden ist.

Nach Gleichung 6 ist

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\, df = \varkappa f r.$$

Folglich auch

$$\int \frac{\eta^2}{1+\frac{\eta}{r}}\, df = \varkappa f r^2.$$

Wenn nun r sehr groß ist gegenüber η, d. h. gegenüber der Abmessung des Querschnittes in Richtung von r, infolgedessen $\frac{\eta}{r}$ gegen 1 vernachlässigt werden darf, so geht dieser Ausdruck — streng genommen nur für $r = \infty$ — über in

$$\varkappa f r^2 = \int \frac{\eta^2}{1 + \frac{\eta}{r}}\, df = \sim \int \eta^2\, df = \Theta^{1}),$$

woraus

$$\varkappa = \frac{\Theta}{f r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 10)^{1})$$

---

[1]) Zur Beurteilung, für welche Werte von r — im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen in Richtung von r — diese Annäherungsgleichung benutzt werden kann, sei folgendes bemerkt.

Es ist für den rechteckigen Querschnitt (vergl. Ziff. 2, a) nach Gleichung 13, § 54, da $\Theta = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{2}{3} b e^3$,

$$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots.\right] . 3 \left(\frac{r}{e}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \ldots.$$

$$= 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \ldots.$$

somit

für	r	$= h$	$2h$	$3h$	$4h$
	$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta}$	$= 1{,}18$	$1{,}04$	$1{,}02$	$1{,}01.$

Im Falle kreisförmigen oder elliptischen Querschnitts (vergl. Ziff. 2, b) ergibt sich nach Gleichung 15, § 54,

$$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \ldots.,$$

folglich

für	r	$= 2e$	$4e$	$6e$	$8e$
	$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta}$	$= 1{,}15$	$1{,}03$	$1{,}02$	$1{,}01.$

Hiernach liefert die Gleichung 8a gegenüber der Gleichung 8 das dritte Glied der rechten Seite zu groß, und zwar beispielsweise bei elliptischem Querschnitt nach Maßgabe der Zahlen 1,15, 1,03 u. s. w. Wird in diesem Gliede noch der Quotient $\eta : r$ vernachlässigt, also dasselbe $\frac{M_b}{\Theta}\eta$ gesetzt, wie es sich für gerade stabförmige Körper ergibt, so kann dagegen sein Wert erheblich zu klein ausfallen, wie die Zahlen der nachstehenden Betrachtung erkennen lassen.

Die Einsetzung dieses Wertes in Gleichung 8 führt zu

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\Theta} \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a)$$

und ergibt mit $r = \infty$

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{\Theta} \eta,$$

d. i. die für gerade Stäbe gültige Gleichung 1, § 45.

Für den kreisförmigen Querschnitt A des ringförmigen Körpers Fig. 4 beträgt $M_b = -Qr$ und somit der Wert des dritten Gliedes in Gleichung 8 mit $\eta = -e$ (d. i. für den innersten Punkt)

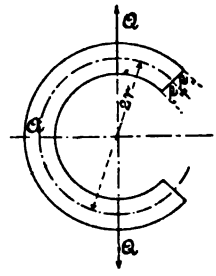


Fig. 4.

$$-\frac{Qr}{\Theta} \frac{-e}{1 - \frac{e}{r}} \frac{\Theta}{xfr^2} = \frac{Qr}{\Theta} \frac{e}{1 - \frac{e}{r}} \frac{\Theta}{xfr^2},$$

welche Größe

für $r =$	$2e$	$4e$	$6e$	$8e$
ergibt	$\frac{Qr}{\Theta} \frac{2}{1{,}15} e,$	$\frac{Qr}{\Theta} \frac{4}{3 \cdot 1{,}03} e,$	$\frac{Qr}{\Theta} \frac{6}{5 \cdot 1{,}02} e,$	$\frac{Qr}{\Theta} \frac{8}{7 \cdot 1{,}01} e,$
	$= 1{,}74 \frac{Qr}{\Theta} e,$	$= 1{,}29 \frac{Qr}{\Theta} e,$	$= 1{,}18 \frac{Qr}{\Theta} e,$	$= 1{,}13 \frac{Qr}{\Theta} e,$
d. i.	74 %	29 %	18 %	13 %

mehr, als der Ausdruck $\frac{M_b}{\Theta} \eta$, gültig für gerade stabförmige Körper, mit dem größten Werte von η liefert.

Soll die Anstrengung durch die Schubkraft S, welche sich nach dem oben unmittelbar zu I unter Ziffer 1b, S. 483, Bemerkten ergibt, ermittelt werden, so kann das mit Annäherung derart geschehen, wie in § 39 beim geraden stabförmigen Körper; nur ist dabei zu berücksichtigen, daß das Gesetz, nach welchem sich hier σ ändert, ein anderes ist.

Grashof (Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 283 u. f.) gelangt auf diesem Wege zu der Gleichung

$$\tau = \frac{S}{2y \cdot \varkappa f (r \pm \eta)^2 \cos\varphi'} \int_{\eta}^{e} \eta \, df = \frac{S M_\eta}{2y \varkappa f (r \pm \eta)^2 \cos\varphi'}, \quad 11)$$

welche unter Bezugnahme auf Fig. 1, § 39, an die Stelle der Beziehung 2, § 39,

$$\tau = \frac{S M_\eta}{2y \Theta \cos\varphi'}$$

tritt.

Die resultierende Spannung σ würde unter Zugrundelegung dieser Zahlen betragen

bei $r =$	$2e$	$4e$	$6e$	$8e$
für gekrümmte stabförmige Körper	$\sigma = 8 \cdot 1{,}74 \frac{Q}{f}$	$16 \cdot 1{,}29 \frac{Q}{f}$	$24 \cdot 1{,}18 \frac{Q}{f}$	$32 \cdot 1{,}13 \frac{Q}{f}$
	$= 13{,}92 \frac{Q}{f}$,	$= 20{,}64 \frac{Q}{f}$,	$= 28{,}32 \frac{Q}{f}$,	$= 36{,}16 \frac{Q}{f}$.
Für gerade stabförmige Körper wird sein	$\sigma = \frac{Q}{f} + \frac{Qr}{\Theta} e = 9{,}0 \frac{Q}{f}$,	$17 \frac{Q}{f}$,	$25 \frac{Q}{f}$,	$33 \frac{Q}{f}$.

2. *Werte von* $x = -\frac{1}{f}\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df$.

a) Rechteckiger Querschnitt.

Mit b als Breite und h als Höhe, so daß

$$f = b\,h, \qquad df = b\,d\eta,$$

ergibt sich

$$x = -\frac{1}{bh}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\eta}{r+\eta}\,b\,d\eta = -\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{r}{r+\eta}\right) d\eta,$$

$$x = -1 + \frac{r}{h}\,ln\frac{r+\frac{h}{2}}{r-\frac{h}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

Wird

$$\frac{h}{2} = e$$

gesetzt, so folgt

$$ln\frac{r+\frac{h}{2}}{r-\frac{h}{2}} = ln\frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}},$$

und unter Voraussetzung, daß $r > e$

$$ln\frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}} = 2\left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^7 + \ldots\right],$$

womit

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots\ldots \quad 13)$$

b) Kreisquerschnitt. Elliptischer Querschnitt.

Zum Zwecke der Entwicklung in eine unendliche Reihe werde gesetzt

$$\varkappa = -\frac{1}{f r}\int \frac{1}{1+\frac{\eta}{r}}\,\eta\,df$$

$$= -\frac{1}{fr}\int\left(1-\frac{\eta}{r}+\frac{\eta^2}{r^2}-\frac{\eta^3}{r^3}+\frac{\eta^4}{r^4}-\frac{\eta^5}{r^5}+\frac{\eta^6}{r^6}\ldots.\right)\eta\,df$$

$$= -\frac{1}{fr}\left(-\frac{1}{r}\int\eta^2\,df+\frac{1}{r^2}\int\eta^3\,df-\frac{1}{r^3}\int\eta^4\,df+\ldots\right),$$

$$\varkappa = +\frac{1}{f}\left(\frac{1}{r^2}\int\eta^2\,df-\frac{1}{r^3}\int\eta^3\,df+\frac{1}{r^4}\int\eta^4\,df\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r^5}\int\eta^5\,df+\ldots\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Für den Kreis wird infolge der Symmetrie

$$\int\eta^3\,df=0 \qquad \int\eta^5\,df=0$$

u. s. f.

Ferner gilt, Fig. 4, § 17, mit e als Halbmesser:

$$f=\pi e^2, \qquad \eta = e\sin\varphi, \qquad df = z\,d\eta = 2e^2\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

$$\int\eta^2\,df=\frac{\pi}{4}e^4.$$

Damit findet sich

$$\int\eta^4\,df = 4e^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{8}e^6,$$

$$\int\eta^6\,df = 4e^8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{5}{64}\pi e^8,$$

so daß

$$\varkappa = \frac{1}{\pi e^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\pi}{4}e^4 + \frac{1}{r^4}\frac{\pi}{8}e^6 + \frac{1}{r^6}\frac{5}{64}\pi e^8 + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots \quad . \quad . \quad 15)$$

Derselbe Wert ergibt sich für den elliptischen Querschnitt, sofern e diejenige Halbachse der Ellipse ist, welche in die Ebene der Mittellinie des Stabes fällt.

c) Trapezförmiger Querschnitt mit Symmetrielinie.

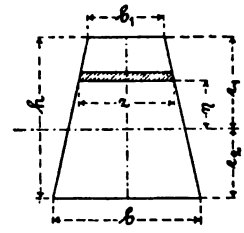


Fig. 5.

Aus Fig. 5 folgt unmittelbar

$$f = \frac{b + b_1}{2}h, \qquad df = z\,d\eta,$$

$$z = b_1 + \frac{b - b_1}{h}(e_1 - \eta),$$

$$df = \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h}e_1 - \frac{b - b_1}{h}\eta\right)d\eta.$$

Wegen

$$\varkappa = -\frac{1}{f}\int\left(1 - \frac{r}{r+\eta}\right)df = -1 + \frac{r}{f}\int\frac{df}{r+\eta}$$

ist zunächst dieses Integral festzustellen.

$$\int\frac{df}{r+\eta} = \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h}e_1\right)\int_{-e_2}^{+e_1}\frac{d\eta}{r+\eta} - \frac{b - b_1}{h}\int_{-e_2}^{+e_1}\frac{\eta\,d\eta}{r+\eta}.$$

Da

$$\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\eta\, d\eta}{r+\eta} = \int_{-e_2}^{+e_1} \left(1 - \frac{r}{r+\eta}\right) d\eta = e_1 + e_2 - r\, ln \frac{r+e_1}{r-e_2},$$

so folgt

$$\int \frac{df}{r+\eta} = \left(b_1 + \frac{b-b_1}{h} e_1\right) ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - \frac{b-b_1}{h}\left(e_1 + e_2 - r\, ln \frac{r+e_1}{r-e_2}\right)$$

$$= \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(e_1+r)\right] ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1),$$

$$x = -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(e_1+r)\right] ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1)\right\}. \quad 16)$$

d) Querschnitt des gleichschenkligen Dreiecks.

Aus Gleichung 16 folgt für

$$b_1 = 0, \qquad e_1 = \frac{2}{3}h, \qquad e_2 = \frac{1}{3}h,$$

$$x = -1 + \frac{2r}{h}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{r}{h}\right) ln \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{h}{r}}{1 - \frac{1}{3}\frac{h}{r}} - 1\right]. \quad 17)$$

e) Für zusammengesetzte Querschnitte

kann die Bestimmung von x in der Weise erfolgen, daß der Querschnitt in eine genügende Anzahl Streifen zerlegt wird, welche senkrecht zur Ebene der Mittellinie stehen, so wie dies z. B. Fig. 7, § 17, für eine Eisenbahnschiene angibt.

Ist $\triangle f$ der Flächeninhalt eines solchen Streifens, η sein Abstand von der Mittellinie (positiv oder negativ, je nachdem er von der Krümmungsachse M weg oder nach derselben zu gelegen ist), so sind für alle Streifen die Werte

$$\frac{\eta}{r+\eta} \triangle f$$

zu bilden, hierauf ist deren algebraische Summe zu bestimmen und diese schließlich durch $-f$ zu dividieren. Das Ergebnis ist der gesuchte Wert von $\varkappa$.

In neuerer Zeit haben A. Bantlin und M. Tolle zeichnerische Verfahren zur Ermittlung von $\varkappa$ angegeben[1]), welche allgemein den Vorzug der Anschaulichkeit besitzen, und die namentlich gegenüber zusammengesetzten Querschnitten mit Vorteil benutzt werden können, solange e im Verhältnis zu r nicht klein ist. Hinsichtlich der Verwendbarkeit der Näherungsgleichung 10 im Falle r groß gegen e ist, vergl. S. 491 u. f.

Nach dem von Braun 1903 gegebenen Vorgange kann $\varkappa$ gemäß Gleichung 5 rechnerisch in folgender Weise ermittelt werden[2]).

Besteht die Fläche f aus den Teilflächen f_1, f_2, f_3 u. s. f., so folgt unmittelbar aus der Eigenschaft des bestimmten Integrals

$$\varkappa f = \varkappa_1 f_1 \pm \varkappa_2 f_2 \pm \varkappa_3 f_3 \pm \ldots,$$

wobei hinsichtlich der Werte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ u. s. f. zu beachten ist, daß für sie jeweils die Größe η im Integral

$$\varkappa_1 f_1 = \int \frac{\eta}{r+\eta} df_1,$$

genommen über die Fläche f_1 u. s. w., sich je auf die Schwerpunktshauptachse der Summenfläche f bezieht.

Die wichtigsten Teilflächen pflegen bei geradlinig begrenzten Querschnitten das Rechteck und das Trapez zu sein.

Für das Rechteck Fig. 6 ergibt sich in bezug auf die Achse des Gesamtquerschnitts nach S. 494 unter Änderung der Integrationskonstante

$$\varkappa f = -\int_{e_0}^{e_1} \frac{\eta}{r+\eta} b\, d\eta = -b \int_{e_0}^{e_1} \left(1 - \frac{r}{r+\eta}\right) d\eta = -f + r\, b\, ln \frac{r+e_1}{r+e_0};$$

[1]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 164 bis 168, S. 201 bis 205, bezw. 1903, S. 884 u. f. S. auch Maschinenelemente des Verfassers, 9. Aufl., S. 33 und 34.

[2]) Die gleiche Aufgabe hat Werner unabhängig von Braun (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1905 S. 257 u. f.) jedoch nur für solche Querschnitte gelöst, deren Begrenzungslinien aus Parallelen und Senkrechten zur Krümmungsachse bestehen. Braun hat sein Verfahren nicht bloß auf gerade, sondern auch auf kreisförmige und parabolische Begrenzungslinien angewendet.

und für das Trapez Fig. 7 in gleicher Weise

$$\varkappa f = -f + r\left[\left(b_1 + \frac{b_0 - b_1}{h}(r + e_1)\right) ln \frac{r + e_1}{r + e_0} + (b_1 - b_0)\right].$$

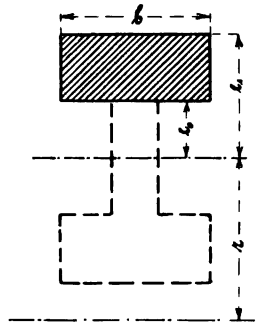


Fig. 6.

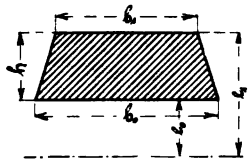


Fig. 7.

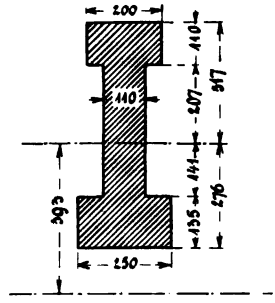


Fig. 8.

Damit findet sich beispielsweise für den Querschnitt Fig. 8 nach Bestimmung der Schwerpunktslage

$$f = -20 \cdot 11 + 39{,}3 \cdot 20\, ln \frac{39{,}3 + 31{,}7}{39{,}3 + 20{,}7} - 11 \cdot 34{,}8 + 39{,}3 \cdot 11\, ln \frac{39{,}3 + 20{,}7}{39{,}3 - 14{,}1}$$

$$- 25 \cdot 13{,}5 + 39{,}3 \cdot 25\, ln \frac{39{,}3 - 14{,}1}{39{,}3 - 27{,}6} = 320{,}86$$

$$\varkappa = \frac{320{,}86}{940{,}3} = 0{,}341.$$

3. Krümmungshalbmesser.

An der Hand der Fig. 3, S. 487, erkannten wir, daß der Querschnittswinkel $d\varphi$ und der Krümmungshalbmesser r unter der Einwirkung von P und M_b in $d\varphi + \Delta d\varphi$, bezw. in ϱ übergingen.

Während für das Bogenelement der Mittellinie vor der Formänderung die Beziehung

$$\overline{OO_1} = ds = r\,d\varphi$$

galt, ergibt sich für dasselbe nach Eintritt der Formänderung

$$\overline{OO_1'} = ds + \Delta\,ds = \varrho\,(d\varphi + \Delta\,d\varphi),$$

woraus nach Division mit ds bezw. $r\,d\varphi$

$$1 + \frac{\Delta\,ds}{ds} = \frac{\varrho}{r}\left(1 + \frac{\Delta\,d\varphi}{d\varphi}\right),$$

$$1 + \varepsilon_0 = \frac{\varrho}{r}\,(1 + \omega)$$

und hieraus unter Beachtung der Gleichungen 7

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1+\omega}{1+\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega - \varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} = 1 + \frac{M_b}{\varkappa r\left(\frac{f}{\alpha} + P + \frac{M_b}{r}\right)}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r^2\left(\frac{f}{\alpha} + P + \frac{M_b}{r}\right)} \quad \ldots \quad 18)$$

Wird berücksichtigt, daß ε_0 eine sehr kleine Größe ist, so kann mit genügender Annäherung in der Regel gesetzt werden

$$\frac{r}{\varrho} = 1 + \frac{\omega - \varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} = \sim 1 + \omega - \varepsilon_0,$$

woraus bei Ersatz von $\omega - \varepsilon_0$ nach Maßgabe der ersten der Gleichungen 7 folgt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \alpha\,\frac{M_b}{\varkappa f r^2}.$$

Wenn die Querschnittsabmessungen so klein sind gegenüber r, daß von der Gleichung 10, nach welcher

$$\varkappa f r^2 = \Theta,$$

Gebrauch gemacht werden darf, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{r} + \alpha \frac{M_b}{\Theta} \\ \text{oder} \qquad M_b &= \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \frac{\Theta}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 19)^1)$$

4. *Änderung der Koordinaten der Mittellinie.*

In Fig. 9 sei $APCD$ die Mittellinie des gekrümmten und bei A eingespannten Stabes vor der Einwirkung der äußeren Kräfte. Dieselbe werde auf ein rechtwinkliges, in ihrer Ebene derart gelegenes Koordinatensystem AX und AY bezogen, daß AX

---

[1]) Diese Annäherungsgleichung wird nicht selten aus der für gerade stabförmige Körper gültigen Beziehung, Gleichung 13, § 16, in der Weise abgeleitet, daß man die ursprüngliche Krümmung mit dem Halbmesser r auffaßt als herbeigeführt durch ein Moment M_0, für das nach Gleichung 13, § 16, gilt

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{M_0}{\Theta}.$$

Durch Hinzufügung des Momentes M_b gehe die Krümmung in eine solche mit dem Halbmesser ϱ über, somit

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{M_0 + M_b}{\Theta}.$$

Wird der erstere Ausdruck von dem letzteren abgezogen, so findet sich

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \alpha \frac{M_b}{\Theta} \qquad \text{oder} \qquad M_b = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \frac{\Theta}{\alpha},$$

wie oben angegeben.

Daß diese Vorstellungsweise voraussetzt, es bleibe die Beanspruchung des Stabes unter der Einwirkung von M_0 und M_b innerhalb der Proportionalitätsgrenze, springt sofort in die Augen wie auch die Tatsache, daß diese Voraussetzung nicht in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit steht, die eben einen bereits bleibend gebogenen Stab der Biegung durch M_b darbietet. Trotz des hierin liegenden Fehlers gewährt diese Ableitungsweise, nachdem der Ausdruck 19 als Annäherungsgleichung auf strengerem Wege ermittelt worden ist, ein bequemes Mittel, um sich die letztere rasch jederzeit aus dem Kopfe herstellen zu können, lediglich auf Grund der für gerade stabförmige Körper gültigen Gleichung 13, § 16.

die Normale und AY die Tangente im Punkte A ist. Unter Einwirkung der äußeren Kräfte, welche wir uns etwa durch eine im Punkte D angreifende Kraft ersetzt denken wollen, ändert sich die Form der Mittellinie und damit auch die Größe der Koordinaten x_c und y_c des Punktes C derselben. Diese Koordinatenänderungen seien mit Δx_c und Δy_c bezeichnet, entsprechend einem Übergange von x_c und y_c in $x_c + \Delta x_c$, bezw. $y_c + \Delta y_c$.

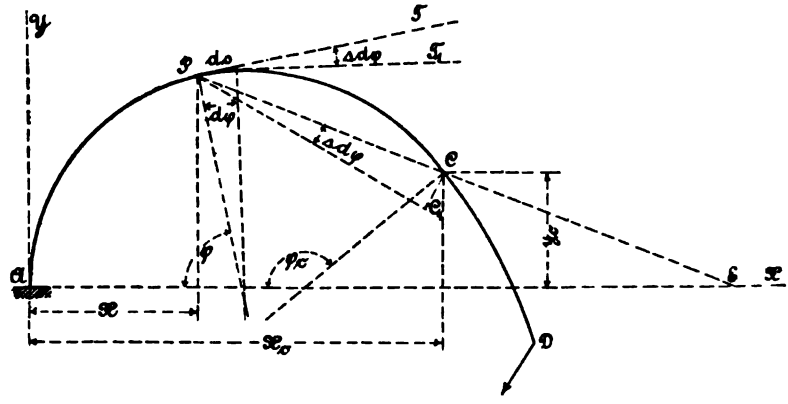


Fig. 9.

Zum Zwecke der Ermittlung von Δx_c und Δy_c greifen wir einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten x und y heraus; der Krümmungshalbmesser der Mittellinie betrage hier r. Das zugehörige Bogenelement, welches in die Richtung der Tangente PT fällt, besitze die Länge $ds = r\,d\varphi$, sofern $d\varphi$ den zugehörigen Zentriwinkel bezeichnet oder auch die § 54, S. 484, angegebene Bedeutung hat.

Infolge Einwirkung der äußeren Kräfte wird sich das Bogenelement ds — den Punkt P denken wir uns hierbei fest — um P drehen: PT gelangt in die Richtung PT_1, $d\varphi$ ändert sich um $\Delta\, d\varphi = \omega\, d\varphi$ (nach § 54, S. 485). Außerdem wird ds eine Verlängerung um $\varepsilon_0\, ds$ erfahren.

Die Drehung von ds um $\Delta\, d\varphi$ hat zur Folge, daß der Punkt C auf dem Kreisbogen $\widehat{CC_1} = \overline{PC}\,.\,\Delta\, d\varphi$ nach C_1 rückt. Hiernach ändert sich die Abszisse des Punktes C um

$$-(\overline{PC}\,.\,\Delta\, d\varphi)\sin CEA = -\overline{PC}\sin CEA\,.\,\Delta\, d\varphi = -(y - y_c)\,\Delta\, d\varphi$$

und die Ordinate um

$$-(\overline{PC}\,.\,\Delta\,d\varphi)\cos CEA = -\,\overline{PC}\cos CEA\,.\,\Delta\,d\varphi = -(x_c - x)\,\Delta\,d\varphi.$$

Aus Anlaß der Verlängerung von ds um $\varepsilon_0\,ds$ bewegt sich der Punkt C um $\varepsilon_0\,ds$ in der Richtung von ds, d. h. in der Richtung der Tangente PT vorwärts. Dadurch erfährt die Abszisse von C eine Zunahme um

$$\varepsilon_0\,ds\sin\varphi = \varepsilon_0\,dx$$

und die Ordinate eine solche im Betrage von

$$\varepsilon_0\,ds\cos\varphi = \varepsilon_0\,dy.$$

Demnach die Zunahme der Koordinaten x_c und y_c, veranlaßt durch die Änderung der Richtung und durch die Änderung der Länge des Bogenelementes ds allein

$$d(\Delta x_c) = -(y - y_c)\,\Delta\,d\varphi + \varepsilon_0\,dx = y_c\,\omega\,d\varphi - y\,\omega\,d\varphi + \varepsilon_0\,dx,$$

$$d(\Delta y_c) = -(x_c - x)\,\Delta\,d\varphi + \varepsilon_0\,dy = -x_c\,\omega\,d\varphi + x\,\omega\,d\varphi + \varepsilon_0\,dy,$$

und somit die gesamte Zunahme der Koordinaten x_c und y_c, herbeigeführt durch die entsprechenden Änderungen aller zwischen A und C gelegenen Bogenelemente

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_c &= y_c\int_0^{\varphi_c}\omega\,d\varphi - \int_0^{\varphi_c} y\,\omega\,d\varphi + \int_0^{x_c}\varepsilon_0\,dx\\ \Delta y_c &= -x_c\int_0^{\varphi_c}\omega\,d\varphi + \int_0^{\varphi_c} x\,\omega\,d\varphi + \int_0^{y_c}\varepsilon_0\,dy\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 20)$$

Hierin sind ω und ε_0 durch die Gleichungen 7 bestimmt.

Für den Fall, daß die Querschnittsabmessungen senkrecht zur Mittellinie genügend klein gegenüber r sind, so daß von Gleichung 10 Gebrauch gemacht und in der letzten der 3 Gleichungen 7 (rechte Seite) die Summe der beiden ersten Glieder, d. h. $P + -\frac{M_b}{r}$,

gegenüber dem letzten Gliede vernachlässigt werden darf, geht der Ausdruck für ω über in

$$\omega = \frac{\alpha}{f}\frac{M_b}{\varkappa r} = \sim \alpha \frac{M_b}{\Theta} r.$$

Hiermit ergeben sich aus den Beziehungen 20 die Annäherungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_c &= \alpha\left[y_c \int_0^{\varphi_c} \frac{M_b}{\Theta} r\,d\varphi - \int_0^{\varphi_c} y \frac{M_b}{\Theta} r\,d\varphi + \int_0^{x_c} \frac{P}{f}\,dx\right] \\ \Delta y_c &= \alpha\left[-x_c \int_0^{\varphi_c} \frac{M_b}{\Theta} r\,d\varphi + \int_0^{\varphi_c} x \frac{M_b}{\Theta} r\,d\varphi + \int_0^{y_c} \frac{P}{f}\,dy\right] \end{aligned}\right\}, \quad 21)$$

sofern bei Einführung von ε_0 aus der zweiten der Gleichungen 7 noch $\frac{M_b}{r}$ gegenüber P vernachlässigt wird. Bei verhältnismäßig großem r tritt überhaupt der durch das dritte Glied der Gleichungen 20 und 21 gemessene Anteil der Formänderung der Mittellinie zurück gegenüber dem Betrage, welchen die Summen der beiden ersten Glieder liefern.

§ 55. Fälle bestimmter Belastungen.

1. Offener Haken trägt eine Last Q. Fig. 1.

Die Kraft Q ergibt für den horizontalen trapezförmigen Querschnitt[1]) BOC das größte Moment und die größte Normalkraft. Nach Gleichung 8, § 54, beträgt die Spannung im Abstande η von der Schwerlinie ($\overline{OO}$ im Grundriß) desselben

$$\sigma = -\frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta}.$$

[1]) In der Ausführung werden die scharfen Ecken des Trapezes abgerundet und die hiermit verknüpften Querschnittsverminderungen durch geringe Wölbung der ebenen Begrenzungsflächen des Trapezstabes ausgeglichen.

Hierin ist

$$P = Q, \qquad M_b = -Q(a+e_2),$$

$$f = \frac{b+b_1}{2}h,$$

und nach Gleichung 16, § 54,

$$\varkappa = -1+\frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b_1+\frac{b-b_1}{h}(e_1+r)\right]ln\frac{r+e_1}{r-e_2}-(b-b_1)\right\}. \quad 1)$$

Für den Krümmungshalbmesser r der Mittellinie im Punkte O wird gewählt $r = a+e_2$, so daß A der Krümmungsmittelpunkt ist. Damit folgt dann wegen $e_1+r = a+h$ und $r-e_2 = a$

$$\varkappa = -1+\frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b_1+\frac{b-b_1}{h}(a+h)\right]ln\frac{a+h}{a}-(b-b_1)\right\}$$

$$= -1+\frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b\left(1+\frac{a}{h}\right)-b_1\frac{a}{h}\right]ln\left(1+\frac{h}{a}\right)-(b-b_1)\right\}, \quad 2)$$

woraus für

$$h = 2a, \qquad b = 3b_1,$$

wegen

$$e_2 = \frac{h}{3}\frac{b+2b_1}{b+b_1} = \frac{h}{3}\frac{5b_1}{4b_1} = \frac{5}{12}h = \frac{5}{6}a,$$

$$r = a+e_2 = \frac{11}{6}a,$$

sich ergibt

$$\varkappa = -1+\frac{11}{24}(4\,ln\,3-2) = 0{,}0974,$$

$$\frac{1}{\varkappa} = 10{,}27.$$

Die Spannung beträgt unter Beachtung, daß

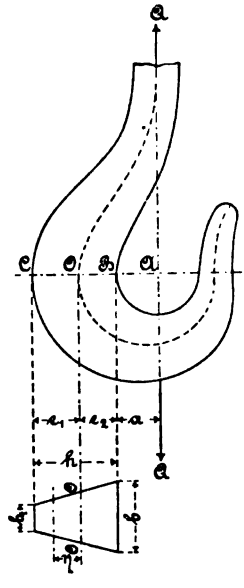


Fig. 1.

$$r = a + e_2 = \frac{11}{6} a,$$

$$\sigma = -10{,}27 \frac{Q}{f} \frac{\eta}{\frac{11}{6} a + \eta} \quad \ldots\ldots 3)$$

und insbesondere

für $\eta = -e_2 = -\frac{5}{6} a$ $\quad \sigma = +8{,}56 \frac{Q}{f}$ (im Punkte B)

- $\eta = -\frac{3}{6} a$ $\quad \sigma = +3{,}85 \frac{Q}{f}$

- $\eta = 0$ $\quad \sigma = 0$ (vergl. auch Gl. 9, § 54)

- $\eta = +\frac{3}{6} a$ $\quad \sigma = -2{,}20 \frac{Q}{f}$

- $\eta = +e_1 = +\frac{7}{6} a$ $\quad \sigma = -3{,}99 \frac{Q}{f}$ (im Punkte C).

Die Darstellung dieser Spannungen in Fig. 2 derart, daß senkrecht zur Symmetrielinie des Trapezes die in dem betreffenden Punkte herrschende Spannung aufgetragen wird (beispielsweise in B $\overline{BA} = +8{,}56 \frac{Q}{f}$, in C $\overline{CE} = -3{,}99 \frac{Q}{f}$), ergibt die Kurve $A\,O\,E$.

Wird der Querschnitt BOC — Fig. 1 — als einem geraden stabförmigen Körper angehörig betrachtet, so findet sich unter Beachtung der Spalte 11 der Zusammenstellung Ziff. 6 des § 17 wegen

$$\frac{\Theta}{e_2} = \frac{11}{30} b_1 h^2 = \frac{11}{60} f h = \frac{11}{30} a f,$$

für die Spannung im Punkte B

$$\sigma = \frac{Q}{f} + \frac{Q \frac{11}{6} a}{\frac{\Theta}{e_2}} = \frac{Q}{f} + 5 \frac{Q}{f} = +6 \frac{Q}{f},$$

und für diejenige im Punkte C

$$\sigma = \frac{Q}{f} - \frac{Q\frac{11}{6}a}{\frac{\Theta}{e_1}} = \frac{Q}{f} - 7\frac{Q}{f} = -6\frac{Q}{f}.$$

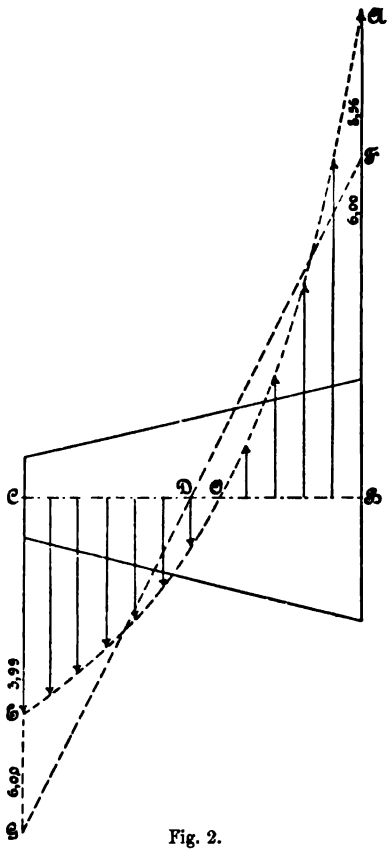


Fig. 2.

Die Darstellung dieser Spannungen liefert die Gerade FDG. Wie ersichtlich, ergibt die Unterstellung: der Querschnitt gehöre einem geraden stabförmigen Körper an, die maßgebende Anstrengung im Punkte B um

$$100\frac{8{,}56 - 6}{8{,}56} = 30\,\%$$

zu klein, führt also zu einer erheblichen Unterschätzung der Inanspruchnahme. Außerdem würde sie im vorliegenden Falle zu der Auffassung veranlassen, daß die Zuganstrengung in B gleich der Druckanstrengung in C sei, während tatsächlich die erstere $\left(8{,}56\frac{Q}{f}\right)$ um mehr als 100 % größer ist als die letztere $\left(3{,}99\frac{Q}{f}\right)$.

Die Beanspruchung des Hakens im Querschnitt BOC wird sich um so mehr derjenigen eines geraden, exzentrisch belasteten Stabes nähern, d. h. die Kurve AOE, Fig. 2, wird um so weniger von der Geraden FDG abweichen, je größer der Krümmungshalbmesser r ist. Es ist deshalb angezeigt, den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt O der Mittellinie nicht nach A, sondern weiter nach rechts von A zu verlegen, also dem Haken in dem gefährdetsten Querschnitt eine möglichst geringe Krümmung zu erteilen[1]).

Ferner erhellt aus dieser Sachlage, daß ein aus zähem Material gefertigter Haken, welcher sich unter Einwirkung der Last bleibend streckt, hierdurch seine Anstrengung — allerdings auch unter Herabsetzung seiner Zähigkeit — vermindert.

(Vergl. auch § 56, Ziff. 2, insbesondere Schlußbemerkung.)

2. *Hohlzylinder, welcher als Walze dient, ist auf die Längeneinheit durch den Druck 2 Q belastet,* Fig. 3.

Da sich bei dieser Belastungsweise die Viertelzylinder AB, BC, CD und DA gleich verhalten, so genügt es, einen derselben, etwa AB, der Betrachtung zu unterwerfen. Wir denken uns das Viertel AB herausgeschnitten, wie Fig. 4 darstellt, ersetzen die Wirkung der äußeren Kräfte auf den Querschnitt bei A durch Befestigung, auf denjenigen bei B durch die Kraft Q und ein Kräftepaar vom Momente M, welches positiv oder negativ genommen wird, je nachdem es auf Vermehrung oder Verminderung der Krümmung der Mittellinie im Punkte B hinwirkt.

[1]) S. des Verfassers Maschinenelemente 1891/92, S. 412, Fig. 252; 1903 (9. Aufl.), S. 624, Fig. 544.

Für einen beliebigen, durch den Winkel φ bestimmten Querschnitt COC ergibt sich bei Verlegung der Kraft Q nach O die Normalkraft

$$P = -Q\cos\varphi,$$

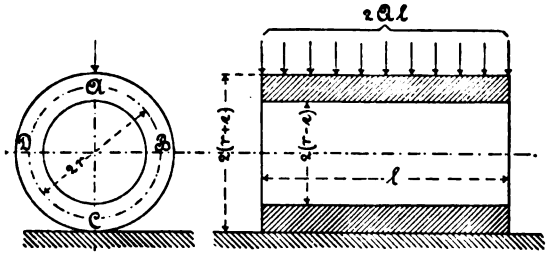


Fig. 3.

das biegende Moment

$$M_b = M - Q\,r\,(1 - \cos\varphi).$$

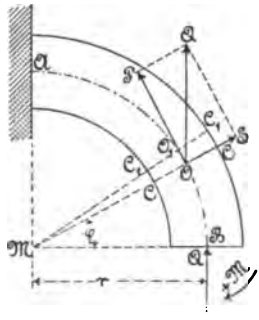


Fig. 4.

Die Schubkraft $S = Q\sin\varphi$ werde vernachlässigt. Nach Gleichung 8, § 54, ist

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{f\,r} + \frac{M_b}{\varkappa f r}\,\frac{\eta}{r+\eta},$$

worin f der auf die Einheit der Zylinderlänge kommende Querschnitt.

Folglich

$$f\sigma = -Q\cos\varphi + \frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta},$$

$$f\sigma = \frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta}.$$

Zur Bestimmung des unbekannten Momentes M führt die Erwägung, daß, wie auch die Formänderung der Mittellinie AB des Zylinderviertels sein möge, jedenfalls die beiden Normalen AM und BM derselben immer rechtwinklig zueinander bleiben werden, daß also der rechte Winkel AMB, der auch gleichzeitig derjenige der beiden Querschnitte bei A und bei B ist, eine Änderung nicht erfährt.

Es sei $C_1O_1C_1$ ein dem Querschnitt COC unendlich nahe gelegener zweiter Querschnitt und $d\varphi$ der Winkel, den beide Querschnitte vor Eintritt der Formänderung miteinander einschließen. Unter Einwirkung der äußeren Kräfte wird sich der letztere nach § 54 um

$$\Delta\, d\varphi = \omega\, d\varphi$$

ändern. Die Summe dieser Änderungen für alle zwischen B und A gelegenen Querschnitte muß nach dem eben Erörterten gleich Null sein, d. h.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\, d\varphi = 0.$$

Unter Beachtung, daß nach der letzten der Gleichungen 7, § 54,

$$\omega = \frac{\alpha}{f}\left(P + \frac{M_b}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r}\right),$$

also hier

$$\omega = \frac{\alpha}{f}\left[\frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi\right)\right],$$

wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \, d\varphi = \frac{\alpha}{f}\left[\left\{\frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q\right)\right\}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varkappa} Q\right] = 0.$$

Somit

$$\frac{M}{r} - Q = -\frac{2Q}{(1+\varkappa)\pi}$$

oder

$$M = Q\left(1 - \frac{2}{(1+\varkappa)\pi}\right) r. \quad \ldots \quad 4)$$

Die Einführung des für

$$\frac{M}{r} - Q$$

gefundenen Wertes in die Gleichung zur Ermittlung der Spannungen ergibt

$$f\sigma = -\frac{2Q}{(1+\varkappa)\pi} + \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{2Q}{(1+\varkappa)\pi} + Q\cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta},$$

$$\sigma = \frac{Q}{f}\left[-\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} + \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} + \cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta}\right]. \quad 5)$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist nach Gleichung 13, § 54,

$$\varkappa = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots.$$

und bei dem Verhältnis

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{5},$$

welches wir wählen wollen,

$$\varkappa = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^6 + \ldots\ldots = 0{,}01366.$$

Damit folgt

$$\sigma = \frac{Q}{f}\left[-0{,}63 + 73{,}2\,(-0{,}63 + \cos\varphi)\,\frac{\eta}{5e+\eta}\right]. \quad 6)$$

Grenzwerte ergeben sich für $\varphi = 0$ (Querschnitt bei B) und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Querschnitt bei A) sowie für $\eta = \pm e$. Sie betragen

im Querschnitt bei B	im Querschnitt bei A
$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$

innerste Faser,

$\eta = -e$:

$$\sigma_i = -\frac{Q}{f}\left(0{,}63 + 73{,}2\,.\,0{,}37\,\frac{1}{4}\right), \quad \sigma_i = \frac{Q}{f}\left(-0{,}63 + 73{,}2\,.\,0{,}63\,\frac{1}{4}\right)$$

$$= -7{,}40\,\frac{Q}{f} \qquad = +10{,}90\,\frac{Q}{f},$$

äußerste Faser,

$\eta = +e$:

$$\sigma_a = \frac{Q}{f}\left(-0{,}63 + 73{,}2\,.\,0{,}37\,\frac{1}{6}\right), \quad \sigma_a = -\frac{Q}{f}\left(0{,}63 + 73{,}2\,.\,0{,}63\,\frac{1}{6}\right)$$

$$= +3{,}88\,\frac{Q}{f}, \qquad = -8{,}32\,\frac{Q}{f}.$$

Hiernach findet die größte Anstrengung im Querschnitte bei A und zwar an der Innenfläche des Hohlzylinders durch tangential gerichtete Zugspannungen $= 10{,}90\,\frac{Q}{f}$ statt. An der Außenfläche desselben Querschnitts herrscht eine Druckspannung $8{,}32\,\frac{Q}{f}$. Im Querschnitt bei B wirkt innen die Druckspannung $7{,}40\,\frac{Q}{f}$ und außen die Zugspannung $3{,}88\,\frac{Q}{f}$. In beiden Querschnitten geht

die Spannung durch Null hindurch. Die Stelle, an welcher dies stattfindet, ergibt sich

für den Querschnitt B $(\varphi = 0)$

aus

$$0 = -0{,}63 + 73{,}2 \,.\, 0{,}37 \frac{\eta}{5e + \eta}$$

durch den Wert

$$\eta = 0{,}12\, e,$$

für den Querschnitt A $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

aus

$$0 = -0{,}63 - 73{,}2 \,.\, 0{,}63 \frac{\eta}{5e + \eta}$$

durch den Abstand

$$\eta = -0{,}067\, e.$$

Die Darstellung Fig. 5 mit HBJ als Linie der Spannungen im Querschnitte bei B und $FEAG$ als Linie der Spannungen im Querschnitte bei A gibt über das Gesetz, nach welchem sich die Spannung in den beiden Querschnitten ändert, ein anschauliches Bild.

Zur Erweiterung desselben in bezug auf dazwischen gelegene Querschnitte werde noch folgendes festgestellt.

Für $\eta = 0$ findet sich aus Gleichung 6

$$\sigma = -0{,}63 \frac{Q}{f},$$

also unabhängig von φ, d. h. in allen Punkten der mittleren Zylinderfläche ist die Spannung eine negative, also Pressung, und von gleicher Größe.

Auch gibt es in jedem Zylinderviertel einen Querschnitt, in welchem nur Druckspannungen, und zwar ebenfalls von gleicher Größe, auftreten. Setzen wir in Gleichung 5

$$\cos\varphi = \frac{2}{(1 + \varkappa)\,\pi} = 0{,}63,$$

so entfällt das Glied, welches die Veränderlichkeit und den Vorzeichenwechsel von σ bedingt und es wird

$$\sigma = -\frac{Q}{f}\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} = -0{,}63\,\frac{Q}{f}.$$

Dieser Querschnitt ist in Fig. 5 durch die Linie MC wiedergegeben.

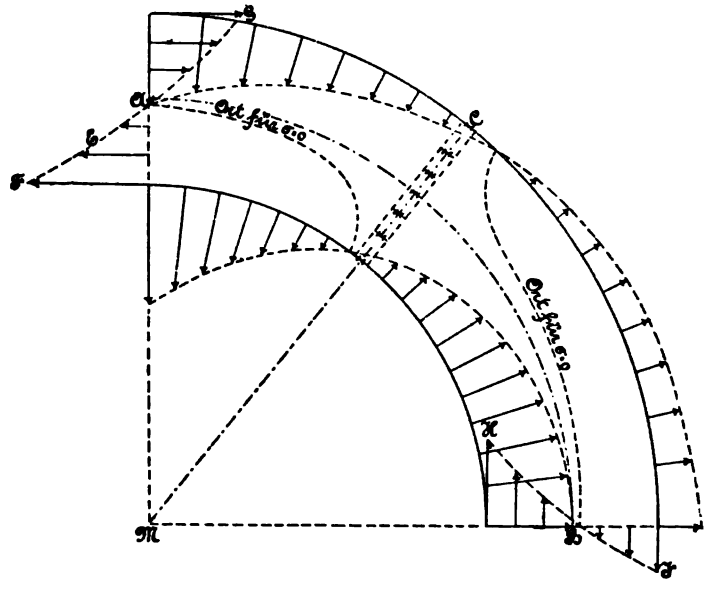


Fig. 5.

Zur Feststellung derjenigen Punkte im Innern des Hohlzylinders, in welchen $\sigma = 0$ wird, findet sich nach Gleichung 5

$$0 = -\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} + \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} + \cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta},$$

woraus

$$\cos\varphi = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\frac{r}{\eta}\right) = 0{,}64 + 0{,}043\,\frac{e}{\eta},$$

oder

$$\eta = r\,\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cos\varphi - 1} = 0{,}0675\,e\,\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cos\varphi - 1}.$$

An der innersten Faserschicht, d. h. für $\eta = -e$, wird $\sigma = 0$, wenn

$$\cos\varphi = 0{,}64 - 0{,}043 = 0{,}597,$$

an der äußersten Fläche, d. h. für $\eta = +e$, fällt $\sigma = 0$ aus, wenn

$$\cos\varphi = 0{,}64 + 0{,}043 = 0{,}683.$$

Mit $\cos\varphi = 0{,}5$ wird $\sigma = 0$ für

$$\eta = 0{,}0675 \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 1} e = -0{,}31\, e,$$

und mit $\cos\varphi = 0{,}8$ wird $\sigma = 0$ für

$$\eta = 0{,}0675 \frac{1}{0{,}4\,\pi - 1} e = +0{,}26\, e.$$

Auf diesem Wege erhalten wir, wie Fig. 5 zeigt, zwei Kurven, welche diejenigen Flächenelemente bestimmen, in denen die Normalspannungen gleich Null sind.

Ferner sind daselbst auch noch in radialer Richtung eingetragen die Spannungen, welche an den verschiedenen Punkten der Innen- und Außenfläche des Hohlzylinders in tangentialer Richtung herrschen [1]).

Was schließlich die Formänderung anbelangt, so ist ohne weiteres zu übersehen, daß die kreisförmige Mittellinie eine elliptische Form annimmt, entsprechend einer Vergrößerung des Krümmungshalbmessers bei A und einer Verkleinerung desselben bei B.

---

[1]) Die in Fig. 5 gegebene Darstellung der Spannungsverteilung in einzelnen Querschnitten und der Spannungsänderung von Querschnitt zu Querschnitt ist in den S. 498, Fußbemerkung 1, erwähnten Arbeiten noch erweitert worden.

§ 56. Versuchsergebnisse.

1. *Versuche mit Hohlzylindern.*

Zu einer teilweisen Prüfung des in § 55, Ziff. 2 gefundenen Hauptergebnisses Gleichung 5 bei Verwendung von Material, welches für die Herstellung solcher Hohlzylinder vorzugsweise in Betracht kommen kann, führte Verfasser die nachstehend besprochenen Versuche durch.

Aus einem gußeisernen Hohlstab mit kreisförmigem Querschnitt und zwar von dem Material: Gußeisen *A*, § 35 (Bruchstück eines der unter *c* — S. 330 und 331 — aufgeführten 3 Hohlstäbe, Zugfestigkeit 1579 kg, Drehungsfestigkeit 1297 kg), wurden kurze Hohlzylinder von der Länge $l = 6{,}0$ cm durch Drehen herausgearbeitet und nach Maßgabe der Fig. 3, § 55, mit $2\,Q\,l$ belastet. Der äußere Zylindermantel wurde nur so weit abgedreht, als es erforderlich war, um den Druckplatten der Prüfungsmaschine gute Anlageflächen zu sichern.

In ganz gleicher Weise wurden kurze Hohlzylinder aus dem Gußeisen *B*, § 35 (Bruchstück eines der unter *b*, *α* — S. 342 — erwähnten 2 Hohlstäbe, Zugfestigkeit 1679 kg, Drehungsfestigkeit 1439 kg) hergestellt.

Die Ergebnisse der Gleichung 5, § 55, in welcher hier

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \eta = -e, \qquad f = \frac{d - d_0}{2} \text{ (Fig. 3, § 35)}$$

zu setzen ist, wodurch wird

$$\sigma_{max} = \frac{2\,Q}{d - d_0}\left[-\frac{2}{(1+\varkappa)\,\pi} + \frac{2}{\varkappa\,(1+\varkappa)\,\pi}\,\frac{\frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}}\right], \quad 1)$$

finden sich, nach dieser Gleichung berechnet, in der folgenden Zusammenstellung unter σ_{max} eingetragen.

Gußeisen A.

Hohlzylinder, innen unbearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äußerer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältnis $\frac{e}{r} = \frac{d - d_0}{d + d_0}$	$\varkappa$ Gl. 13, § 54	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} Gl. 1 kg/qcm
1	10,0	7,0	0,176	0,0105	5410	3657
3	10,06	7,06	0,175	0,0104	5420	3685
5	10,02	6,92	0,183	0,0114	5170	3269

Bemerkungen.

Der Bruch erfolgt bei No. 1 und 3 durch gleichzeitiges Einreißen in den Querschnitten A und C, Fig. 3, § 55, welches innen beginnend sich auf etwa dreiviertel der Wandstärke nach außen fortsetzt. Der äußere Zylindermantel bleibt unverletzt.

Im Falle No. 5 reißt zunächst der Querschnitt innen bei A allein; die Fortsetzung des Zusammendrückens veranlaßt denjenigen bei C, nachzufolgen.

Hohlzylinder, innen bearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äußerer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältnis $\frac{e}{r} = \frac{d - d_0}{d + d_0}$	$\varkappa$ Gl. 13, § 54	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} Gl. 1 kg/qcm
2	10,06	7,28	0,160	0,00867	4410	3498
4	10,02	7,32	0,156	0,00823	4395	3695

Bemerkungen.

Wie oben No. 5.

Gußeisen B.

Hohlzylinder, innen unbearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äußerer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältnis $\frac{e}{r}=\frac{d-d_0}{d+d_0}$	$\varkappa$ Gl. 13, § 54	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} Gl. 1 kg/qcm
1	10,08	6,96	0,183	0,0114	5005	3135
3	10,06	6,96	0,182	0,01127	4980	3156

Bemerkungen.

Wie oben bei Gußeisen *A*, No. 5.

Hohlzylinder, innen bearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äußerer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältnis $\frac{e}{r}=\frac{d-d_0}{d+d_0}$	$\varkappa$ Gl. 13, § 54	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} Gl. 1 kg/qcm
2	10,07	7,43	0,151	0,00771	3980	3508
4	10,04	7,42	0,150	0,00760	4200	3759

Bemerkungen.

Wie oben bei Gußeisen *A*, No. 5.

Zu diesen Ergebnissen ist nachstehendes zu bemerken.

a) Hohlzylinder *A* 1 und *A* 3 sind die beiden einzigen der Versuchskörper, welche an den zwei diametral einander gegenüber liegenden Stellen gleichzeitig einreißen. Sie müssen demnach einen größeren Wert von σ_{max} aufweisen als sonst gleiche Hohlzylinder, bei denen dieses Einreißen nacheinander stattfindet. Daraus erklärt sich die geringere Bruchfestigkeit von *A* 5 gegenüber *A* 1 und *A* 3 ohne weiteres.

b) Zum Zwecke der Prüfung des Einflusses der Gußhaut kann nach Maßgabe des unter a Gesagten nur $A\,5$ mit $A\,2$ und $A\,4$ verglichen werden. Hierbei findet sich die Festigkeit der innen von der Gußhaut befreiten Hohlzylinder $A\,2$ und $A\,4$ um durchschnittlich

$$\frac{3498 + 3695}{2} - 3269 = 3596 - 3269 = 327 \text{ kg},$$

d. s.

$$100\,\frac{327}{3269} = 10\,\%$$

größer als diejenige des unbearbeiteten Körpers $A\,5$.

Für das Gußeisen B ergibt sich dieser Unterschied zu

$$\frac{3508 + 3759}{2} - \frac{3135 + 3156}{2} = 3633 - 3145 = 488 \text{ kg},$$

d. s.

$$100\,\frac{488}{3145} = 15{,}5\,\%.$$

Diese Zahlen bestätigen den bereits in § 22, Ziff. 3 festgestellten Einfluß der Gußhaut.

(Vergl. auch § 58, Fußbemerkung 2, S. 557.)

c) Die Zugfestigkeit des Gußeisens A war zu 1579 kg, diejenige des Gußeisens B zu 1679 kg ermittelt worden. Wird nach S. 249 No. 4 die Biegungsfestigkeit für den rechteckigen Stab zu 1,75 mal Zugfestigkeit angenommen, so wäre für bearbeitete Stäbe auf eine Biegungsfestigkeit von

$$1579 \,.\, 1{,}75 = 2763 \text{ kg}$$

bezw.

$$1679 \,.\, 1{,}75 = 2938 \text{ kg}$$

zu rechnen gewesen. Tatsächlich sind die Werte von σ_{max} (trotz des Einreißens an zunächst einer Stelle) für das Gußeisen A (No. 2 und 4) um

$$3596 - 2763 = 833 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad 100\,\frac{833}{2763} = 30\,\%,$$

für das Gußeisen B (No. 2 und 4) um

$$3633 - 2938 = 695 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad 100\,\frac{695}{2938} = 24\,\%$$

größer. Dieser Unterschied dürfte zum großen Teile auf Rechnung der dem Gußeisen eigentümlichen Veränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten α zu setzen sein, welche den Verlauf der Spannungslinie, z. B. AEF im Querschnitt A, Fig. 5, § 55, dahin abändert, daß die wagrechten Ordinaten weniger rasch wachsen, als die Rechnung, welche Unveränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten voraussetzt, ergibt. War diese Abweichung schon beim geraden stabförmigen Körper von großem Einflusse (vergl. § 20, namentlich Fig. 11), so muß dieser hier noch bedeutender ausfallen.

Um zu prüfen, inwieweit etwa Gußspannungen bei der vorliegenden Frage beteiligt seien, wurden diejenigen Hohlzylinder, welche nur an einer Stelle gerissen waren, und bei denen der Versuch nicht bis zum Einreißen an der zweiten (gegenüberliegenden) Stelle fortgesetzt worden war, an der Rißstelle aufgeschnitten und sodann genau gemessen, ob hierbei ein Zusammengehen oder Erweitern des Ringes (oder der Schnittfuge) stattfand. Eine solche Änderung ließ sich nicht oder nur in ganz verschwindender Größe feststellen. Das Ergebnis blieb auch nach vollständiger Beseitigung der äußeren Gußhaut sowie nach Ausbohren des Ringes auf die halbe Stärke das gleiche. Hiernach können Gußspannungen von Erheblichkeit nicht vorhanden gewesen sein.

Werden diejenigen Werte von σ_{max}, welche für die ausgebohrten Hohlzylinder ermittelt wurden, in Vergleich mit der Zugfestigkeit gestellt, so findet sich für das Gußeisen A

$$\sigma_{max} = \frac{3596}{1579}\,K_z = 2{,}28 \text{ mal Zugfestigkeit},$$

für das Gußeisen B

$$\sigma_{max} = \frac{3633}{1679}\,K_z = 2{,}16 \text{ mal Zugfestigkeit},$$

also durchschnittlich 2,22 mal Zugfestigkeit,
gegen 1,75 mal Zugfestigkeit
beim geraden Stabe.

2. Versuche und Darlegungen zur Frage der Spannungsverteilung über die Querschnitte gekrümmter stabförmiger Körper.

Zur raschen Gewinnung eines Einblicks in die Verhältnisse, welche bei Beurteilung dieser in neuerer Zeit aufgeworfenen Streitfrage in Betracht kommen, läßt es sich nicht vermeiden, bereits aus dem Früheren Bekanntes zu wiederholen.

Die Biegungslehre ist bisher sowohl für gerade als auch für gekrümmte stabförmige Körper von den Voraussetzungen:

1. daß die Querschnitte eben bleiben,
2. daß zwischen Dehnungen und Spannungen Proportionalität besteht,

ausgegangen.

Damit gelangt sie

für gerade stabförmige Körper,

in bezug auf deren Belastung angenommen sei, daß die Ebene des biegenden Kräftepaares den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet, zu den Ergebnissen:

a) daß die Gerade, in welcher die Dehnungen und die Spannungen den Wert Null besitzen, die sogenannte „neutrale Achse“ oder „Nullachse“, durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und mit der anderen Hauptachse zusammenfällt,

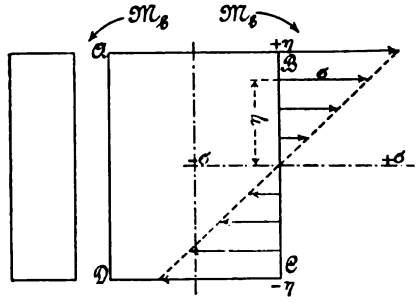


Fig. 1.

b) daß die Spannungen σ proportional mit dem Abstande η von der Nullachse wachsen, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 1,

$$\sigma = \sigma_1 \eta, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

sofern σ_1 die Spannung im Abstande 1 bezeichnet, daß also die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt nach dem Gesetze der geraden Linie erfolgt.

Für den gekrümmten stabförmigen Körper,

in bezug auf den vorausgesetzt werde, daß die Mittellinie eine einfach gekrümmte Kurve und ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte sowie Ebene des biegenden Kräftepaares sei, kommt die Biegungslehre unter den bezeichneten Voraussetzungen, Ziff. 1 und 2, zu den Ergebnissen:

a) daß die unter I. a) bezeichnete Hauptachse des Querschnittes nicht mehr Nullachse ist, daß diese vielmehr parallel dazu liegt,

b) daß die Spannungen σ nicht mehr proportional mit dem Abstande η von der Nullachse zunehmen, sondern auf der Seite, welche der Krümmungsachse zugekehrt ist, rascher und auf der anderen Seite langsamer als η wachsen, wie Fig. 2 erkennen läßt.

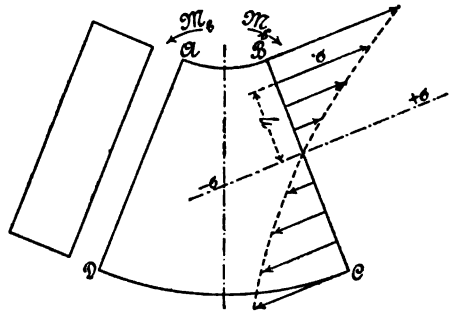


Fig. 2.

Der Grund dieser abweichenden Ergebnisse, zu denen man unter den gleichen Voraussetzungen gelangt, liegt lediglich darin, daß bei dem gekrümmten Stab die zwischen zwei Querschnitten gelegenen Fasern verschiedene Länge besitzen (vergl. das in Fig. 2 gezeichnete Körperelement mit den Stabquerschnitten AD und BC),

während bei dem geraden Stabe Gleichheit der Faserlänge vorhanden ist (vergl. das in Fig. 1 dargestellte Körperelement mit den Stabquerschnitten *AD* und *BC*). Wenn eine kürzere Faser um die gleiche Strecke gedehnt wird als eine längere, so wird eben in der ersteren eine größere spezifische Dehnung und damit auch eine größere Spannung wachgerufen als in der letzteren[1]).

In neuerer Zeit hat nun Föppl die Vertretung der Ansicht aufgenommen, daß für den gekrümmten stabförmigen Körper ebenfalls die durch Gleichung 1 ausgesprochene Spannungsverteilung die richtige sei[2]). Trifft dies zu, so müssen sich die ursprünglich ebenen Querschnitte wegen der auch von Föppl festgehaltenen Proportionalität von Dehnungen und Spannungen — lediglich unter Einwirkung des biegenden Kräftepaares — krümmen.

Föppl stützt sich[2]), wenn wir zunächst das von ihm beigebrachte Versuchsmaterial ins Auge fassen, auf die Formänderung eines Ringes, den er aus weichem Stahl von 250 mm äußerem, 150 mm innerem Durchmesser und 44 mm Höhe herstellen sowie auf einer der beiden Stirnflächen mit konzentrischen Kreisen und unter Benutzung der Reißnadel mit radialen Strichen in Abständen von ungefähr 10 mm versehen ließ. Der Ring wurde zusammengedrückt, so daß sich der eine Durchmesser um etwa 30 mm verkleinerte, der andere um ungefähr 20 mm vergrößerte. In bezug auf die ursprünglich geraden radialen Striche bemerkt Föppl: „Die Striche in den Mitten der vier Quadranten sind sehr deutlich S-förmig gebogen. Natürlich sehe ich diesen Versuch nicht als entscheidend an, da die bleibende Formänderung andere Gesetze befolgt als die elastische. Ich ließ ihn auf

---

[1]) Die Sache liegt hier ähnlich, wie bei dickwandigen Hohlzylindern. Die Anstrengung in tangentialer Richtung ist innen am größten und nimmt nach außen hin ab. (Vergl. S. 555 u. f., insbesondere auch Fig. 4, S. 558.)

[2]) Zentralblatt der Bauverwaltung 1896, S. 490 und 491. Sie wird daselbst als „Geradliniengesetz“ bezeichnet. Diese Bezeichnung läßt leicht eine Verwechselung mit der anderen Annahme, daß die Querschnitte eben bleiben, zu: denn hier erfolgt die Verteilung der Dehnungen nach dem Gesetz der geraden Linie. Am einfachsten und für den Ingenieur am deutlichsten wird sich die von Föppl vertretene Ansicht aussprechen: der gekrümmte stabförmige Körper ist in bezug auf Beanspruchung durch ein biegendes Moment und durch eine Normalkraft zu behandeln, als ob seine Querschnitte einem geraden Stabe angehörten.

Anregung eines meiner Schüler ausführen, der über diese Frage gern etwas unmittelbar Greifbares vor Augen haben wollte, und führe ihn eigentlich nur an, weil ich ihn nicht ausdrücklich verschweigen will; immerhin spricht auch er offenbar nicht zugunsten der Annahme, daß die Querschnitte bei der elastischen Formänderung eben bleiben."

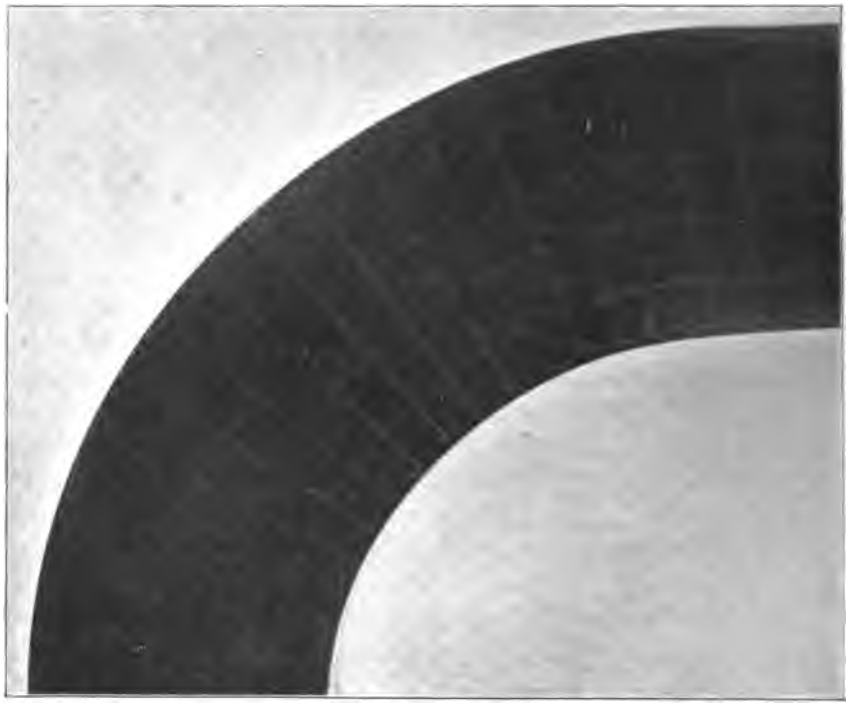


Fig. 3.

Da Föppl, unter mehrfacher Nennung der Arbeiten des Verfassers und unter Hervorhebung, daß er es für sehr unerwünscht halte, wenn in verschiedenen Teilen des Deutschen Reiches verschiedene Lehrmeinungen über einen so wichtigen Punkt vorgetragen werden, die Beleuchtung seiner Ansicht ausdrücklich wünscht, die er bis auf weiteres für die richtige halte und seinen Zuhörern gegenüber vertreten werde, so hat Verfasser, obgleich er im allgemeinen der Meinung ist, daß derjenige, welcher auf wissenschaft-

lichem Gebiete eine abweichende Ansicht aufstellt, den Beweis für die Richtigkeit derselben zu geben habe, und das umsomehr, wenn — wie im vorliegenden Falle — diese neue Ansicht dazu führt, das Material als weniger beansprucht anzusehen, wie nach der bisherigen Auffassung, im Interesse der Sache doch geglaubt, sich an dieser Stelle der ihm durch Föppl gestellten Aufgabe einer Beleuchtung der Ansicht des letzteren nicht entziehen zu sollen. Dazu gehörte in erster Linie die Feststellung der Querschnittsform des deformierten Rings und die Angabe der Last, welche diese Formänderung herbeigeführt hatte.

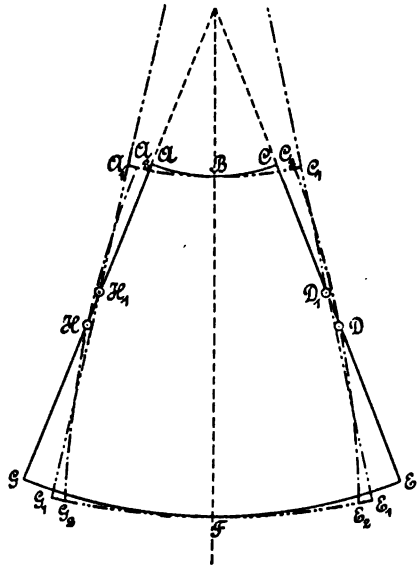


Fig. 4.

Fig. 3 gibt das photographische Bild eines Ringviertels in einer solchen Lage wieder, daß die belastende Kraft senkrecht zu denken ist. Deutlich läßt sich oben die S-förmige Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte erkennen. Die Kraft, durch welche der Ring belastet gewesen war, betrug 70 600 kg.

Ehe in eine Erörterung der S-Form des radialen Ringquerschnitts eingetreten wird, wollen wir uns die Frage stellen: wie müssen sich die ursprünglich ebenen Querschnitte *AHG* und *CDE*, Fig. 4, des Körperelements *ABCDEFGH* wölben, wenn der Körper

durch ein biegendes Kräftepaar beansprucht wird, dessen Drehungssinn derart sein mag, daß die Krümmung vermindert wird?

Nach der üblichen Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben, würde sich der Querschnitt AHG um die in H_1 sich projizierende Nullachse drehen und die Lage $A_1H_1G_1$ einnehmen, während der Querschnitt CDE, sich um D_1 drehend, in die Lage $C_1D_1E_1$ gelangen würde, wobei die Formänderung, um sie hervortreten zu lassen, in stark übertriebenem Maßstabe gezeichnet ist. Wird nun — mit Föppl — vorausgesetzt, daß nicht die Querschnitte eben bleiben, sondern die Spannungsverteilung nach Gleichung 1 stattfinde, so müssen sich die längeren Fasern verhältnismäßig mehr verkürzen und die kürzeren verhältnismäßig weniger dehnen, d. h. die Querschnitte müssen sich wölben, ungefähr wie in A_2HG_2 bezw. C_2DE_2, durch $-\cdot-\cdot-$-Linie eingetragen, angenommen ist, hohl nach dem mittleren Querschnitt BF hin, also ohne Wendepunkt. Von S-förmiger Wölbung kann unter Einwirkung des biegenden Kräftepaares somit keine Rede sein. Die S-förmige Krümmung ist vielmehr die Folge der Schubkraft und tritt bekanntlich auch bei geraden Stäben auf, wenn nur die Schubkraft groß genug ist, wie die Abbildungen in § 52: Fig. 6, Fig. 9 und Fig. 8, Taf. XVIII deutlich zeigen und wie aus der Lehre von der Schubelastizität und Schubfestigkeit bekannt ist[1]).

Diese Schubkraft ist im vorliegenden Falle recht groß. Sie liefert mit der Genauigkeit, mit welcher die für gerade stabförmige Körper mit rechteckigem Querschnitt gültige Gleichung (vergl. § 39, a, S. 355) auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf, in der Nullachse die größte Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{70\,600}{2\,.\,5\,.\,4{,}4} = 2407 \text{ kg/qcm}.$$

Die Wirksamkeit dieser Schubkraft und der durch sie hervorgerufenen Schubspannungen gegenüber dem weichen Stahl läßt sich

[1]) Föppl ist allem Anscheine nach entgangen, daß die S-förmige Wölbung der Querschnitte eine notwendige Folge der Wirkung der Schubkraft ist, und daß das von ihm zur Übertragung des biegenden Momentes angenommene Verteilungsgesetz der Spannungen (Gleichung 1) nicht zu einer S-förmigen Wölbung führt.

in Fig. 3 deutlich erkennen. Die auf der Stirnfläche des Ringes gezogenen Kreise und radialen Geraden schnitten sich ursprünglich senkrecht. Wie das Innere der Ringfläche in Fig. 3 (oben) zeigt, haben diese rechten Winkel ganz bedeutende Änderungen erfahren, d. i. eben die Folge der Wirkung der Schubkraft.

Hiernach muß ausgesprochen werden, daß die S-förmige Krümmung der Querschnitte des Stahlringes in bezug auf die zur Erörterung stehende Frage nicht das Geringste zu beweisen im stande ist, selbst wenn die bleibenden Formänderungen nicht anderen Gesetzen als die elastischen folgen würden.

Weiteres Versuchsmaterial ist von Föppl in Aussicht gestellt und seit der Zeit der Veröffentlichung des Vorstehenden und der folgenden Versuchsergebnisse (S. 527 bis 535) beigebracht worden. Die Fußbemerkungen Ziff. 1, S. 535 und 538 geben hierüber Auskunft.

Da die Frage von großer praktischer Bedeutung ist, so hat Verfasser geglaubt, zu den früheren Versuchen in dieser Richtung (vergl. oben unter Ziff. 1) noch weitere hinzufügen zu sollen, über welche im nachstehenden berichtet wird. Dabei sind die Körperformen so gewählt, daß vorzugsweise der Einfluß des biegenden Momentes sich äußert, dagegen der einer Normalkraft oder einer Schubkraft zurücktritt.

a) Versuche mit Stäben aus grauem Roheisen, Fig. 5. Bearbeitet.

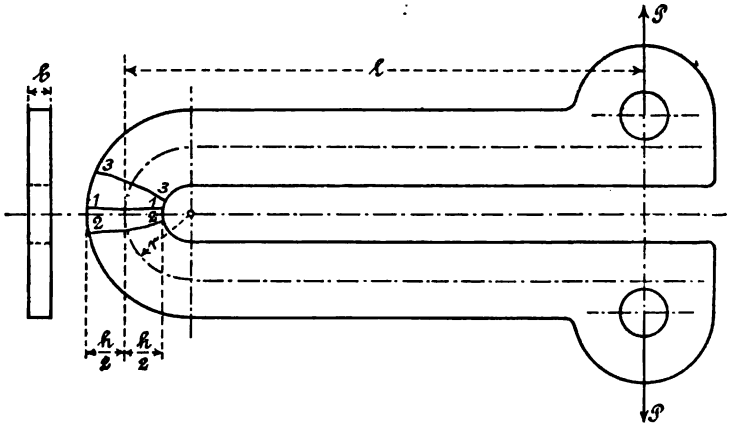


Fig. 5.

Stab 1.

$$l = 552 \text{ mm}, \; r = 70 \text{ mm}, \; h = 80 \text{ mm}, \; b = 24{,}2 \text{ mm},$$

$$f = 2{,}42 \,.\, 8 = 19{,}36 \text{ qcm},$$

nach Gleichung 12, § 54

$$\varkappa = -1 + \frac{7}{8} ln \frac{7+4}{7-4} = 0{,}137.$$

Der Bruch erfolgt bei $P = 855$ kg nach der in Fig. 5 eingetragenen Linie 11. Bruchfläche gesund.

Nach Gleichung 8, § 54, berechnet sich hieraus die Bruchfestigkeit

$$\sigma_{max} = \frac{855}{19{,}36} - \frac{855 \,.\, 55{,}2}{19{,}36 \,.\, 7} + \frac{855 \,.\, 55{,}2}{0{,}137 \,.\, 19{,}36 \,.\, 7} \frac{4}{7-4}$$

$$= 44{,}2 - 348{,}3 + 3390 = \sim 3086 \text{ kg/qcm}.$$

Von den beiden Schenkelstücken, die durch den Bruch entstanden waren, wurde das eine bei der Auflagerentfernung von 500 mm als gerader Stab der Biegungsprobe unterworfen. Diese lieferte bei gesunder Bruchfläche nach Gleichung 9, § 16, die Biegungsfestigkeit

$$K_b = 2524 \text{ kg/qcm}.$$

Würde man den gekrümmten stabförmigen Körper als geraden behandeln, d. h. seine Anstrengung durch das biegende Moment nach Gleichung 9, § 16, beurteilen, wie Föppl verlangt, so ergibt sich die Bruchfestigkeit zu

$$(\sigma_{max}) = \frac{855}{19{,}36} + \frac{855 \,.\, 55{,}2}{\frac{1}{6} \,.\, 2{,}42 \,.\, 8^2} = 1873 \text{ kg/qcm}.$$

Die Rechnung auf Grund der Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben, würde mit der Biegungsfestigkeit $K_b = 2524$ eine Bruchbelastung

$$P_1 = 855 \frac{2524}{3086} = 699 \text{ kg}$$

liefern, während die Annahme, daß die Spannungsverteilung nach Gleichung 1 stattfinde, d. h. genau so, als ob der Querschnitt einem geraden stabförmigen Körper angehöre, eine Bruchbelastung P_2 erwarten läßt, die sich aus

$$2524 = \frac{P_2}{2{,}42 \cdot 8} + \frac{P_2 \cdot 55{,}2}{\frac{1}{6} \cdot 2{,}42 \cdot 8^2}$$

oder

$$P_2 = 855 \frac{2524}{1873}$$

zu

$$P_2 = 1153 \text{ kg}$$

ergibt.

Hieraus folgt, daß die letztere Annahme zu einer bedeutenden Unterschätzung der Anstrengung führt; sie liefert eine um

$$\varphi_1 = 100 \frac{1153 - 855}{855} = \sim 35\,\%$$

zu große Widerstandsfähigkeit.

Die erste Voraussetzung dagegen beurteilt dieselbe um

$$\varphi_2 = 100 \frac{855 - 699}{855} = 18\,\%$$

zu niedrig[1]).

[1]) Daß der Unterschied φ_2 zu einem großen Teile seine Begründung in der Veränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten α bei Gußeisen hat, wurde oben S. 520 bereits hervorgehoben.

Stab 2.

$l = 554{,}2$ mm, $r = 70$ mm, $h = 80$ mm, $b = 22{,}7$ mm.

Bruch erfolgt bei $P = 810$ kg nach der in Fig. 5 eingetragenen Bruchlinie 22. Bruchfläche gesund.

Es finden sich die Werte

$$\sigma_{max} = 3128 \text{ kg/qcm}, \quad K_b = 2500 \text{ kg/qcm}, \quad (\sigma_{max}) = 1899 \text{ kg/qcm},$$

$$P_1 = 810 \frac{2500}{3128} = 647 \text{ kg}, \quad P_2 = 810 \frac{2500}{1899} = 1067 \text{ kg},$$

$$\varphi_1 = 100 \frac{1067 - 810}{810} = 32\,\%, \quad \varphi_2 = 100 \frac{810 - 647}{810} = 20\,\%.$$

Stab 3.

$l = 552$ mm, $r = 70$ mm, $h = 80$ mm, $b = 23{,}5$ mm.

Bruch erfolgt bei $P = 790$ kg, nach der in Fig. 5 eingetragenen Linie 33. Bruchfläche gesund.

Die Berechnung der Versuchsergebnisse führt zu:

$$\sigma_{max} = 2936 \text{ kg/qcm}, \quad K_b = 2339 \text{ kg/qcm}, \quad (\sigma_{max}) = 1782 \text{ kg/qcm},$$

$$P_1 = 790 \frac{2339}{2936} = 629 \text{ kg}, \qquad P_2 = 790 \frac{2339}{1782} = 1037 \text{ kg},$$

$$\varphi_1 = 100 \frac{1037 - 790}{790} = 31\,\%, \quad \varphi_2 = 100 \frac{790 - 629}{790} = 20\,\%.$$

Sämtliche 3 Stäbe zeigen, daß die Föpplsche Voraussetzung, die Spannungsverteilung erfolge nach Gleichung 1, zu einer bedeutenden Unterschätzung der Inanspruchnahme des vorliegenden Materiales führt und zwar im Durchschnitt um

$$\frac{35 + 32 + 31}{3} = \sim 33\%,$$

wenn die ermittelten Werte von φ_1 zugrunde gelegt werden.

b) Versuche mit Stäben aus grauem Roheisen, Fig. 6. Bearbeitet.

Die Form dieser Stäbe ist so gewählt, daß, wenn die Föpplsche Ansicht, die Spannungsverteilung in dem Querschnitte eines gekrümmten Stabes sei die gleiche, als gehöre derselbe einem

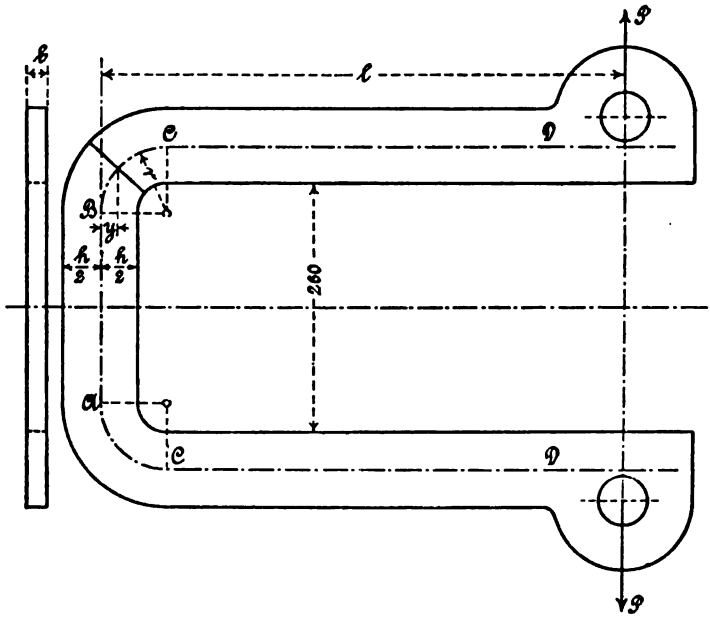


Fig. 6.

geraden stabförmigen Körper an, zutreffend wäre, der Bruch innerhalb der geraden Strecke AB erfolgen müßte; denn für alle anderen Querschnitte würde dann — die Richtigkeit dieser Annahme vorausgesetzt — die Beanspruchung geringer sein.

In der Tat ist jedoch keiner der Stäbe in der geraden Mittelstrecke AB gebrochen; selbst dann nicht, wenn der Guß in dieser

Mittelstrecke schlechte Stellen hatte. Sämtliche brachen in der Krümmung. Der Querschnitt des immer von der inneren Krümmung ausgehenden Bruches soll jeweils durch die Grösse y, Fig. 6, festgelegt werden.

Stab 1.

$$l = 554 \text{ mm}, \quad r = 70 \text{ mm}, \quad h = 80 \text{ mm}, \quad b = 22{,}4 \text{ mm},$$

$$f = 2{,}24 \,.\, 8 = 17{,}9 \text{ qcm},$$

$$\varkappa = -1 + \frac{7}{8} ln \frac{11}{3} = 0{,}137.$$

Der Bruch erfolgt bei $P = 870$ kg in der Krümmung derart, daß $y = 1{,}6$ cm. Bruchfläche gesund.

Für den Bruchquerschnitt ergibt sich

das biegende Moment

$$P(l-y) = 870\,(55{,}4-1{,}6) = 870 \,.\, 53{,}8 = \sim 46800 \text{ kg/cm},$$

die Normalkraft 670 kg.

Nach Gleichung 8, § 54, berechnet sich hieraus die Bruchfestigkeit

$$\sigma_{max} = \frac{670}{17{,}9} - \frac{870 \,.\, 53{,}8}{17{,}9 \,.\, 7} + \frac{870 \,.\, 53{,}8}{0{,}137 \,.\, 17{,}9 \,.\, 7} \frac{4}{7-4}$$

$$= 37 - 374 + 3636 = 3299 \text{ kg/qcm}.$$

Von den beiden, durch den Bruch entstandenen Schenkelstücken CD wurde das eine bei 500 mm Auflagerentfernung der Bruchprobe durch Biegung unterworfen. Dasselbe ergab bei gesunder Bruchfläche nach Gleichung 9, § 16, die Biegungsfestigkeit

$$K_b = 2668 \text{ kg/qcm}.$$

Würde das gekrümmte stabförmige Körperstück, innerhalb dessen der Bruch erfolgt ist, als gerader Stab behandelt, d. h.

seine Anstrengung durch das biegende Moment nach Gleichung 9, § 16, beurteilt, so fände sich die Bruchfestigkeit

$$(\sigma_{max}) = \frac{670}{17{,}9} + \frac{870 \,.\, 53{,}8}{\frac{1}{6} \,.\, 2{,}24 \,.\, 8^2} = 37 + 1961 = 1998 \text{ kg/qcm.}$$

Die Rechnung, welche voraussetzt, daß die Querschnitte eben bleiben, würde von der Biegungsfestigkeit $K_b = 2668$ kg/qcm auf eine Bruchbelastung

$$P_1 = 870 \frac{2668}{3299} = 704 \text{ kg}$$

führen, während die Annahme, daß die Spannungsverteilung so stattfände, als gehöre der Bruchquerschnitt einem geraden stabförmigen Körper an, eine Bruchbelastung

$$P_2 = 870 \frac{2668}{1998} = 1162 \text{ kg}$$

erwarten läßt.

Da der Versuch die Bruchbelastung zu 870 kg ergab, so folgt, daß die letztere Annahme die Widerstandsfähigkeit um

$$\varphi_1 = 100 \frac{1162 - 870}{870} = \sim 34\,\%$$

überschätzt.

Die erste Voraussetzung dagegen beurteilt diese um

$$\varphi_2 = 100 \frac{870 - 704}{870} = \sim 19\,\%$$

zu niedrig[1]).

[1]) Vergl. Fußbemerkung S. 529.

Stab 2.

$l = 552$ mm, $r = 69$ mm, $h = 78$ mm, $b = 22{,}4$ mm, $\varkappa = 0{,}133$, Bruchbelastung $P = 790$ kg, $y = 13$ mm, Bruchfläche: fehlerhafte Stelle, Normalkraft 645 kg.

Es finden sich hiermit:

$$\sigma_{max} = 3131 \text{ kg/qcm}, \quad K_b = 2759 \text{ kg/qcm}, \quad (\sigma_{max}) = 1909 \text{ kg/qcm},$$

$$P_1 = 790\,\frac{2759}{3131} = 696 \text{ kg}, \qquad P_2 = 790\,\frac{2759}{1909} = 1142 \text{ kg},$$

$$\varphi_1 = 100\,\frac{1142-790}{790} = 44\,\%, \qquad \varphi_2 = 100\,\frac{790-696}{790} = 12\,\%.$$

Stab 3.

$l = 554$ mm, $r = 70$ mm, $h = 80{,}2$ mm, $b = 19{,}9$ mm, $\varkappa = 0{,}137$ mm.

Bruchbelastung $P = 780$ kg, $y = 9$ mm, Bruchfläche gesund, Normalkraft 685 kg.

Damit ergeben sich die folgenden Werte:

$$\sigma_{max} = 3378 \text{ kg/qcm}, \quad K_b = 2633 \text{ kg/qcm}, \quad (\sigma_{max}) = 2043 \text{ kg/qcm},$$

$$P_1 = 780\,\frac{2633}{3378} = 608 \text{ kg}, \quad P_2 = 780\,\frac{2633}{2043} = 1005 \text{ kg},$$

$$\varphi_1 = 100\,\frac{1005-780}{780} = 29\,\%, \quad \varphi_2 = 100\,\frac{780-608}{780} = 22\,\%.$$

Somit weisen auch hier sämtliche Stäbe nach, daß eine Überschätzung der Widerstandsfähigkeit stattfindet, und zwar im Durchschnitt um

$$\frac{34 + 44 + 29}{3} = \sim 36\,\%$$

oder bei Ausschluß des Stabes mit fehlerhafter Bruchfläche um

$$\frac{34 + 29}{2} = 31{,}5\,\%$$

wenn die Spannungsverteilung nach Gleichung 1, also angenommen wird, der Bruchquerschnitt gehöre einem geraden stabförmigen Körper an[1]).

Schlußbemerkung.

Aus den Versuchen ist folgendes zu schließen.

Die Anwendung der Gleichung 1 für die Spannungsverteilung bei gekrümmten stabförmigen Körpern, d. h. die Behandlung derselben als Stäbe mit geraden Mittellinien, führt bei den Körpern Fig. 5 und 6 zu einer ganz bedeutenden Überschätzung der Widerstandsfähigkeit, und zwar bei den Stäben Fig. 5 um durchschnittlich 33 %, bei den Stäben Fig. 6 um durchschnittlich mindestens 31,5 %[2]).

---

[1]) Nach den Mitteilungen aus dem mech.-technischen Laboratorium der Techn. Hochschule München, 26. Heft (1898), hat Föppl mit Gußeisenkörpern, welche den in Fig. 6 dargestellten genau nachgebildet worden waren (S. 39), ebenfalls Versuche durchgeführt und im wesentlichen bestätigt gefunden, was oben angegeben wurde. Er ermittelte sogar einen Unterschied von 42 % (S. 40, rechte Spalte oben).

Die am Schlusse dieser Veröffentlichung gegebenen Mitteilungen über die Untersuchung eines Gußeisenringes enthalten die Angaben der Einzelheiten, welche erforderlich sind, um eine sichere Beurteilung zu ermöglichen, nicht. Sie machen überdies an verschiedenen Stellen Vorbehalte, weisen Unsicherheiten auf und kommen schließlich zu dem nicht klärenden Ergebnis, daß einige der Schaulinien von der Gestalt, welche auf Grund der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte zu erwarten steht, nicht allzuviel abweichen, während andere sich mit dieser Annahme durchaus nicht vereinigen lassen (S. 43).

[2]) Wie Verfasser aus Anlaß eines Unfalles in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901, S. 1567, und weiterhin 1902, S. 141 und 142 (oder Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 4) festgestellt hat, kann diese Über-

Diese Unterschätzung der Anstrengung des Materials wird unter sonst gleichen Verhältnissen um so bedeutender ausfallen, je größer die in Richtung des Krümmungshalbmessers r liegende Querschnittsabmessung h im Verhältnis zu r ist. Sie tritt in dem Maße zurück, in welchem diese Abmessung h im Vergleich zum Krümmungshalbmesser r abnimmt, wie bereits in § 54, namentlich Fußbemerkung daselbst S. 491 u. f., dargelegt ist.

Die Annahme, daß die Querschnitte eben bleiben, führt zu Zahlen, welche auf eine Unterschätzung der Widerstandsfähigkeit hindeuten, und zwar bei den Stäben Fig. 5 um durchschnittlich

$$\frac{18 + 20 + 20}{3} = \sim 19\,\%,$$

bei den Stäben Fig. 6 unter Ausschluß des zweiten Stabes um durchschnittlich

$$\frac{19 + 22}{2} = \sim 20{,}5\,\%.$$

Daß dieser Unterschied jedoch zu einem großen Teile auf Rechnung der dem Gußeisen eigentümlichen Veränderlichkeit des Dehnungskoefficienten α zu setzen ist, wurde bereits hervorgehoben (vergl. S. 520). Die Unterschätzung der Widerstandsfähigkeit beträgt hiernach nur einen kleinen Bruchteil der angegebenen 19 % bezw. 20,5 %.

Hiernach muß es als gegen den Sinn des Zweckes unserer technischen Rechnungen verstoßend und deshalb als unrichtig bezeichnet werden, gekrümmte Körper, für welche r im Verhältnis zu h nicht ausreichend groß ist, auf Grund des Gesetzes Gleichung 1 allgemein wie Stäbe mit gerader Mittellinie zu berechnen[1]).

---

schätzung der Widerstandsfähigkeit in praktisch wichtigen Fällen, je nach der Körper- und Querschnittsform, so weit gehen, daß die tatsächliche Widerstandsfähigkeit rund nur ein Drittel von derjenigen ist, die nach der Auffassung, der Bruchquerschnitt gehöre einem geraden stabförmigen Körper an, sich ergibt.

[1]) Daß man zu diesem Ergebnis auch auf dem Wege der Überlegung gelangt, folgt aus den oben gegebenen Darlegungen von selbst. Schon die S. 523, Fußbemerkung 1, erwähnte Ähnlichkeit ließ dasselbe erwarten.

Hieran ändert auch die Erwägung nichts, daß die Querschnitte des gekrümmten Körperteiles da, wo an ihn eine gerade Strecke anschließt, so z. B. im Falle der Fig. 6 bei A und B, oder auch bei C, weniger stark beansprucht sind, da in diesen Grenzquerschnitten wegen ihrer Angehörigkeit sowohl zum gekrümmten wie zum geraden Stabstück nicht gleichzeitig die für ersteres und die für letzteres geltende Spannungsverteilung vorhanden sein kann. Vielmehr wird sich hier ein gewisser Ausgleich vollziehen, ähnlich, wie er in § 46, Ziff. 3, S. 419 und 420 besprochen worden ist[1]). Die größte Zugspannung wird in diesen Querschnitten (vergl. Fig. 6) kleiner sein, als sie sich für den gekrümmten Stab ergibt, und größer, als sie für den geraden Stabteil berechnet wird. Darin ist es auch begründet, daß keiner der Stäbe Fig. 6 im Querschnitt bei A und B gebrochen ist, obgleich hier das biegende Moment und auch die Normalkraft am größten ausfällt.

Ähnlich liegt der Fall bei dem in § 55, Fig. 1, S. 505, dargestellten Haken. Hier muß der Umstand, daß der Krümmungshalbmesser der Mittellinie oberhalb des Querschnittes BOC sehr bald bedeutend zunimmt, eine solche ausgleichende, d. h. die größte Zugspannung in diesem Querschnitt etwas vermindernde, Wirkung äußern. Dagegen wird ein solcher, auf Verminderung der größten Anstrengung wirkender Einfluß bei dem Körper Fig. 4, § 54, S. 492, nicht erwartet werden können.

Eine Körperform, die sich unter Einwirkung der äußeren Kräfte so deformiert, daß r für den in Betracht kommenden Querschnitt zunimmt, während sich gleichzeitig das biegende Moment infolge Abnahme des Hebelarmes verringert, wie dies beispielsweise bei Fig. 4, § 54, S. 492, und Fig. 1, § 55, S. 505, der Fall ist, wird, reichliche Zähigkeit des Materials, d. h. weitgehende Fähigkeit, die Gestalt zu ändern, vorausgesetzt, bei Bruchversuchen — sofern überhaupt Bruch eintritt — naturgemäß eine bedeutend größere Biegungsfestigkeit ergeben müssen, als die Rechnung, die noch dazu Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen voraussetzt, erwarten läßt. Von der so nach weit ge-

[1]) An Stellen mit plötzlicher Änderung der Form des stabförmigen Körpers, also mit Stetigkeitsunterbrechungen in der Form, wird sich immer ein solcher Ausgleich einstellen müssen.

triebener Formänderung ermittelten Festigkeit kann ein Schluß auf die Beanspruchung, wie sie im normalen Zustand des Körpers tatsächlich statthat, auch nicht mit einiger Annäherung gezogen werden, wie bereits für gerade stabförmige Körper in § 22, Ziff. 1 a, S. 245 u. f. dargelegt worden ist[1]).

II. Die Mittellinie ist eine doppelt gekrümmte Kurve.

In Berücksichtigung der Grenzen, welche diesem Buche gezogen sind, haben wir uns hier auf das Nachstehende zu beschränken.

§ 57. Die gewundenen Drehungsfedern.

Eine genaue Berechnung dieser Federn ist sehr umständlich; der hiermit verknüpfte Zeitaufwand würde in den allermeisten Fällen außer Verhältnis zur praktischen Bedeutung des Ergebnisses stehen. Infolgedessen pflegt man bei Feststellung der Zusammendrückung oder Ausdehnung sowie der Beanspruchung Annahmen zu machen, welche zu genügend einfachen Beziehungen führen.

Die Mittellinie $ABCDE$, Fig. 1, des gewundenen Stabes von gleichem Querschnitte bestehe aus dem Kreisbogen $ABCD$ vom Halbmesser ϱ und aus der Geraden DE, welche in die Richtung eines Halbmessers fällt. Im Punkte A sei der Stab eingespannt und im freien Endpunkte E, der gleichzeitig Mittelpunkt des Kreises ist, durch eine Kraft P senkrecht zur Bildebene (Ebene des Kreises) belastet.

Für den beliebigen Querschnitt im Punkte B, welcher durch den Winkel φ bestimmt sein möge, ergibt die Kraft P ein auf

---

[1]) An der in der Fußbemerkung Ziff. 1, S. 535, genannten Stelle ist ein Bericht über Zugversuche mit Eisenbahnkuppelungshaken enthalten, der seine Schlüsse in solcher Weise aufbaut, also insbesondere die Gleichung 1, § 45, welche Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen voraussetzt, bis zum Bruche hin als gültig, d. h. die Kurve $OBCE$, Fig. 1, § 3 als Gerade annimmt. Eine auf die Einzelheiten dieses Berichtes eingehende Besprechung hat A. Bantlin in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 261 u. f. gegeben. Gegenrede und Erwiderung hierzu findet sich S. 403 und 404 daselbst.

Drehung wirkendes Kräftepaar vom Moment $M_d = P\varrho$ und eine Schubkraft P, welche vernachlässigt wird. Die Materialanstrengung erscheint hiernach festgestellt durch Gleichung 6, § 34, natürlich mit derjenigen Genauigkeit, mit welcher diese für den geraden Stab entwickelte Beziehung auf den gekrümmten Stab übertragen werden darf.

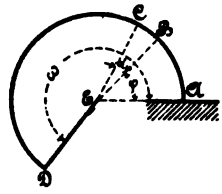


Fig. 1.

Der Querschnitt im Punkte C der Mittellinie, welcher von demjenigen im Punkte B um $ds = \varrho\, d\varphi$ absteht, muß sich unter Einwirkung von M_d gegenüber dem letzteren Querschnitt verdrehen. Ist ϑ der verhältnismäßige Drehungswinkel, mit der soeben bezeichneten Genauigkeit bestimmt:

für den kreisförmigen Querschnitt durch Gleichung 5, § 32,

$$\vartheta = \frac{32}{\pi}\frac{P\varrho}{d^4}\beta,$$

für den rechteckigen Querschnitt durch Gleichung 9a, § 43,

$$\vartheta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P\varrho\beta,$$

so beträgt diese Verdrehung $\vartheta\, ds = \vartheta\varrho\, d\varphi$. Dementsprechend wird sich der Angriffspunkt E der Kraft P um $\vartheta\, ds \,.\, \varrho = \vartheta\varrho^2\, d\varphi$ in Richtung der letzteren bewegen. Hieraus ergibt sich die Strecke y', um welche der Punkt E infolge der Verdrehung sämtlicher Querschnitte des Bogens $ABCD$ fortrückt, zu

$$y' = \int_0^{\omega} \vartheta\varrho^2\, d\varphi.$$

Durch Einführung von

$$\vartheta = A \,.\, \varrho,$$

wobei beträgt:

für den kreisförmigen Querschnitt

$$A = \frac{32}{\pi}\frac{1}{d^4} P \beta,$$

für den rechteckigen Querschnitt

$$A = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta,$$

folgt

$$y' = A \int_0^{\omega} \varrho^3 \, dq. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Die Bewegung von E aus Anlaß der Durchbiegung des Armes DE wird — als verhältnismäßig klein — vernächlässigt.

1. Die zylindrischen Schraubenfedern, Fig. 2 und 3.

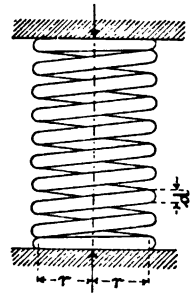


Fig. 2.

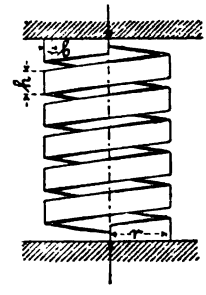


Fig. 3.

Das in Gleichung 1 gewonnene Gesetz überträgt man nun auf diese Federn, indem bei i Windungen der Schraubenlinie

$$\omega = 2 \pi i$$

gesetzt und an die Stelle von ϱ der Halbmesser r eingeführt wird. Damit folgt

$$y' = A \int_0^{2\pi i} r^3 \, d\varphi = 2\pi i A r^3,$$

insbesondere für den kreisförmigen Querschnitt unter Beachtung der Gleichung 3, § 32, nach welcher

$$Pr = \frac{\pi}{16} k_d d^3,$$

$$y' = 64 i \frac{P r^3}{d^4} \beta = 4\pi i \frac{r^3}{d} k_d \beta, \quad \ldots \quad 2)$$

und für den rechteckigen Querschnitt bei Berücksichtigung der Gleichung 5, § 34,

$$Pr = \frac{2}{9} k_d b^2 h,$$

$$y' = 2 \psi_0 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P r^3 \beta = \frac{4}{9} \psi_0 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b h^2} r^2 k_d \beta. \quad 3)^1)$$

worin b die kleinere Seite des Rechtecks ist, gleichgültig, ob b oder h in die Richtung der Federachse fällt.

Diese Gleichung läßt sich auch unmittelbar aus der Beziehung 8a, § 43, ableiten.

Die mechanische Arbeit, welche durch die von Null bis auf P gewachsene Belastung bei Zurücklegung des Weges y' verrichtet

---

[1]) Nach Versuchen des Verfassers mit zylindrischen Schraubenfedern aus vorzüglichem Federstahl (gehärtet) erwies sich Gleichung 3 innerhalb des Gebietes $h : b = 1$ bis 6 und für Werte von h (im Gegensatz zu Fig. 3 senkrecht zur Schraubenachse liegend) bis $0{,}6\,r$ noch als ausreichend zutreffend, wenn

$$2\psi_0 = 8{,}35 - 0{,}3 \frac{h}{b} \quad \ldots \quad 7)$$

gesetzt wird. Dabei war $\beta = \frac{1}{840\,000}$ in Rechnung gestellt worden.

Materialanstrengungen, berechnet aus

$$k_d = 4{,}5 \frac{Pr}{b^2 h},$$

ertrug das Material bis rund 14 000 kg/qcm (vergl. Maschinenelemente, 9. Aufl., S. 58).

wird, ist $\frac{1}{2} P y'$. Dieselbe muß gleich sein der Arbeit, welche die Formänderung des gewundenen Stabes, dessen Mittellinie die Länge $2 \pi r i$ besitzt, fordert. Mit der Genauigkeit, mit welcher die zunächst für den geraden Stab entwickelte Gleichung 8a, § 43, auf den gekrümmten übertragen werden darf, findet sich wegen $M_d = P r$ und $l = 2 \pi r i$

$$\frac{1}{2} P y' = \frac{1}{2} \psi_0 \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} (P r)^2 2 \pi r i,$$

$$y' = 2 \psi_0 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P r^2 \beta,$$

wie oben ermittelt.

In ganz gleicher Weise kann auch die Beziehung 2 aus der Arbeitsgleichung für den kreiszylindrischen Stab abgeleitet werden.

Die mechanische Arbeit A, welche die zylindrische Schraubenfeder aufzunehmen vermag, wird unmittelbar durch die Gleichung 2, § 43, worin

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 . 2 \pi r i$$

bezw. durch die Gleichung 7, § 43, mit

$$V = b h . 2 \pi r i$$

bestimmt, oder kann auch mittelst der Beziehungen 2 und 3 unter Berücksichtigung der Gleichungen 3, § 32, und 5, § 34, als Produkt $\frac{1}{2} P y'$ ermittelt werden.

Beachtung verdient der Umstand, daß mit dem Zusammendrücken oder Auseinanderziehen der Feder eine Verdrehung derselben verbunden ist, welche sich am äußeren Umfange bei einer größeren Zahl von Windungen leicht messen läßt. Beim Zusammendrücken dreht sich die Feder auf, entsprechend einer Verminderung der Gangzahl, wenn auch nur um einen sehr kleinen Bruchteil, beim Auseinanderziehen tritt das Entgegengesetzte ein. So ergab sich z. B. für eine aus gehärtetem Federstahl bestehende Feder nach Fig. 3, für die ermittelt worden war:

$r = 55{,}1$ mm, Windungszahl $i = 26{,}5$,
die kleinere Seite $b = 5{,}58$ mm (in achsialer Richtung liegend)
- größere - $h = 33{,}2$ - (- radialer - -)

ganze Höhe, senkrecht — also unter dem Einfluß des Eigengewichts, das 14,88 kg betrug, stehend — gemessen, 958,5 mm,

auf der Belastungsstufe

$P =$	50/100 kg	50/150 kg	50/200 kg	50/250 kg	50/300 kg	50/350 kg
die Zusammendrückung						
$y' =$	84,6 mm	169,2 mm	253,8 mm	338,5 mm	425,1 mm	514,2 mm
die Verdrehung auf dem Zylindermantel vom Durchmesser $2 \cdot 55{,}1 + 33{,}2 = 143{,}4$ mm gemessen						
	9,3 mm	18,7 mm	26,5 mm	34,5 mm	40,5 mm	45,5 mm

Dabei vergrößerte sich der ursprüngliche Durchmesser der Feder von $2 \cdot 55{,}1 + 33{,}2 = 143{,}4$ mm bei vollständiger Zusammendrückung auf rund 145,0 mm.

Ferner ist zu beachten, daß lange Federn, welche auf Druck beansprucht werden, die Neigung bekunden, in der Mitte nach der Seite auszuweichen, d. h. auszuknicken; sie müssen deshalb geführt werden und ergeben alsdann einen Reibungswiderstand, welcher je nach den Verhältnissen mehr oder weniger Einfluß auf die Größen der Formänderungen (Zusammendrückung und Verdrehung) äußern kann.

2. *Die Kegelfedern*, Fig. 4, 5 und 6.

Auch auf diese Federn pflegt die Beziehung 1 übertragen zu werden, indem man ϱ als Veränderliche ansieht und bei i Windungen setzt

$$\varrho = r_2 - (r_2 - r_1)\frac{\varphi}{2\pi i},$$

$$d\varrho = -\frac{r_2 - r_1}{2\pi i}\, d\varphi,$$

$$d\varphi = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1}\, d\varrho,$$

Hiermit wird dann

$$y' = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} A \int_{r_2}^{r_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi i}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2 - r_1} A$$

$$= \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) A.$$

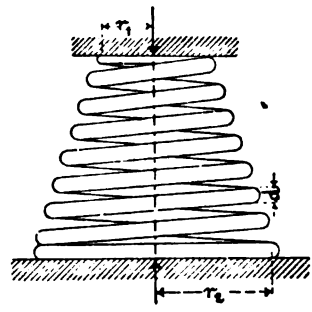


Fig. 4.

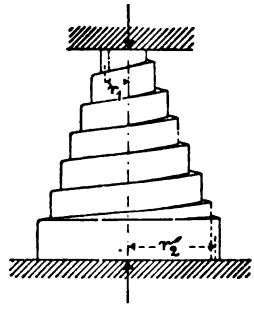


Fig. 5.

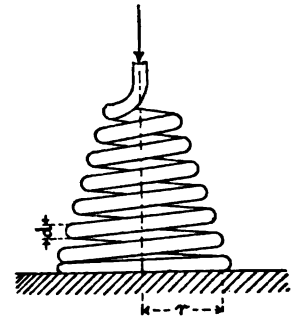


Fig. 6.

Für den kreisförmigen Querschnitt folgt

$$y' = \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^4} P\beta$$

$$= 16\, i \frac{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)}{d^4} P\beta \quad \ldots \quad 4)$$

und im Falle der Fig. 6, wegen $r_1 = 0$, $r_2 = r$

$$y' = 16\, i \frac{r^3}{d^4} P \beta. \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Die Anstrengung k_d wird bestimmt aus

$$P r_2 = \frac{\pi}{16} k_d d^3 \text{ (Fig. 4)},$$

bezw.

$$P r = \frac{\pi}{16} k_d d^3 \text{ (Fig. 6)}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt, Fig. 5, ergibt sich

$$y' = \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta$$

$$= \frac{1}{2} \psi_0 \pi i (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta. \quad . \quad 6)$$

Die Anstrengung k_d folgt aus

$$P r_2 = \frac{2}{9} k_d b^2 h.$$

Die vorstehenden Entwicklungen bedürfen hinsichtlich des Grades der Genauigkeit noch einer gründlichen Prüfung auf dem Wege des Versuchs, namentlich dann, wenn die Querschnittsabmessungen der Federn nicht sehr klein sind gegenüber dem Krümmungshalbmesser der Mittellinie, und wenn die Ganghöhe der Schraubenfedern verhältnismäßig bedeutend ist[1]).

[1]) Die in der Fußbemerkung S. 541 erwähnten Versuche mit zylindrischen Schraubenfedern erachtet Verfasser zur vollen Klarstellung noch nicht für ausreichend.

Sechster Abschnitt.

Gefäße.

§ 58. Hohlzylinder.

1. Innerer und äußerer Druck.

Unter Bezugnahme auf Fig. 1 bezeichne

r_i den inneren Halbmesser des an den Stirnseiten geschlossen vorausgesetzten Hohlzylinders,

r_a den äußeren Halbmesser desselben,

p_i die Pressung der den Zylinderhohlraum erfüllenden Flüssigkeit,

p_a die Pressung der den Zylinder umschließenden Flüssigkeit.

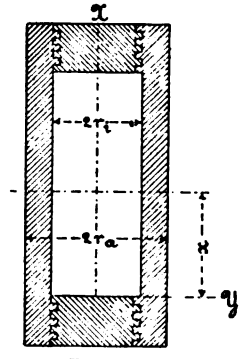


Fig. 1.

Der Abschluß an den Stirnseiten des Zylinders sei derart, daß die Formänderung des abschließenden Bodens einen Einfluß auf die Zylinderwandung nicht äußere, oder daß dieser wenigstens unerheblich ausfalle.

Der Zylinder werde auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, in der Weise, daß die x-Achse mit der Zylinderachse,

die yz-Ebene mit der einen, den Hohlraum begrenzenden Stirnebene des Zylinders zusammenfällt, wie dies Fig. 2 erkennen läßt.

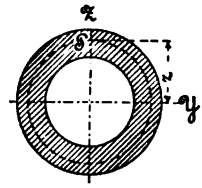


Fig. 2.

Wir greifen einen beliebigen Punkt P des Zylinders heraus, welcher in der xz-Ebene liegt und vor Eintritt der Formänderung absteht:

von der yz-Ebene um x, und von der Zylinderachse um z.

Unter Einwirkung der den Zylinder belastenden Flüssigkeitspressungen wird sich außer x noch z, und zwar um ζ, vergrößern. Aus der xz-Ebene tritt der Punkt hierbei nicht heraus.

Ferner werden im Punkte P folgende Spannungen entstehen:

σ_x in Richtung der x-Achse, d. i. in achsialer Richtung,

σ_y - - - y - d. i. in der Richtung des Umfanges, in tangentialer Richtung, und

σ_z in Richtung der z-Achse, d. i. in radialer Richtung.

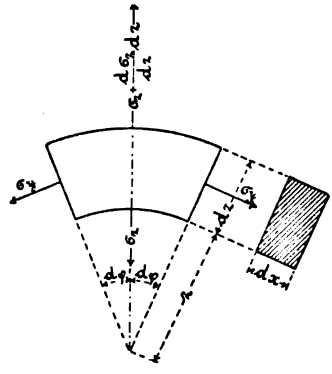


Fig. 3.

Dementsprechend wirken auf das unendlich kleine Körperelement, Fig. 3, welches wir uns durch Zylinderflächen im Ab-

stande z und $z + dz$ aus dem Zylinder herausgeschnitten denken, in der Bildebene der Figur die Kräfte:

$\sigma_z \,.\, 2\,z\,d\varphi\,dx$ radial einwärts,

$\left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}\,dz\right) .\, 2\,(z + dz)\,d\varphi\,dx$ radial auswärts,

$\sigma_y \,.\, dz\,dx$ senkrecht zu den beiden Flächen $dz\,dx$.

Der Gleichgewichtszustand fordert nun, daß die Summe der Kräfte in senkrechter Richtung gleich Null ist, d. h.

$$\sigma_z \,.\, 2\,z\,d\varphi\,dx - \left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}\,dz\right) .\, 2\,(z + dz)\,d\varphi\,dx + 2\,\sigma_y \,.\, dz\,dx \,.\, \sin(d\varphi) = 0,$$ [1])

woraus sich unter Beachtung, daß $\sin(d\varphi) = \sim d\varphi$, und nach Division mit $2\,d\varphi\,dx\,dz$ bei Vernachlässigung des unendlich kleinen Gliedes

$$\frac{d\sigma_z}{dz}\,dz$$

gegenüber den übrigen endlichen Größen ergibt

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}(\sigma_y - \sigma_z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

---

[1]) Liegt die Aufgabe vor, die Beanspruchung eines rotierenden Hohlzylinders infolge der Fliehkraft zu bestimmen, so ist diese Gleichung noch durch die auswärts gerichtete Fliehkraft des Körperelementes, d. h. durch Hinzufügung des Gliedes

$$-\gamma \frac{2\,z\,d\varphi \,.\, dz\,dx}{g}\,\omega^2 z$$

zu ergänzen, worin

γ das Gewicht der Raumeinheit,
ω die Winkelgeschwindigkeit,
g die Beschleunigung der Schwere

bedeutet.

Gleichung 1 geht damit über in

$$\frac{d\,\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}\,(\sigma_y - \sigma_z) - \gamma\,\frac{\omega^2}{g} \,.\, z.$$

Im übrigen ist in gleicher Weise vorzugehen, wie oben angegeben.

In § 7 fanden wir unter der Voraussetzung vollkommener Gleichartigkeit des Materials für ein beliebiges Körperelement, welches in Richtung der drei Achsen gleichzeitig die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z erfährt, die hieraus sich ergebenden Dehnungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{in Richtung der } x\text{-Achse } \varepsilon_1 = \alpha\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right),\\ &\text{- - - } y\text{- - } \varepsilon_2 = \alpha\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right),\\ &\text{- - - } z\text{- - } \varepsilon_3 = \alpha\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right). \end{aligned}\right\} \quad 4,\ \S\ 7.$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \alpha\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\,\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m}\right),$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2}\,\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\alpha} = \frac{m}{m-2}\,\frac{e}{\alpha},$$

sofern

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Wird hierzu die aus der ersten der Gleichungen 4, § 7, abgeleitete Beziehung

$$m\,\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = m\,\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$$

hinzugefügt, so ergibt sich

$$m\,\sigma_x + \sigma_x = \frac{m}{m-2}\,\frac{e}{\alpha} + m\,\frac{\varepsilon_1}{\alpha},$$

$$\sigma_x = \frac{m}{1+m}\,\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right).$$

Vergl. Großmann, Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, 1883, S. 216 u. f., Grübler, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 860 u. f., Stodola, Die Dampfturbinen, Berlin 1904, S. 132.

Das gleiche Verfahren liefert

$$\sigma_y = \frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right),$$

$$\sigma_z = \frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right).$$

Hieraus findet sich bei Berücksichtigung der Gleichung 3, § 31,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right)\\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right)\\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Im vorliegenden Falle beträgt, da sich z um ζ ändert, die tangentiale Dehnung ε_2 im Punkte P

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(z+\zeta) - 2\pi z}{2\pi z} = \frac{\zeta}{z} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Für die radiale Dehnung ε_3 liefert die Erwägung, daß die Strecke dz die Änderung $d\zeta$ erfährt, den Ausdruck

$$\varepsilon_3 = \frac{d\zeta}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Hiermit wird aus den Gleichungen 3

$$\sigma_x = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\beta}\left(\frac{\zeta}{z} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2}\right)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\beta}\left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2}\right).$$

Die Einsetzung des aus der ersten dieser Gleichungen folgenden Wertes

$$\varepsilon_1 = \frac{m-2}{2(m-1)}\beta\sigma_x - \frac{\frac{\zeta}{z}+\frac{d\zeta}{dz}}{m-1}$$

in die beiden anderen führt zu

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{\zeta}{z}+\frac{d\zeta}{dz}\right)+\frac{\sigma_x}{m-1}\\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\zeta}{z}+m\frac{d\zeta}{dz}\right)+\frac{\sigma_x}{m-1}\end{aligned}\right\} \quad . \quad 6)$$

Hier ist unter Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung der Achsialkraft $\pi r_i^2 p_i - \pi r_a^2 p_a$ über den Zylinderquerschnitt $\pi r_a^2 - \pi r_i^2$, d. h.

$$\pi(r_a^2 - r_i^2)\sigma_x = \pi(p_i r_i^2 - p_a r_a^2),$$

die achsiale Spannung

$$\sigma_x = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

als unveränderliche Größe anzusehen.

Die Einführung der Werte σ_y und σ_z aus den Gleichungen 6 in die Gleichung 1 ergibt

$$z\frac{d^2\zeta}{dz^2}+\frac{d\zeta}{dz}-\frac{\zeta}{z}=0,$$

oder

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2}+\frac{d\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{dz}=0.$$

Durch Integration

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\zeta}{z} = \text{konstant} = c_1.$$

Hieraus

$$z\frac{d\zeta}{dz} + \zeta = c_1 z,$$

oder

$$\frac{d(z\zeta)}{dz} = c_1 z,$$

und bei nochmaliger Integration

$$z\zeta = \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2.$$

Mit den hieraus sich ergebenden Werten

$$\frac{\zeta}{z} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2},$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^2}$$

liefern die beiden Gleichungen 6

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) + \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \end{aligned}\right\}. \quad 8)$$

Die zwei Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen, daß sein muß:

$$\text{für } z = r_i \qquad \sigma_z = -p_i,$$

$$\text{- } z = r_a \qquad \sigma_z = -p_a,$$

d. h.

$$-p_i = \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1},$$

$$-p_a = \frac{2}{m-1}\,\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_a^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1},$$

woraus

$$c_1 = \frac{m-1}{m+1}\,\beta\left(\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{\sigma_x}{m-1}\right),$$

$$c_2 = \frac{p_i - p_a}{2}\,\beta\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Hiermit wird unter Beachtung der Gleichung 7

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + (p_i - p_a)\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,\frac{1}{z^2}\\ \sigma_z &= \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - (p_i - p_a)\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\,\frac{1}{z^2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad 9)$$

Die Dehnungen ε_1, ε_2 und ε_3 in den drei Hauptrichtungen ergeben sich aus den Gleichungen 4, § 7, nach Einführung der Werte σ_x (Gleichung 7), σ_y und σ_z (Gleichung 9) zu

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{m-2}{m}\,\alpha\,\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2},\\ \varepsilon_2 &= \frac{m-2}{m}\,\alpha\,\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}(p_i - p_a)\frac{1}{z^2},\\ \varepsilon_3 &= \frac{m-2}{m}\,\alpha\,\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}(p_i - p_a)\frac{1}{z^2}.\end{aligned}\right\} \quad 10)$$

2. *Innerer Überdruck* p_i ($p_a = 0$).

Die Gleichungen 10 ergeben unter Beachtung des in § 48, Ziff. 1 Erörterten die Materialanstrengung im Punkte P und zwar

in Richtung der Zylinderachse

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i = 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i,$$

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$\frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i + \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}$$

$$= 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i + 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}, \qquad 11)$$

in Richtung des Halbmessers

$$\frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i - \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}$$

$$= 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i - 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2},$$

sofern noch jeweils $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird.

Die Zuganstrengung $\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$ in Richtung der Achse tritt vollständig hinter die Zuginanspruchnahme $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$, welche im Sinne des Umfanges statthat, zurück, so daß sie nicht weiter in Betracht gezogen zu werden braucht. $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ und $\frac{\varepsilon_3}{\alpha}$ erlangen die größten Werte für $z = r_i$, d. h. an der Innenfläche des Hohlzylinders. Somit wird mit k_z als zulässiger Zug- und k als zulässiger Druckanstrengung

$$\left.\begin{aligned}\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)&=\frac{(m+1)\,r_a^2+(m-2)\,r_i^2}{m\,(r_a^2-r_i^2)}\,p_i=\frac{1{,}3\,r_a^2+0{,}4\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i\leqq k_z,\\ \max\left(-\frac{\varepsilon_3}{\alpha}\right)&=\frac{(m+1)\,r_a^2-(m-2)\,r_i^2}{m\,(r_a^2-r_i^2)}\,p_i=\frac{1{,}3\,r_a^2-0{,}4\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i\leqq k.\end{aligned}\right\}\quad 12)$$

Die Zuganstrengung $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ in Richtung des Umfanges, d. i. in tangentialer Richtung, ist der größere, also der bestimmende Wert. Hiernach findet sich als maßgebende Beziehung

$$k_z\geqq\frac{\frac{m+1}{m}\,r_a^2+\frac{m-2}{m}\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i=\frac{1{,}3\,r_a^2+0{,}4\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i,\quad 13)$$

oder

$$r_a\geqq r_i\sqrt{\frac{k_z+\left(1-\frac{2}{m}\right)p_i}{k_z-\left(1+\frac{1}{m}\right)p_i}}=r_i\sqrt{\frac{k_z+0{,}4\,p_i}{k_z-1{,}3\,p_i}}\quad 14)^1)$$

[1]) Zur Entwicklung dieser Beziehung in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1880, S. 283 u. f. war Verfasser durch die Beobachtung veranlaßt worden, daß Schläuche, welche zum Zwecke der Prüfung innerem Überdruck ausgesetzt wurden, sich verlängern, während die Grundlage der von Grashof in seiner Theorie der Elastizität und Festigkeit 1878, S. 312, für die Berechnung von Hohlzylindern entwickelten Gleichung

$$r_a=r_i\sqrt{\frac{m\,k_z+(m-1)\,p_i}{m\,k_z-(m+1)\,p_i}},\quad 15)$$

und mit $m=\frac{10}{3}$

$$r_a=r_i\sqrt{\frac{k_z+0{,}7\,p_i}{k_z-1{,}3\,p_i}},$$

welche dem Verfasser bis dahin als die zutreffendste erschienen war, infolge der Vernachlässigung der Achsialkraft $\pi r_i^2 p_i$ nicht eine Verlängerung, sondern eine Verkürzung des Hohlzylinders ergibt, indem für die Dehnung ε_x in Richtung der Zylinderachse ein negativer Wert gefunden wird. (S. am angegebenen Ort in No. 199 den Ausdruck für $E\,\varepsilon_x$, vergl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1880, S. 288 und 290.)

Für $1{,}3\,p_i = k_z$ wird $r_a = \infty$, gleichgültig, wie klein auch der innere Durchmesser sein mag, sofern er nur größer als Null ist. Da nun der zulässigen Anstrengung k_z für jedes Material eine unüberschreitbare Grenze gezogen ist, so folgt hieraus, daß nur solche Verhältnisse möglich sind, für welche

$$p_i < \frac{k_z}{1{,}3},$$

oder allgemein

$$p_i < \frac{m+1}{m} k_z.$$

(Vergl. hierzu Fußbemerkung 2, S. 557.)

Daß es durch fortgesetzte Vergrößerung der Wandstärke nicht möglich sein soll, die Flüssigkeitspressung über eine gewisse Höhe hinaus zu steigern, kann für den ersten Augenblick überraschen, erklärt sich jedoch durch die Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Anstrengung über den Wandungsquerschnitt.

Denken wir uns beispielsweise einen Hohlzylinder aus Gußstahl mit den Durchmessern

$$2\,r_i = 80 \text{ mm}, \qquad 2\,r_a = 200 \text{ mm},$$

der Wandstärke

$$r_a - r_i = 100 - 40 = 60 \text{ mm}$$

Die Beziehung 15 wurde in der Form

$$\delta = r_a - r_i = r_i \left(-1 + \sqrt{\frac{m\,k_z + (m-1)\,p_i}{m\,k_z - (m+1)\,p_i}} \right)$$

auch als Winklersche Gleichung bezeichnet (v. Reiche, Die Maschinenfabrikation 1876, S. 37, wobei mit $m = 3$ gesetzt ist,

$$\delta = r_i \sqrt{\frac{3\,k_z + 2\,p_i}{3\,k_z - 4\,p_i}} - r_i,$$

u. a.). Verfasser, welcher gelegentlich der Abfassung dieses Buches (1889) die Winklersche Arbeit über zylindrische Gefäße im Zivilingenieur 1860 erstmals durchgesehen hat, fand bei dieser Gelegenheit, daß Winkler bereits damals nicht bloß die Beziehung 15 aufgestellt hatte, sondern auch eine weitere Gleichung, welche die erwähnte Achsialkraft berücksichtigte (S. 348 und 349 daselbst), und die sich von Gleichung 14 nur durch den mit 4 etwas zu groß gewählten Wert von m unterscheidet.

hergestellt und einem inneren Überdruck von 1200 kg auf das Quadratzentimeter ausgesetzt. Dann ergibt sich nach der zweiten der Gleichungen 11 die tangentiale Anstrengung (Zug)[1])

a) an der Innenfläche, d. h. für $z = 4$ cm,

$$0{,}4\,\frac{4^2}{10^2-4^2}\,1200 + 1{,}3\,\frac{10^2\cdot 4^2}{10^2-4^2}\cdot 1200\,\frac{1}{4^2} = \sim 1950 \text{ kg};$$

b) in der Mitte, d. h. für $z = 7$ cm,

$$0{,}4\,\frac{4^2}{10^2-4^2}\,1200 + 1{,}3\,\frac{10^2\cdot 4^2}{10^2-4^2}\cdot 1200\,\frac{1}{7^2} = \sim 700 \text{ kg};$$

c) an der Außenfläche, d. h. für $z = 10$ cm,

$$0{,}4\,\frac{4^2}{10^2-4^2}\,1200 + 1{,}3\,\frac{10^2\cdot 4^2}{10^2-4^2}\cdot 1200\,\frac{1}{10^2} = \sim 390 \text{ kg}.$$

In Fig. 4 ist der Verlauf der Inanspruchnahme dargestellt.

Die Anstrengung beträgt hiernach außen nur den fünften Teil derjenigen an der Innenfläche. Da die letztere maßgebend ist, so wird das nach außen gelegene Material sehr schlecht ausgenützt[2]).

---

[1]) Die radiale Anstrengung (Druck) beträgt an der Innenfläche nach der zweiten der Gleichungen 12

$$\max\left(-\frac{\sigma_2}{\alpha}\right) = \frac{1{,}3\cdot 10^2 - 0{,}4^2\cdot 4^2}{10^2-4^2}\cdot 1200 = 1766 \text{ kg},$$

und die achsiale Anstrengung (Zug) nach der ersten der 3 Gleichungen 11

$$\frac{\sigma_1}{\alpha} = 0{,}4\,\frac{4^2}{10^2-4^2}\cdot 1200 = 91 \text{ kg}.$$

[2]) Wenn es sich um ein Material handelt mit derart veränderlichem Dehnungskoeffizienten, daß derselbe bei wachsender Spannung zunimmt, so daß also der Stoff um so nachgiebiger ist, je stärker er angestrengt wird, wie dies z. B. bei Gußeisen zutrifft, so zeigt sich diese Ungleichmäßigkeit nicht in dem hohen Grade: an der Innenfläche fällt die Anstrengung geringer, an der Außenfläche größer aus, als die vorstehenden Gleichungen, welche Unveränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten und des Wertes m zur Voraussetzung haben, erwarten

Vergrößern wir die Wandstärke fortgesetzt, bis schließlich in der Gleichung

$$k_z = \frac{1{,}3\, r_a^2 + 0{,}4\, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\, p_i = \frac{1{,}3 + 0{,}4 \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}\, p_i$$

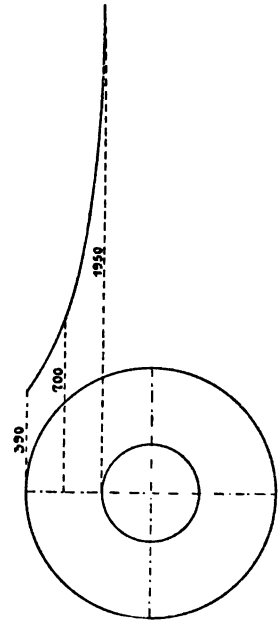


Fig. 4.

$\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2$ Null gesetzt werden darf, so ist $k_z = 1{,}3\, p_i$, unter welche Anstrengung also nicht zu gelangen ist, wie oben bereits festgestellt.

---

lassen. Bei Gußeisen kommt andererseits wieder der in § 22, Ziff. 3, festgestellte Einfluß der Gußhaut hinzu. Ist diese, geringere Nachgiebigkeit besitzende Schicht an der Innenfläche vorhanden, so muß sie die Festigkeit vermindernd wirken. Durch Bearbeitung der Innenfläche — vorausgesetzt, daß die Rücksicht auf das Dichthalten gegenüber der Flüssigkeit das Ausbohren gestattet — würde die Widerstandsfähigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen erhöht werden können.

(Vergl. in § 56 das unter Ziff. 1 b) und c) S. 519 sowie 520 Gesagte.)

Der Einfluß der etwaigen Veränderlichkeit von m ist von keiner großen Bedeutung.

Die erkannte Unvollständigkeit der Ausnützung der Widerstandsfähigkeit des Materials, welche um so bedeutender ist, je größer die Wandstärke, hat zur Konstruktion von zusammengesetzten Hohlzylindern (Ringgeschützen u. s. w.) geführt, deren Wesen sich aus folgendem ergibt.

Wir denken uns den Hohlzylinder des soeben behandelten Beispiels aus zwei Hohlzylindern bestehend:

einem inneren, für welchen $r_i = 40$ mm, $r_a = 70$ mm,
- äußeren, - - $r_i = 70$ - $r_a = 100$ -

Der äußere Zylinder sei auf den inneren (warm oder in anderer Weise) so aufgezogen, daß dieser zusammengepreßt wird; infolgedessen tritt bei dem inneren Zylinder eine nach innen wachsende Druckspannung auf. Wenn nun jetzt die gepreßte Flüssigkeit (Arbeitsflüssigkeit) den inneren Zylinder belastet, so fällt hier die Zuganstrengung um den Betrag geringer aus, welcher der Druckanstrengung entspricht, die durch das Aufziehen des äußeren Zylinders mit Pressung wachgerufen worden war. Dagegen ergibt sich die Zuganstrengung des äußeren Zylinders um denjenigen Betrag größer, welcher von dem Aufziehen auf den inneren herrührte. Zweckmäßigerweise wird man bei solchen, aus mehreren Hohlzylindern zusammengesetzten Zylindern dahin streben müssen, daß die Spannungen an den Innenflächen der einzelnen Zylinder unter Einwirkung der Flüssigkeitspressung gleich groß ausfallen.

Für im Verhältnis zum Halbmesser geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ kann mit genügender Annäherung gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den Wandungsquerschnitt angenommen werden. Dies gibt für den l langen Hohlzylinder

$$2 r_i l p_i \leq 2 s l k_z,$$

woraus

$$k_z \geq p_i \frac{r_i}{s} \qquad \text{oder} \qquad s \geq r_i \frac{p_i}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Aus der allgemeinen Gleichung 14 läßt sich diese Beziehung in folgender Weise ableiten.

Mit $m = \infty$ (d. h. die Zusammenziehung, welche ein in Richtung seiner Achse gezogener Stab senkrecht zu dieser erfährt, wird vernachlässigt) folgt zunächst

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + p_i}{k_z - p_i}} = r_i \sqrt{1 + 2\frac{p_i}{k_z - p_i}}.$$

Unter Beachtung, daß bei geringer Wandstärke p_i nur einen kleinen Bruchteil von k_z bildet,

$$r_a = \sim r_i \sqrt{1 + 2\frac{p_i}{k_z}} = \sim r_i \left(1 + \frac{p_i}{k_z}\right),$$

$$r_a - r_i = s = r_i \frac{p_i}{k_z},$$

wie oben unmittelbar entwickelt wurde.

Die Spannung σ, welche in dem senkrecht zur Achse gelegenen Querschnitt

$$\pi (r_a^2 - r_i^2)$$

des Hohlzylinders eintritt, findet sich aus

$$\pi r_i^2 p_i = \pi (r_a^2 - r_i^2) \sigma$$

zu

$$\sigma = p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = p_i \frac{r_i}{\frac{r_a + r_i}{r_i}(r_a - r_i)} = \sim \frac{1}{2} p_i \frac{r_i}{s},$$

d. h. halb so groß als die Anstrengung (nach Gleichung 16) in Richtung des Umfanges.

3. *Äußerer Überdruck p_a ($p_i = 0$).*

Wenn Flachdrücken oder Einbeulen der Wandung und bei großer Länge außerdem die in § 23 besprochene Knickung nicht zu erwarten steht, sind die Anstrengungen nach den Gleichungen 10 mit $p_i = 0$ zu berechnen. Dieselben gehen dann über in

$$\varepsilon_1 = -\frac{m-2}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a,$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{m-2}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a - \frac{m+1}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a\,\frac{1}{z^2},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{m-2}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a + \frac{m+1}{m}\,\alpha\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a\,\frac{1}{z^2}.$$

Den größten Wert erlangen die Anstrengungen $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ und $\frac{\varepsilon_3}{\alpha}$ — die Inanspruchnahme $\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$ kommt als wesentlich kleiner wie die gleichzeitige Anstrengung $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ nicht weiter in Betracht — auch hier wieder für das kleinste z, d. h. für die Innenfläche, und zwar

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = \frac{2m-1}{m}\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a = 1{,}7\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a,$$

in Richtung des Halbmessers

$$\max\left(\frac{\varepsilon_3}{\alpha}\right) = \frac{3}{m}\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a = 0{,}9\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a,$$

17)

sofern noch $m = \frac{10}{3}$ eingeführt wird. Hiernach

$$k \geqq 1{,}7\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a \quad \text{oder} \quad r_a = \frac{r_i}{\sqrt{1-1{,}7\,\frac{p_a}{k}}},$$

$$k_z \geqq 0{,}9\,\frac{r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_a \quad \text{oder} \quad r_a = \frac{r_i}{\sqrt{1-0{,}9\,\frac{p_a}{k_z}}},$$

18)

Auch hier gilt die zur Gleichung 14 gemachte Bemerkung, daß nur solche Verhältnisse möglich sind, für welche

$$p_a < \frac{k}{1{,}7} \text{ bezw. } p_a < \frac{k_z}{0{,}9}.$$

(Vergl. das unter Ziffer 2, S. 557 und 558 über den Einfluß der Veränderlichkeit des Dehnungskoeffizienten Bemerkte.)

Für verhältnismäßig geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ findet sich unter den oben ausgesprochenen Voraussetzungen und auf dem gleichen Wege, welcher zur Beziehung 16 führte,

$$k \geqq p_a \frac{r_a}{s} \quad \text{oder} \quad s \geqq r_a \frac{p_a}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Bei den Entwicklungen dieses Paragraphen blieb der etwaige, die Festigkeit des Zylindermantels unterstützende Einfluß der Zylinderböden (und zutreffendenfalls der Quernähte) unberücksichtigt. Je kürzer der Zylinder im Vergleiche zum Durchmesser ist, um so bedeutender wird unter sonst gleichen Verhältnissen dieser Einfluß sein; je größer die Länge, um so mehr wird er verschwinden. In der Mehrzahl der Fälle tritt er in den Hintergrund; wo dies nicht zutrifft, kann seine Berücksichtigung schätzungsweise unter Beachtung der Verhältnisse des gerade vorliegenden Sonderfalles dadurch erfolgen, daß die zulässige Anstrengung des Materials entsprechend höher in die Rechnung eingeführt wird.

Wenn der Hohlzylinder nicht aus dem Ganzen besteht, sondern aus einzelnen Teilen hergestellt wurde, die durch Nietung oder in anderer Weise verbunden sind, so wird die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen sein.

Die im vorstehenden gegebene Berechnungsweise von Zylinderwandstärken setzte voraus, daß die Flüssigkeitspressung über den ganzen Umfang gleich groß ist. Die Wirklichkeit kann unter Umständen recht erheblich hiervon abweichen, so z. B. bei sehr weiten wagerechten Rohrleitungen für Wasser, in denen der Druck von der Sohle nach dem Scheitel hin verhältnismäßig bedeutend abnimmt, und die nur an der tiefsten Stelle gelagert sind u. s. w. Solche Fälle bedürfen besonderer Behandlung[1]).

Die Ermittlung der Wandstärken solcher Hohlzylinder, bei welchen unter Einwirkung des äußeren Überdruckes ein Flach-

[1]) Vergl. die Arbeit von Forchheimer in der Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines 1904, S. 133 u. f.

drücken (Einknicken, Einbeulen) der Wandung zu befürchten steht, gehört bei dem derzeitigen Stand dieser Aufgabe sowie in Anbetracht der besonderen Einflüsse, welche dabei zu berücksichtigen sind, an diejenigen Stellen, wo die betreffenden Gegenstände, zu denen solche Hohlzylinder gehören, behandelt werden[1]).

§ 59. Hohlkugel.

Mit den Bezeichnungen

r_i der innere Halbmesser der Hohlkugel,
r_a - äußere - - -
k_z die zulässige Zuganstrengung,
k - - Druckanstrengung

finden sich auf demselben Wege, welcher in § 58 eingeschlagen worden ist, und für $m = \frac{10}{3}$ die folgenden Beziehungen.

1. Innerer Überdruck p_i.

Die größte Anstrengung tritt auch hier an der Innenfläche ein:

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$k_z \geqq \frac{\frac{m+1}{2m} r_a^3 + \frac{m-2}{m} r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i = \frac{0{,}65\, r_a^3 + 0{,}4\, r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i,$$

in Richtung des Halbmessers

$$k \geqq \frac{\frac{m+1}{m} r_a^3 - \frac{m-2}{m} r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i = \frac{1{,}3\, r_a^3 - 0{,}4\, r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i. \qquad 1)$$

Naturgemäß sind in denselben nur solche Verhältnisse möglich, für welche sich endliche Werte von r_a ergeben.

[1]) Über die Berechnung der äußerem Überdrucke ausgesetzten Flammrohre von Dampfkesseln findet sich Näheres in des Verfassers Maschinenelementen 1891/92, S. 147 u. f., 1903 (9. Aufl.), S. 208 u. f.

Für im Verhältnis zum Halbmesser geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ ergibt die aus

$$\pi r_i^2 p_i \leqq \sim k_z 2 \pi r_i s$$

folgende Beziehung

$$k_z \geqq \frac{1}{2} p_i \frac{r_i}{s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} r_i \frac{p_i}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

die Anstrengung bezw. Wandstärke genügend genau.

2. *Äußerer Überdruck p_a ($p_i = 0$).*

Sofern Einknicken (Einbeulen) der Wandung nicht zu befürchten steht[1]), gilt für die Anstrengung, die auch hier wieder an der Innenfläche den Größtwert erreicht,

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$k \geqq \frac{3(m-1)}{2m} \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a = 1{,}05 \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a,$$

in Richtung des Halbmessers

$$k_z \geqq \frac{3}{m} \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a \qquad = 0{,}9 \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a. \quad . \quad 3)$$

Für verhältnismäßig geringe Wandstärke wie oben

$$k \geqq \frac{1}{2} p_a \frac{r_a}{s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} r_a \frac{p_a}{k} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Die zwei letzten Sätze von § 58 sind auch sinngemäß auf die Hohlkugel zu übertragen und demgemäß zu beachten.

---

[1]) Über die Berechnung von kugelförmigen Wandungen, bei denen Einbeulen zu befürchten steht, s. des Verfassers Arbeit „Die Widerstandsfähigkeit kugelförmiger Wandungen gegenüber äußerem Überdruck“ in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1902, S. 333 u. f. oder Heft 6 der „Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen“.

Siebenter Abschnitt.

Plattenförmige Körper.

Die Erörterung der Widerstandsfähigkeit ebener Platten und Wandungen gegenüber einer gleichförmigen Belastung, insbesondere durch Flüssigkeitsdruck, oder gegenüber senkrecht zu ihnen wirkenden Einzelkräften führt auf eine der schwächsten Stellen der Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Eine ziemlich streng wissenschaftliche Ableitung der Inanspruchnahme, welche die am Umfange gestützte oder eingespannte Platte bei der bezeichneten Belastung erfährt, ist nach Wissen des Verfassers nur für den Fall der ebenen kreisförmigen Platte, der Scheibe, unter gewissen Voraussetzungen gegeben worden, die übrigens in den meisten Fällen zu einem erheblichen Teile mit den tatsächlichen Verhältnissen in Widerspruch stehen, wie später näher auszuführen sein wird (§ 60, Ziff. 2).

Für die elliptische Platte fehlte es trotz ihres häufigen Vorkommens als Mannlochdeckel u. s. w. überhaupt an einer Beziehung zwischen der Flüssigkeitspressung, den Abmessungen und der Materialanstrengung.

Die zur Bestimmung der Inanspruchnahme rechteckiger Platten vorliegenden Angaben beruhen auf Entwicklungen, die zwar zunächst den streng wissenschaftlichen Weg einschlagen, sich jedoch im Verlaufe der Rechnung zu vereinfachenden Annahmen gezwungen sehen, welche die Zuverlässigkeit der Ergebnisse beeinträchtigen. Überdies muß von wesentlichen der gemachten Voraussetzungen das gleiche gesagt werden, was in dieser Hinsicht bei der kreisförmigen Platte bemerkt wurde. Der zur Lösung der Aufgabe nötige Aufwand an mathematischen Hilfsmitteln ist trotzdem und ganz abgesehen von der Umfänglichkeit der Rechnungen ein sehr bedeutender und geht recht erheblich über das Maß

hinaus, welches dem zwar wissenschaftlich gebildeten, jedoch mitten in der Ausführung stehenden Ingenieur durchschnittlich noch geläufig ist.

Auf andere als ebene Platten erstrecken sich diese Betrachtungen überhaupt nicht, also nicht auf Deckel von den Formen, wie sie z. B. die Figuren 1 bis 5 wiedergeben. Querschnitte

Fig. 1.

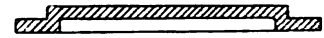


Fig. 2.

Fig. 3.

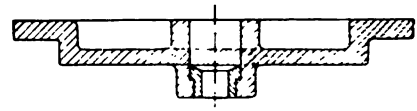


Fig. 4.

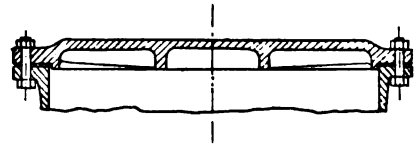


Fig. 5.

dieser Art aber sind bei den in der Wirklichkeit vorkommenden Deckeln u. dergl. weit häufiger zu finden als das einfache Rechteck.

Unter diesen Umständen erscheint die Sicherheit, mit welcher der Konstrukteur die Inanspruchnahme von Platten und Wandungen der in Frage stehenden Art tatsächlich feststellen kann, durchschnittlich recht gering; in nicht wenigen Fällen kann überhaupt nicht von einer Sicherheit, sondern es muß vielmehr von einer Unsicherheit gesprochen werden, welche bezüglich der Widerstandsfähigkeit solcher Konstruktionsteile besteht. Dieser Zustand mußte um so drückender empfunden werden, als auf manchen Gebieten des Maschineningenieurwesens (Dampfkessel-, Dampfmaschinenbau u. s. w.) Aufgaben der in Frage stehenden Art sich sehr häufig zu bieten und hier überdies eine hohe, auch auf Menschenleben sich erstreckende Verantwortlichkeit einzuschließen pflegen.

Bei dieser Sachlage hat sich Verfasser zur Befriedigung der vorliegenden überaus dringlichen Bedürfnisse veranlaßt gesehen, einen Näherungsweg einzuschlagen, wie er sich aus dem Späteren

(§ 60, Ziff. 4, § 61, § 62, § 63) ergeben wird. Die erste dahingehende Veröffentlichung findet sich in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1890, S. 1041 u. f.

§ 60. Ebene kreisförmige Platte (Scheibe).

1. Ermittlung der Anstrengung auf dem Wege der Rechnung.

Die Behandlung dieser Aufgabe ist 1860 von Winkler und 1866 von Grashof der Öffentlichkeit übergeben worden. Der Gang der Entwicklungen ist bei beiden im wesentlichen derselbe.

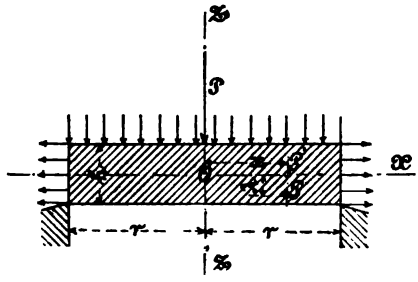


Fig. 6.

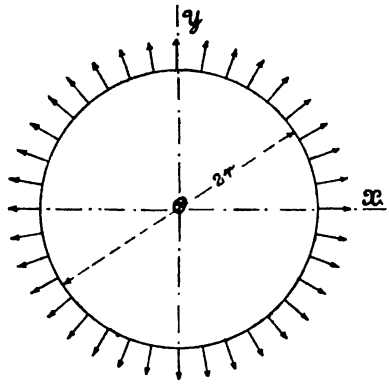


Fig. 7.

Die folgenden Rechnungen geben die Lösung wieder, wie sie sich in Grashofs Theorie der Elastizität und Festigkeit 1878, S. 329 u. f. findet.

Die Scheibe von der Stärke h wird aufgefaßt als am Umfange vom Halbmesser r frei aufliegend, wie in Fig. 6 dargestellt, oder als daselbst eingespannt, wie Fig. 8 wiedergibt, und in bezug auf ihre Belastung angenommen, daß diese im allgemeinen bestehe

aus einer Einzelkraft P, welche im Mittelpunkte angreifend senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist,

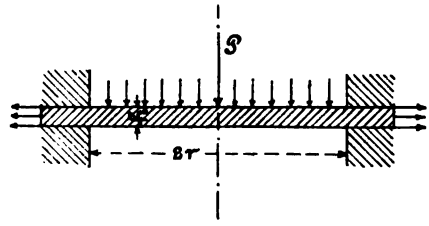


Fig. 8.

aus einem gleichmäßig über die Oberfläche πr^2 verteilten Normaldruck von der Größe p auf die Flächeneinheit und

aus einer auf die kreiszylindrische Mantelfläche $2\pi rh$ gleichmäßig verteilten, radial auswärts wirkenden Kraft, deren Größe p_1 auf die Flächeneinheit beträgt.

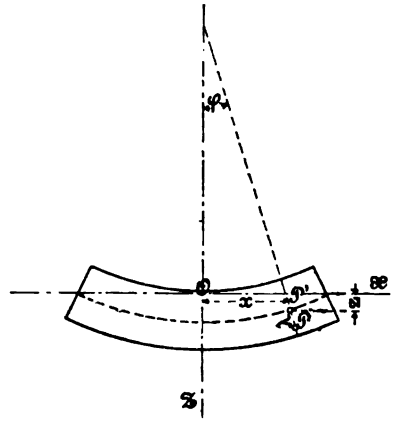


Fig. 9.

Die Scheibe, welche zunächst noch nicht belastet sei, denkt man sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen x- und y-Achse in der Mittelebene liegen, während die z-Achse senkrecht dazu (positiv nach unten) gerichtet ist (Fig. 6 und 7).

Der in der xz-Ebene gelegene beliebige Punkt P der Scheibe erscheint durch die Abszisse x und den Abstand λ von der ursprünglich ebenen Mittelfläche bestimmt. Unter Einwirkung der Belastung geht die letztere in eine Rotationsfläche über (Fig. 9), deren Meridianlinie durch die Koordinaten x und z festgelegt wird.

Werden nun für den in Betracht gezogenen Punkt P bezeichnet

mit σ_x die Normalspannung und mit ε_x die Dehnung in Richtung der x-Achse,

mit σ_y die Normalspannung und mit ε_y die Dehnung in Richtung der y-Achse,

mit σ_z die Normalspannung und mit ε_z die Dehnung in Richtung der z-Achse,

so ergeben sich auf demselben Wege, auf welchem die Beziehungen 3, § 58, gefunden wurden, die Werte

$$\sigma_x = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right),$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right).$$

Unter der Voraussetzung, daß die Stärke h der Scheibe gering ist gegenüber $2r$, kann die Spannung σ_z nur klein ausfallen im Vergleich zu σ_x und σ_y Demgemäß vernachlässigt man σ_z, d. h. setzt

$$\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2} = 0,$$

woraus folgt

$$\varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m-1}$$

und erhält hiermit

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{(m-1)\,\beta}\,(m\,\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{2}{(m-1)\,\beta}\,(\varepsilon_x + m\,\varepsilon_y) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ 1)$$

Bedeuten für den Punkt P' der Mittelfläche, welcher um x von der z-Achse absteht (Fig. 6, 9),

ε_x' und ε_y' die nach der Richtung der x- bezw. y-Ache genommenen Dehnungen,

ϱ den Krümmungshalbmesser der Meridianlinie,

ϱ_1 - - - Mittelfläche in dem dazu senkrechten Normalschnitt,

welche Radien als sehr groß gegenüber den Abmessungen der Scheibe vorausgesetzt werden,

so ist mit der Annäherung, mit welcher die für gerade stabförmige Körper ermittelte Gleichung 1, § 16, nach hier übertragen werden darf,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \frac{\lambda}{\varrho} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_y' + \frac{\lambda}{\varrho_1}.$$

Da nach Gleichung 14, § 16,

$$\frac{1}{\varrho} = \sim -\frac{d^2z}{dx^2}$$

und ferner ϱ_1 gleich der Länge der Normalen bis zum Durchschnitt mit der Achse der Rotationsfläche ist, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 9

$$\varrho_1 = \frac{x}{\sin\varphi} = \sim \frac{x}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{x}{-\frac{dz}{dx}},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \sim -\frac{1}{x}\frac{dz}{dx},$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x' - \lambda \frac{d^2z}{dx^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y' - \frac{\lambda}{x}\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

und nach Einführung dieser Werte in die Gleichungen 1

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{ m\,\varepsilon_x' + \varepsilon_y' - \lambda\left(m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right\} \\ \sigma_y &= \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{ \varepsilon_x' + m\,\varepsilon_y' - \lambda\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dz}{dx}\right)\right\} \end{aligned}\right\}. \quad 3)$$

Die Spannungen σ_x' und σ_y' in dem Punkte P' der Mittelfläche, welche sich aus den Gleichungen 3 für $\lambda = 0$ ergeben, rühren — unter den gemachten Voraussetzungen — nur von der Spannung p_1 am Umfangsmantel der Scheibe her, somit

$$\sigma_x' = \sigma_y' = p_1$$

und infolgedessen auch aus den Gleichungen 3 mit $\lambda = 0$

$$\sigma_x' = \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{ m\,\varepsilon_x' + \varepsilon_y' \right\} = p_1$$

$$\sigma_y' = \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{ \varepsilon_x' + m\,\varepsilon_y' \right\} = p_1,$$

folglich

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_y' = \alpha\,\frac{m-1}{m}\,p_1.$$

Hiermit liefern die Gleichungen 2

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha\,p_1\,\frac{m-1}{m} - \lambda\frac{d^2z}{dx^2} \\ \varepsilon_y &= \alpha\,p_1\,\frac{m-1}{m} - \frac{\lambda}{x}\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2\,a)$$

und die Gleichungen 3

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= p_1 - \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\,\lambda\left(m\,\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dz}{dx}\right) \\ \sigma_y &= p_1 - \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\,\lambda\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\,\frac{dz}{dx}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 4)$$

Vom Punkte P ausgehend denkt man sich ein Körperelement, Fig. 10, mit den Querschnittsabmessungen dx und $d\lambda$ konstruiert

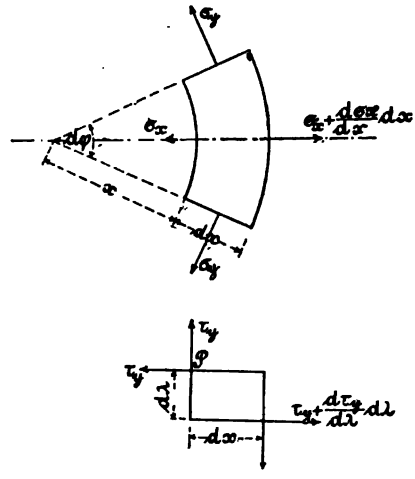


Fig. 10.

und herausgeschnitten, sodann die auf dasselbe wirkenden Spannungen eingetragen, wobei zu berücksichtigen ist, daß Schubspannungen nur da auftreten können, wo Winkeländerungen (Gleitungen) stattfinden, und die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_x\, x\, d\varphi\, d\lambda + 2\,\sigma_y \sin\frac{d\varphi}{2}\, d\lambda\, dx + \tau_y\left(x + \frac{dx}{2}\right) d\varphi\, dx$$

$$- \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}\,dx\right)(x + dx)\, d\varphi\, d\lambda - \left(\tau_y + \frac{d\tau_y}{d\lambda}\,d\lambda\right)\left(x + \frac{dx}{2}\right) d\varphi\, dx = 0$$

aufgestellt. Aus derselben folgt

$$\sigma_y - \sigma_x - x\frac{d\sigma_x}{dx} - x\frac{d\tau_y}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d\tau_y}{d\lambda} = \frac{\sigma_y}{x} - \frac{\sigma_x + x\dfrac{d\sigma_x}{dx}}{x} = \frac{\sigma_y}{x} - \frac{1}{x}\frac{d(x\,\sigma_x)}{dx}.$$

Nach Einführung der Gleichung 4

$$\frac{d\tau_y}{d\lambda} = \frac{1}{x}\left[p_1 - \frac{m}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\lambda\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dz}{dx}\right) - p_1\right.$$

$$\left. + \frac{m}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\lambda\left(m\,x\frac{d^3z}{dx^3} + m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\right)\right],$$

$$\frac{d\tau_y}{d\lambda} = \frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\lambda\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right)$$

und durch Integration in bezug auf die Veränderliche λ

$$\tau_y = \frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right) + C.$$

Die Konstante C ist bestimmt dadurch, daß für $\lambda = \pm\dfrac{h}{2}$ die Schubspannung $\tau_y = 0$, somit

$$\tau_y = -\frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\frac{h^2 - 4\lambda^2}{8}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right). \quad 5)$$

Das Vorzeichen von τ deutet an, daß der ursprünglich rechte Winkel, an dessen Kanten in Fig. 10 die Schubspannungen eingetragen sind, in einen stumpfen übergeht, diese also nicht in den eingezeichneten, sondern in den entgegengesetzten Richtungen wirken.

Um z als Funktion von x zu erhalten, denkt man sich eine Scheibe vom Halbmesser x, Fig. 11, herausgetrennt. Auf dieselbe wirkt in Richtung der Scheibenachse die Belastung $P + \pi x^2 p$, welche durch die Schubkräfte übertragen werden muß, somit

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_y \, . \, 2\pi x \, d\lambda = P + \pi x^2 p,$$

wobei die Integration lediglich in bezug auf λ zu erfolgen hat. Nach Einführung des absoluten Wertes von τ_y aus Gleichung 5 ergibt sich

$$2\pi x \frac{m^2}{m^2-1} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{h^2 - 4\lambda^2}{8} d\lambda$$

$$= P + \pi x^2 p$$

und somit in

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} = 6 \frac{m^2-1}{m^2} \alpha \frac{1}{h^3} \left(p x + \frac{P}{\pi x} \right) \quad 6)$$

die Differentialgleichung der Meridianlinie.

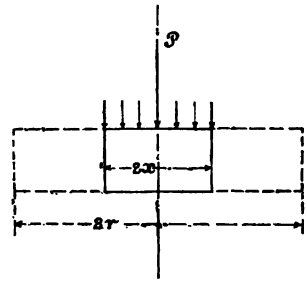


Fig. 11.

Die Einsetzung des Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Gleichung in Gleichung 5 ergibt für die absolute Größe der Schubspannung

$$\tau_y = \frac{3}{4}\,\frac{h^2 - 4x^2}{h^3}\left(p\,x + \frac{P}{\pi\,x}\right). \quad \ldots \quad 7)$$

Wie ersichtlich, würde τ_y für $x = 0$, d. h. für die Mitte der Scheibe, unendlich groß werden, sofern $P > 0$ ist. Dies verlangt, daß die Einzellast P nicht als im Mittelpunkt der Scheibe zusammengedrängt angreifend, sondern als auf eine mit der Scheibenoberfläche konzentrische Kreisfläche vom Halbmesser r_0 verteilt gedacht wird, wobei r_0 natürlich klein gegenüber r anzunehmen ist. An die Stelle der Kreisfläche πr_0^2 kann auch der Kreisumfang $2\,\pi\,r_0$ treten.

Mit den abgekürzten Bezeichnungen

$$\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{6}{h^3}\,p = a, \qquad \frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{6}{h^3}\,\frac{P}{\pi} = b$$

geht Gleichung 6 über in

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\,\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\,\frac{dz}{dx} = a\,x + \frac{b}{x},$$

und da die linke Seite gleich

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dz}{dx}\right)\right\},$$

so ist auch

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dz}{dx}\right)\right\} = a\,x + \frac{b}{x},$$

woraus folgt

$$\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dz}{dx}\right) = \frac{a}{2}\,x^2 + b\,ln\,x + c_1,$$

$$x\,\frac{dz}{dx} = \frac{a}{8}\,x^4 + b\int x\,ln\,x\,dx + \frac{c_1}{2}\,x^2 + c_2,$$

und wegen

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{8}x^3 + \frac{b}{4}x(2 \ln x - 1) + \frac{c_1}{2}x + \frac{c_2}{x} \quad . \quad . \quad 8)$$

Somit

$$z = \frac{a}{32}x^4 + \frac{b}{4}x^2(\ln x - 1) + \frac{c_1}{4}x^2 + c_2 \ln x + c_3 \quad . \quad 9)$$

Hiernach finden sich für die in den Gleichungen 4 auftretenden Werte

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} &= \frac{a}{8}x^2 + \frac{b}{4}(2 \ln x - 1) + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{x^2}, \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{3}{8}ax^2 + \frac{b}{4}(2 \ln x + 1) + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 10)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten ist zunächst zu beachten, daß für $x = 0$ auch $\frac{dz}{dx} = 0$, d. h., daß die Tangente an der Meridianlinie im Scheitel derselben wagrecht sein muß, also nach Gleichung 8

$$0 = \frac{b}{2}(x \ln x) + \frac{c_2}{x} \qquad \text{für } x = 0. \quad .$$

Da

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

und dieser Wert für $x = 0$ zu $\frac{\infty}{\infty}$ wird, so ist für Zähler und Nenner der erste Differentialquotient zu bilden:

$$\frac{b}{2}\left[\frac{\frac{d}{dx}(ln\,x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}\right]_{x=0} = \frac{b}{2}\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0} = \frac{b}{2}(x)_{x=0} = 0.$$

Hiermit

$$0 = 0 + \left(\frac{c_2}{x}\right)_{x=0},$$

was nur durch $c_2 = 0$ ermöglicht wird.

Ist die Scheibe am Rande nur gestützt, also lose aufliegend, so muß für alle Punkte des Umfangsmantels der Scheibe, d. h. für $x = r$ und für jeden möglichen Wert von λ $\sigma_x = p_1$ sein. Nach der ersten der Gleichungen 4 ist das nur möglich, wenn

$$m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = 0,$$

woraus nach Einführung der rechten Seiten der Gleichungen 10 folgt

$$c_1 = -\frac{1}{4}\frac{3m+1}{m+1}\,a\,r^2 - b\left(ln\,r + \frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right). \quad . \quad 11)$$

Ist die Scheibe am Rande eingespannt, so daß die x-Achse an der Befestigungsstelle Tangente an der Meridianlinie ist, Fig. 12,

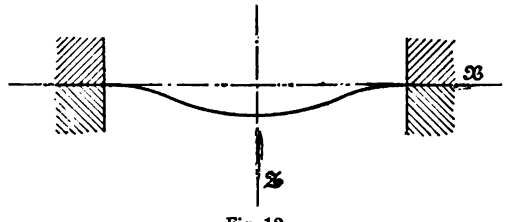


Fig. 12.

(vergl. hierüber auch § 53), so muß für $x = r$ $\frac{dz}{dx} = 0$ sein, somit nach Gleichung 8, da $c_2 = 0$,

$$0 = \frac{a}{8} r^3 + \frac{b}{4} r (2 \ln r - 1) + \frac{c_1}{2} r,$$

$$c_1 = -\frac{a}{4} r^2 - b \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad \ldots \quad 12)$$

a) Die Scheibe ist nur durch p gleichmäßig belastet;

$$P = 0.$$

Mit $P = 0$ wird

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} \frac{P}{\pi} = 0.$$

Die Konstante c_3 der Gleichung 9 bestimmt sich dadurch, daß für $x = r$ $z = 0$ sein muß, also, da $c_2 = 0$ (S. 577), aus

$$0 = \frac{a}{32} r^4 + \frac{c_1}{4} r^2 + c_3$$

zu

$$c_3 = -\frac{a}{32} r^4 - \frac{c_1}{4} r^2.$$

Damit geht die Gleichung 9 der Meridianlinie über in

$$z = -\frac{a}{32} (r^4 - x^4) - \frac{c_1}{4} (r^2 - x^2) = -\left(a \frac{r^2 + x^2}{8} + c_1 \right) \frac{r^2 - x^2}{4}. \quad 13)$$

α) Die Scheibe liegt am Rande lose auf.

Gleichung 11 ergibt mit $b = 0$

$$c_1 = -\frac{1}{4} \frac{3m + 1}{m + 1} a r^2.$$

Durch Einführung dieser Größe und von

$$a = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} p$$

in Gleichung 13 liefert diese

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \left(\frac{5m + 1}{m + 1} r^2 - x^2 \right) (r^2 - x^2). \quad . \quad 14)$$

Hieraus folgt die Durchbiegung in der Mitte für $x = 0$

$$z' = \frac{3}{16} \frac{(m - 1)(5m + 1)}{m^2} \alpha p \frac{r^4}{h^3} \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$z' = 0{,}7 \alpha p \frac{r^4}{h^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Für $p_1 = 0$ gehen die Gleichungen 2a über in

$$\varepsilon_x = -\lambda \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \lambda \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 - 3x^2 \right),$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\lambda}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \lambda \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 - x^2 \right).$$

Diese Dehnungen erlangen ihren größten Wert für $x = 0$ (Mitte der Scheibe) und für $\lambda = \pm \frac{h}{2}$ (äußerste Fasern). Diese Höchstwerte sind überdies gleich groß, nämlich

$$\max(\varepsilon_x) = \pm \frac{3}{8} \frac{(m - 1)(3m + 1)}{m^2} \alpha \left(\frac{r}{h} \right)^2 p = \max(\varepsilon_y).$$

An den bezeichneten Stellen sind die Schubspannungen nach Gleichung 7 gleich Null, somit ist $\max \left(\frac{\varepsilon_x}{\alpha} \right)$ die größte Anstren-

gung und demgemäß mit k_b als zulässiger Biegungsinanspruchnahme

$$k_b \geqq \pm \frac{3}{8} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Mit $m = \frac{10}{3}$ wird

$$k_b \geqq \pm 0{,}87 \left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

β) Die Scheibe ist am Umfange eingespannt.

Gleichung 12 liefert mit $b = 0$

$$c_1 = -\frac{9}{4} r^2.$$

In ganz gleicher Weise wie unter *α*) ergibt sich hier die Gleichung der Meridianlinie

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2-1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} (r^2 - x^2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

und hieraus die Durchbiegung in der Mitte ($x = 0$)

$$z' = \frac{3}{16} \frac{m^2-1}{m^2} \alpha p \frac{r^4}{h^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$z' = 0{,}17\, \alpha p \frac{r^4}{h^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Aus den Gleichungen 2a folgt, da

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} (r^2 - x^2),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{p}{h^3}\,(r^2-3x^2),$$

$$\frac{\varepsilon_x}{\alpha} = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p}{h^3}\,\lambda\,(r^2-3x^2),$$

$$\frac{\varepsilon_y}{\alpha} = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p}{h^3}\,\lambda\,(r^2-x^2).$$

Ist, wie vorausgesetzt, $p_1 \geqq 0$, so erlangt $\frac{\varepsilon_x}{\alpha}$ zwei größte

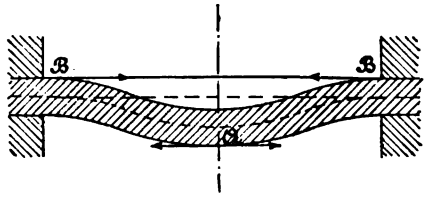


Fig. 13.

Werte: den einen für $x = 0$ und $\lambda = +\frac{h}{2}$ (Mitte der Scheibe, unterste Faser, bei A, Fig. 13) und den anderen für $x = r$ und $\lambda = -\frac{h}{2}$ (Einspannstelle, oberste Faser, bei B, Fig. 13). Der erstere beträgt

$$\max\left(\frac{\varepsilon_x}{\alpha}\right)_1 = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{8}\,\frac{m^2-1}{m^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 p,$$

der letztere

$$\max\left(\frac{\varepsilon_x}{\alpha}\right)_2 = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 p.$$

Dieser ist der größere[1]); somit, da die Schubspannungen nach Gleichung 7 für $\lambda = \pm\frac{h}{2}$ Null werden,

[1]) In Wirklichkeit pflegt die Einspannung nur eine unvollkommene zu sein. Durch Nachgiebigkeit des befestigten Scheibenrandes (gegenüber dem Zustande

$$k_b \geqq \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad \ldots \quad 22)$$

Für $p_1 = 0$ wird

$$k_b \geqq \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$k_b \geqq 0{,}68 \left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad \ldots \ldots \quad 23)$$

b) Die Scheibe liegt am Rande frei auf und ist nur durch die in der Mitte angreifende Kraft P belastet.

Die Gleichung der Meridianlinie ergibt sich in gleicher Weise, wie unter a ermittelt, bei Beachtung, daß

$$a = \frac{m^2-1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} p = 0 \text{ (wegen } p = 0), \; c_2 = 0,$$

und

$$\text{für } x = r \quad z = 0$$

aus Gleichung 9 zu

$$z = -\frac{b}{4}\left\{ r^2 (ln\, r - 1) - x^2 (ln\, x - 1) \right\} - \frac{c_1}{4}(r^2 - x^2).$$

---

vollkommener Einspannung) nimmt die Anstrengung der Scheibe an dem Rande ab, dagegen diejenige in der Scheibenmitte zu. Hierbei steigt die letztere für $p_1 = 0$ von dem Werte $\frac{3}{8} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$, gültig für vollkommene Einspannung, bis zu dem durch Gleichung 17 bestimmten Betrag, gültig für Freiaufliegen, während die Beanspruchung am Umfange von dem Werte $\frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$ bis auf Null sinkt. Für eine gewisse Nachgiebigkeit an der Befestigungsstelle wird die Anstrengung der Scheibe am geringsten ausfallen (vergl. S. 480 u. f.).

Nach Einführung von

$$c_1 = -b\left(ln\, r + \frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right)$$

und

$$b = \frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{6}{h^3}\,\frac{P}{\pi}$$

wird

$$z = \frac{3}{4\pi}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{P}{h^3}\left\{2\,x^2 ln\,\frac{x}{r} + \frac{3m+1}{m+1}(r^2-x^2)\right\}. \quad 24)$$

Somit die Durchbiegung in der Mitte der Platte ($x = 0$)

$$z' = \frac{3}{4\pi}\,\frac{(m-1)(3m+1)}{m^2}\,\alpha\,P\,\frac{r^2}{h^3} \quad . \; . \; . \quad 25)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$z' = 0{,}55\,\alpha\,P\,\frac{r^2}{h^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 26)$$

Die Gleichungen 2a führen mit den Gleichungen 10 sowie unter Beachtung, daß $p_1 = 0$, $c_2 = 0$ und c_1 durch Gleichung 11 bestimmt ist, sowie unter Berücksichtigung der Bedeutung von b zu

$$\varepsilon_x = \frac{3}{\pi}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{P}{h^3}\left(ln\,\frac{r}{x} - \frac{1}{m+1}\right)\lambda,$$

$$\varepsilon_y = \frac{3}{\pi}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{P}{h^3}\left(ln\,\frac{r}{x} + \frac{m}{m+1}\right)\lambda.$$

Wird gemäß der Bemerkung zu Gleichung 7 (S. 575) die Kraft P auf der Kreislinie $2\pi r_0$ — in Wirklichkeit auf der dieser Linie entsprechenden schmalen Kreisringfläche — gleichmäßig verteilt angenommen, wobei r_0 klein gegen r, immerhin aber so groß vorausgesetzt ist, daß der größte Wert der aus Gleichung 7 folgenden Schubspannung, d. i. wegen $\lambda = 0$ $p = 0$ und $x = r_0$,

$$\tau_{max} = \frac{3}{4\pi}\frac{P}{h r_0} \quad \ldots \ldots \quad 27)$$

das höchstens noch für zulässig erachtete Maß nicht überschreitet, so ergeben sich die Größtwerte von ε_x und ε_y für

$$x = r_0 \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{h}{2},$$

und zwar ist

$$\max\left(\frac{\varepsilon_y}{\alpha}\right) = \frac{3}{2\pi}\frac{m^2-1}{m^2}\left(ln\,\frac{r}{r_0} + \frac{m}{m+1}\right)\frac{P}{h^2}$$

die größere der beiden Anstrengungen[1]); somit, da die Schubspannungen nach Gl. 7 für $\lambda = \pm\frac{h}{2}$ Null werden,

$$k_b \geqq \frac{3}{2\pi}\frac{m^2-1}{m^2}\left(ln\,\frac{r}{r_0} + \frac{m}{m+1}\right)\frac{P}{h^2}. \quad . \quad 28)$$

Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, daß die der Schubspannung Gl. 27 entsprechende Dehnung nicht eine größere Anstrengung liefert, was im Falle vollkommener Gleichartigkeit des Materials darauf hinauskommt, daß

$$\frac{3}{4\pi}\frac{P}{h r_0}\frac{m+1}{m} \leqq \max\left(\frac{\varepsilon_y}{\alpha}\right). \quad . \quad . \quad . \quad 29)$$

Diese Voraussetzung wird erfüllt sein, wenn die Scheibenstärke h, die nach Gl. 28 die Anstrengung mit der zweiten Potenz beeinflußt, verhältnismäßig klein gegenüber r ist, welche Annahme der ganzen Entwicklung dieses Paragraphen zugrunde liegt (vergl. S. 569).

Gl. 27 bezw. 29 ermöglicht übrigens in jedem Falle eine Prüfung.

---

[1]) Streng genommen, wäre noch die Formänderung und die Anstrengung innerhalb des mittleren Teiles der Scheibe, entsprechend dem Durchmesser $2r_0$ zu untersuchen; hierauf sei zunächst verzichtet.

Mit $m = \frac{10}{3}$ geht Gl. 28 über in

$$k_b \geqq 0{,}334 \left(1{,}3\, ln \frac{r}{r_0} + 1\right) \frac{P}{h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

2. Vergleichung der Voraussetzungen, welche bei den unter Ziff. 1 durchgeführten Rechnungen gemacht worden sind, mit den tatsächlichen Verhältnissen[1]).

In den weitaus meisten Fällen der Verwendung plattenförmiger Körper im Maschinenbau handelt es sich um die Widerstandsfähigkeit gegenüber Flüssigkeitsbelastung. Die Platten müssen alsdann in der Regel, damit sie abdichten, kräftig gegen die Dichtungsfläche gepreßt werden. Sie liegen also keinesfalls lose auf ihrem Widerlager auf, können auch häufig nicht als einfach eingespannt aufgefaßt werden, sind vielmehr meist eigenartig befestigt. Betrachten wir beispielsweise die Scheibe, welche in Fig. 14 ein

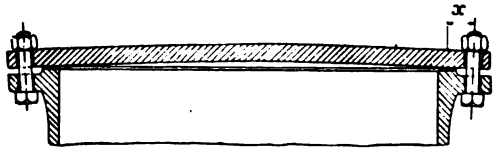


Fig. 14.

zylindrisches Hohlgefäß verschließt, so erkennen wir sofort, daß, noch bevor die Flüssigkeitspressung wirkt, schon durch das Anziehen der Flanschenschrauben die Scheibe sich wölben muß, und zwar umsomehr, je größer der Abstand x der Schrauben von der

[1]) Wie S. 567 bemerkt, entsprechen die unter Ziff. 1 gegebenen Entwicklungen der von Grashof in seiner bekannten scharfen und klaren Weise aufgebauten — erstmals vor rund 40 Jahren veröffentlichten — Berechnung der kreisförmigen Platte. In der „Festigkeitslehre" von Föppl, 1900, S. 273 u. f. ist grundsätzlich in gleicher Weise vorgegangen, jedoch zu einem Teile ein etwas anderer Gang der Rechnung — unter Weglassung der radialen Belastung p_1 am Scheibenumfang — gewählt. Die wesentlichen Voraussetzungen und die Endergebnisse der Rechnung sind die gleichen wie bei Grashof.

Vergl. auch die S. 591 genannten Arbeiten von Ensslin.

Dichtungsstelle, d. h. von derjenigen Umfangslinie ist, in welcher der Widerlagsdruck des Dichtungsringes zusammengedrängt angenommen werden darf. Die Scheibe wird also bereits auf Biegung beansprucht, noch ehe eine Flüssigkeitspressung in Tätigkeit getreten ist. Diese Inanspruchnahme kann bei kräftigem Anziehen der Schrauben unter Umständen schon allein die zulässige Anstrengung des Materials überschreiten.

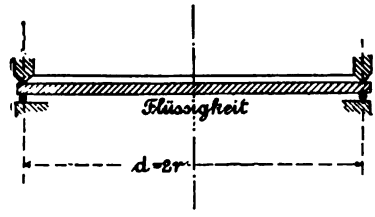


Fig. 15.

Aber selbst dann ist die Sachlage anders, als die Rechnung voraussetzt, wenn ein solcher Hebelarm x nicht vorhanden wäre, wie z. B. im Falle der Fig. 15, welche die vom Verfasser in seinem Versuchsapparat zur Prüfung ebener Platten angewendete Befestigungsweise zeigt[1]). Die Scheibe liegt hier unten (Seite der gepreßten Flüssigkeit) auf einem Dichtungsring von weichem Kupfer (etwa 8 mm stark) und stützt sich oben gegen eine etwa 2,5 mm breite Ringfläche von dem gleichen mittleren Durchmesser wie der Kupferring. Durch Schrauben wird das Oberteil des Apparates gegen das Unterteil so stark gepreßt, daß die Abdichtung gesichert ist. Unter Einwirkung der Flüssigkeitspressung biegt sich die Scheibe durch; dabei sucht sie auf dem Dichtungsringe einerseits sowie auf dem Widerlager andererseits zu gleiten und gleitet tatsächlich (vergl. § 46, Ziff. 1). Hiermit aber werden Kräfte in den Berührungsflächen zwischen Dichtungsring und Scheibe sowie zwischen dieser und dem Widerlager wachgerufen, die in der Regel entgegengesetzt gerichtet sind und meist auch von sehr verschiedener Größe sein werden. Diese Kräfte liefern für die Mittelfläche der Scheibe im allgemeinen radial

[1]) Vergl. hierüber die in § 64 genannte Schrift oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1890, S. 1041 u. f. oder Abhandlungen und Berichte 1897, S. 111 u. f.

wirkende Kräfte sowie Formänderung und Biegungsanstrengung beeinflussende Momente. Diese Momente, unter Umständen, welche die Regel zu bilden pflegen, von ganz erheblicher Bedeutung, sind bei den Entwicklungen unter Ziff. 1, a, α, um die es sich hier handelt, vollständig außer acht gelassen. Je größer die Kraft ist, mit welcher die Scheibe zum Zwecke der Abdichtung angepreßt wird, um so bedeutender werden — unter sonst gleichen Verhältnissen — die erwähnten Momente sein. Hierbei nimmt die Oberflächenbeschaffenheit der Scheibe, des Widerlagers und des Dichtungsringes Einfluß (vergl. § 46, Ziff. 1, insbesondere das über den Wert μ Gesagte).

Auch der Umstand kann Einfluß erlangen, daß die Scheibe — Fig. 6, S. 567 — mit ihrem Umfange über das Widerlager hinausreicht, einmal insofern, als durch das überstehende Material die Widerstandsfähigkeit der Scheibe erhöht wird, sodann bei Belastung der über das Widerlager hinausragenden Ringfläche dadurch, daß sich der Charakter der Stützung über dem Widerlager ändert, indem bei ausreichender Größe der Überragung die Scheibe aus dem Zustande der einfachen Stützung in denjenigen des Eingespanntseins übergeführt wird. Bei den üblichen Verhältnissen (r groß im Vergleich zu h) ist der erste Einfluß deshalb von geringer Bedeutung, weil die größte Beanspruchung in der Mitte der Scheibe auftritt. Ob der zweite Einfluß bedeutungsvoll auftritt, ist im einzelnen Falle zu entscheiden.

3. Versuchsergebnisse.

Von den Ergebnissen der Versuche, welche Verfasser über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten seit 1889 angestellt hat, und hinsichtlich welcher im allgemeinen auf § 64 verwiesen werden darf, seien hier diejenigen angeführt, welche sich auf kreisförmige Scheiben aus Flußstahlblech erstrecken. Dieses Material besitzt konstanten Dehnungskoeffizienten, und erscheinen deshalb die an solchen Scheiben innerhalb der Proportionalitätsgrenze gemessenen Durchbiegungen zu einer Prüfung der unter Ziff. 1 erhaltenen Rechnungsergebnisse geeignet. Der Durchmesser (Fig. 15, 16) betrug hierbei 560 mm.

a) Die Scheibe ist nach Maßgabe der Fig. 16 in der Mitte belastet und am Umfange gestützt. Sie legt sich — abgesehen vom Einflusse des Eigengewichts — nur mit derjenigen Pressung gegen das Widerlager, welche durch die den Versuchskörper in der Mitte belastende Kraft hervorgerufen wird.

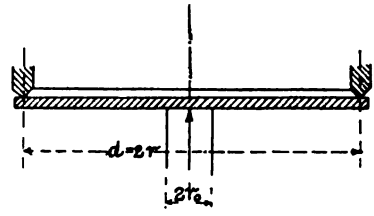


Fig. 16.

Der Dehnungskoeffizient α für federnde Durchbiegung ergab sich nach Gleichung 26 ($h = 8{,}4$ mm)

bei einer Gesamtdurchbiegung von	0,205 cm	0,355 cm	0,530 cm	1,1 cm
auf der Belastungsstufe	2	3	4	5
	158/753	753/1373	1373/2258	3688/5208 kg
zu $\alpha =$	$\frac{1}{2\,900\,000}$,	$\frac{1}{3\,025\,000}$,	$\frac{1}{3\,972\,000}$,	$\frac{1}{5\,116\,000}$,

während Biegungsversuche mit Streifen (Flachstäben) aus genau dem gleichen Material

$$\alpha = \frac{1}{2\,147\,000}$$

lieferten.

Wird die Summe der Durchbiegungen auf der ersten und zweiten Belastungsstufe zugrunde gelegt, so liefert Gleichung 26

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{0{,}205 \,.\, 0{,}84^3}{0{,}55 \,.\, 28^2 \,.\, 753} = \frac{1}{2\,672\,000}.$$

Wir erkennen, daß mit wachsender Durchbiegung der Scheibe, d. h. mit zunehmender Abweichung derselben von der ebenen Form, also mit wachsender Wölbung, der Dehnungskoeffizient anfangs

langsam, dann jedoch rasch abnimmt, später — bei weit getriebener Durchbiegung — wird diese Abnahme wieder geringer. Von einer schärferen Untersuchung, welche namentlich mit niedrigeren Belastungen[1]) und kleineren Belastungsstufen zu arbeiten hätte, würde zu erwarten sein: zunächst Proportionalität zwischen Belastungen und Durchbiegungen bis zu einem gewissen Grade der Belastung hin, dann stärkere Zunahme der Durchbiegungen nach Überschreiten der Materialbeanspruchung, welche auf der Höhe der Streckgrenze liegt, später wieder langsameres Wachsen (Folge der Wölbung).

Ferner erhellt, daß der aus Gleichung 26 berechnete Dehnungskoeffizient ganz erheblich kleiner ist als der wirkliche Dehnungskoeffizient des Materials. Der Unterschied beträgt bei Zugrundelegung selbst des größten Wertes von α

$$100\,\frac{2\,672\,000 - 2\,147\,000}{2\,147\,000} = 24{,}5\,\%.$$

Es muß zunächst dahingestellt bleiben, ob das verwendete Stahlblech das Material genau in dem Zustande enthielt wie die Streifen[2]). Aber selbst wenn in dieser Hinsicht ein Unterschied bestanden hätte, so würde letzterer eine Abweichung von 25% nicht zu erklären vermögen. Sonach mußte geschlossen werden, daß die Voraussetzungen, auf Grund deren die Gleichung 26 erlangt wurde, nicht — selbst bei lose aufliegender Scheibe — in dem Maße zutreffen, als bei Durchführung der Rechnungen angenommen ist.

Das Unbefriedigende dieses Zustandes gab Veranlassung zu den Versuchen, welche von Professor Dr. ing. Ensslin im Laboratorium des Verfassers durchgeführt wurden unter Verwendung vervollkommneter Einrichtungen; insbesondere wurde die Vorrichtung, welche im Jahre 1890 zu den Plattenversuchen mit Belastung durch eine Einzellast getroffen war, nämlich hydraulische Presse mit Kolben, der

[1]) Der Belastung $P = 753$ kg entspricht nach Gleichung 30 mit $r_0 = 1{,}1$ cm eine Anstrengung

$$k_b = 0{,}334\,(1{,}3\,ln\,\frac{28}{1{,}1} + 1)\,\frac{753}{0{,}84^2} = 1856\ \mathrm{kg/qcm}.$$

[2]) Wahrscheinlich wird eine solche Verschiedenheit von erheblichem Einfluß sein können; man denke z. B. an gehämmertes und an ausgeglühtes Blech. Auch war die Scheibe bereits vorher starken Beanspruchungen ausgesetzt gewesen.

mittelst Stulp abgedichtet wurde[1]), durch eine Presse mit eingeschliffenem Kolben, wie in Fig. 17 dargestellt, und durch Vor-

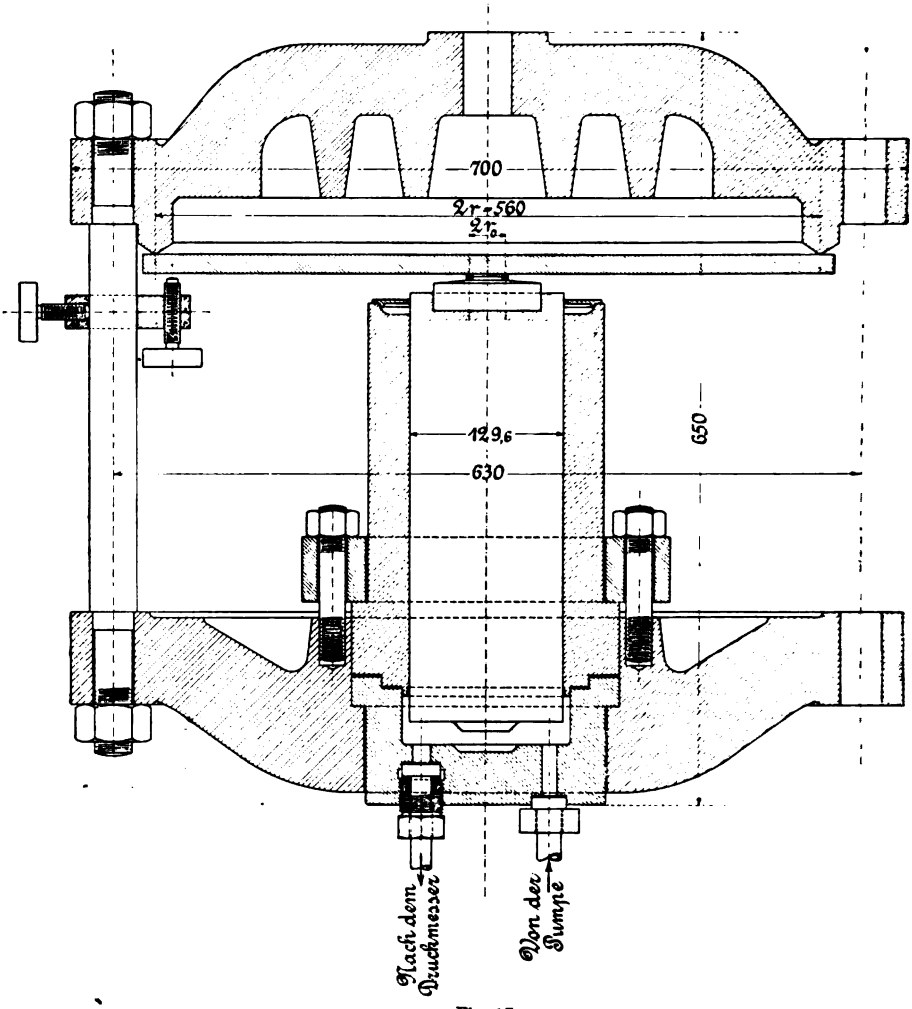


Fig. 17.

richtung zum Messen des Druckes mit Quecksilbersäule (System Amsler-Laffon) ersetzt. Hierdurch war eine von der Kolben-

[1]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1890, S. 1104, Fig. 12 bezw. S. 1042, Fig. 9 und 10 oder „Abhandlungen und Berichte", S. 126 bezw. 112. Die Knappheit der Geldmittel gestattete damals weitergehende Ausgaben nicht.

reibung in der Hauptsache unbeeinträchtigte, also genauere Bestimmung der die Platte belastenden Kraft möglich als früher. Die Belastung der Platte wird durch einen Kupferring auf eine Kreisringfläche vom mittleren Halbmesser r_0 übertragen; somit der Kraftangriff ein bestimmterer als bei den bis dahin vorgenommenen Versuchen. Zunächst wurde $r_0 = 15$ mm gewählt. Die Messung der Durchbiegungen in der Mitte erfolgte durch das schon 1890 benutzte Instrument[1]). Für den Durchmesser des Auflagerringes wurden 560 mm beibehalten.

Über die Ergebnisse hat Ensslin in Dinglers polyt. Journal 1903, Bd. 318, Heft 45, 46, 50 und 51 ausführlich berichtet[2]). Er ermittelte den größten Unterschied zu 7,45 % in demselben Sinne wie Verfasser, fand jedoch auch einen solchen in entgegengesetztem Sinne bis zur Höhe von 3,6 %. Hiernach würden die Entwicklungen, welche die Elastizitätslehre für die am Umfange frei aufliegende Scheibe liefert, als ausreichend genau zu bezeichnen sein.

b) Die Scheibe ist durch den Flüssigkeitsdruck p gleichmäßig belastet und am Umfange nach Maßgabe der Fig. 15 gestützt und abgedichtet.

Der Dehnungskoeffizient α ergibt sich nach Gleichung 16 ganz allgemein weit kleiner, als ihn das Material tatsächlich besitzt, außerdem im einzelnen zunehmend mit wachsender Flüssigkeitspressung. Beispielsweise fand sich für die eine Scheibe ($h = 8{,}5$ mm)

für die Belastungsstufe	$p = 0{,}5$ bis 1 kg	3 bis 3,5 kg
bei einer Gesamtdurchbiegung	$z' = 0{,}106$ cm	0,450 cm
	$\alpha = \frac{1}{6\,257\,000}$	$\frac{1}{4\,434\,000}$.

Durch Nachdrehen der Muttern, d. h. durch stärkeres Zusammenpressen von Ober- und Unterteil des Versuchsapparates, sinkt der Dehnungskoeffizient

[1]) S. Fußbemerkung S. 590.

[2]) Vergl. auch dessen Arbeit „Studien über die Beanspruchung und Formänderung kreisförmiger Platten“ in Dinglers polyt. Journal 1904, Bd. 319, Heft 30 bis 43.

für die Belastungsstufe	$p = 4$ bis 4,5 kg
bei einer Gesamtdurchbiegung	$z' = 0{,}585$ cm
auf	$\alpha = \frac{1}{8\,147\,000}$.

An dieser Abnahme ist allerdings — jedoch zum weit geringeren Teile — der Einfluß der zunehmenden Wölbung beteiligt. Die Hauptursache aber bildet die Abdichtungskraft, d. h. die Kraft, mit welcher die Scheibe durch die Schrauben zum Zweck der Abdichtung einerseits gegen die Dichtung und andererseits gegen das Widerlager gepreßt wird. (Vergl. das oben unter Ziff. 2 Bemerkte.)

Eine stärkere Scheibe ($h = 10{,}1$ mm) liefert

für die Belastungsstufe	$p = 0{,}5$ bis 1 kg	3 bis 3,5 kg
bei einer Gesamtdurchbiegung	$z' = 0{,}090$ cm	0,365 cm
	$\alpha = \frac{1}{4\,444\,000}$,	$\frac{1}{3\,664\,000}$,

also verhältnismäßig größere Werte des Dehnungskoeffizienten.

Eine andere Scheibe ($h = 8{,}4$ mm) ergibt für die Belastungsstufe $p = 0{,}1$ bis 0,7 kg bei einer Gesamtdurchbiegung bis zu 0,143 cm, wenn die Schrauben kräftig angezogen sind:

$$\alpha = \frac{1}{6\,540\,000},$$

wenn dieselben allmählich mehr und mehr gelöst werden:

$$\alpha = \frac{1}{5\,970\,000}, \quad \frac{1}{4\,920\,000} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3\,820\,000}.$$

Lösen der Schrauben, d. i. Verminderung der Abdichtungskraft, vermehrt demnach α, ergibt also Zunahme der Durchbiegung, während Nachziehen der Schrauben, d. i. Vergrößerung der Abdichtungskraft, Verminderung der Durchbiegung zur Folge hat.

Ohne in die Einzelheiten der Wirksamkeit der Abdichtungskraft einzutreten, kann der Einfluß derselben leicht dahin festgestellt werden, daß sich die Scheibe umsomehr von dem Zustande des Loseaufliegens entfernt und umsomehr einem anderen sich

nähert, welcher demjenigen des Eingespanntseins ähnelt[1]), je größer — unter sonst gleichen Verhältnissen — die Abdichtungskraft ist. Da nun Lösen der Schrauben diese Kraft vermindert, Anziehen derselben sie vermehrt, so kommt ersteres auf Annäherung an den Zustand des Loseaufliegens, letzteres auf Annäherung an denjenigen des Eingespanntseins hinaus.

Hiernach wird bei derselben Größe der Abdichtungskraft eine stärkere Platte unter sonst gleichen Verhältnissen dem Eingespanntsein sich weniger nahe befinden als eine schwächere, d. h. die stärkere Scheibe muß unter sonst gleichen Umständen einen größeren Dehnungskoeffizienten ergeben als die schwächere. Das ergab sich auch tatsächlich für die 10,1 mm starke Scheibe, verglichen mit der zuerst angeführten 8,5 mm dicken Scheibe.

4. Näherungsweg zur Ermittlung der Anstrengung.

a) Die Scheibe, im Umfange vom Halbmesser r aufliegend, wird durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche πr^2 belastet, Fig. 15.

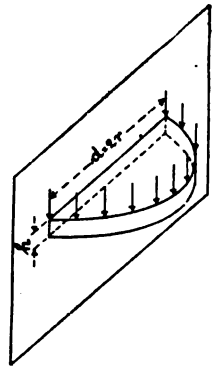


Fig. 18.

Entsprechend dem Umstande, daß bei Gleichartigkeit des Materials die Querschnitte der größten Anstrengung durch die Mitte der Scheibe gehen müssen, werde die letztere als ein nach einem

[1]) Von einer vollständigen Einspannung kann natürlich bei der Sachlage Fig. 15 nicht die Rede sein.

Durchmesser eingespannter Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Breite $d = 2r$ und dessen Höhe h ist, aufgefaßt, Fig. 18. Belastet erscheint diese Scheibenhälfte bei Vernachlässigung des Eigengewichts:

α) durch die auf die Unterfläche $0{,}5\,\pi r^2$ wirkende Flüssigkeitspressung p, welche mit Rücksicht darauf, daß der Schwerpunkt der Halbkreisfläche um $\frac{4r}{3\pi}$ von der Mitte absteht, für die Einspannstelle das Moment

$$0{,}5\,\pi r^2 p \,.\, \frac{4r}{3\pi}$$

liefert, und

β) durch den auf die Umfangslinie πr sich verteilenden Widerlagsdruck $0{,}5\,\pi r^2 p$, welcher als im Schwerpunkte der Halbkreislinie πr angreifend gedacht werden kann, dessen Abstand $\frac{2r}{\pi}$ von der Mitte beträgt und deshalb das Moment

$$0{,}5\,\pi r^2 p \,.\, \frac{2r}{\pi}$$

ergibt.

Hieraus folgt das biegende Moment

$$0{,}5\,\pi r^2 p\,\frac{2r}{\pi} - 0{,}5\,\pi r^2 p\,\frac{4r}{3\pi} = \frac{1}{3} r^3 p$$

und somit nach Gleichung 13, § 20, S. 234, da hier

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{1}{12} 2r \,.\, h^3 : \frac{h}{2} = \frac{1}{6} 2r h^2,$$

$$\frac{1}{3} r^3 p \leq k_b \frac{1}{6} 2r h^2$$

unter der Voraussetzung, daß sich das Moment gleichmäßig über den Querschnitt von der Breite $d = 2r$ überträgt, und unter Vernachlässigung des Umstandes, daß senkrecht zueinander stehende Normalspannungen vorhanden sind. Tatsächlich treffen diese Voraussetzungen nicht zu; insbesondere werden die nach der Scheiben-

mitte hin gelegenen Elemente des gefährdeten Querschnittes stärker beansprucht sein. Dem kann dadurch Rechnung getragen werden, daß nicht die volle Querschnittsbreite, sondern nur ein Teil, etwa $\frac{2r}{\mu}$, in die Biegungsgleichung eingeführt wird, womit

$$\frac{1}{3} r^3 p \leqq k_b \frac{1}{6} \frac{2r}{\mu} h^2,$$

so daß

$$k_b \geqq \mu \left(\frac{r}{h}\right)^2 p = \frac{1}{4} \mu \left(\frac{d}{h}\right)^2 p$$

oder

$$h \geqq r \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}} = 0{,}5\, d \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}} \qquad \ldots \quad 31)$$

Hierin wird der Größe μ ganz allgemein der Charakter eines durch Versuche festzustellenden Berichtigungskoeffizienten beizulegen sein. Derselbe trägt alsdann nicht bloß der ungleichmäßigen Verteilung des biegenden Momentes über den Querschnitt Rechnung (insofern müßte er größer als 1 sein), sondern auch sonstigen Verhältnissen, namentlich dem Umstande, daß senkrecht zueinander wirkende Normalspannungen tätig sind (insofern müßte er kleiner als 1 sein). Er wird sich ferner in erheblichem Maße abhängig erweisen müssen namentlich von der Befestigungsweise der Scheibe, sowie von der Größe der Kraft, mit welcher deren Anpressung erfolgt, von der Art der Abdichtung, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Scheibe da, wo diese das Dichtungsmaterial berührt, und da, wo sie sich mit ihrer anderen Seite gegen die Auflagefläche stützt u. s. w. Je größer die Abdichtungskraft ist, um so kleiner — bis zu einer gewissen Grenze hin — wird μ ausfallen müssen.

Je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert, schwankt μ nach dem, was aus den bis heute für Gußeisen erlangten Versuchsergebnissen des Verfassers geschlossen werden darf, zwischen 0,8 und 1,2.

$$\mu = 1{,}5 \quad \text{und} \quad \psi = 0{,}4 \text{ bis } 0{,}5.$$

Für größere Werte von r_0 nehmen beide Koeffizienten ab, und zwar vermindert sich ψ erheblich stärker als μ.

§ 61. Ebene elliptische Platte, Fig. 1, a > b.

Bevor in gleicher Weise vorgegangen werden kann wie in § 60, Ziff. 4, ist hier der zu erwartende Verlauf der Bruchlinie

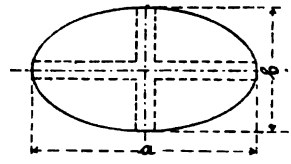


Fig. 1.

festzustellen, d. h. zu untersuchen, ob der Querschnitt der größten Anstrengung in die Richtung der großen oder der kleinen Achse fällt.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in Richtung der großen Achse a und sodann auch in Richtung der kleinen Achse b je einen (im Vergleich zu a und b) sehr schmalen Streifen von der Breite 1, der Länge a bezw. b herausgeschnitten und zu einem rechtwinkligen Streifenkreuz vereinigt, wie in Fig. 1 gestrichelt angegeben ist. In der Mitte des Kreuzes wirke eine Last P. Dieselbe wird sich alsdann auf die vier Widerlager an den Enden der Streifen derart verteilen, daß diese in der Mitte sich um gleichviel durchbiegen. Bezeichnet

W_a die Widerlagskraft je an den beiden Enden des Streifens von der Länge a,

W_b die Widerlagskraft je an den beiden Enden des Streifens von der Länge b,

so entfällt von der Belastung P auf die Mitte des Streifens von der Länge a die Kraft $2\,W_a$ und auf diejenige des Streifens von der Länge b die Kraft $2\,W_b$.

Die Durchbiegung der Mitte eines an den Enden im Abstande l frei aufliegenden und in der Mitte durch eine Kraft S belasteten Stabes, dessen in Betracht kommendes Trägheitsmoment Θ ist, beträgt nach Gleichung 14, § 18

$$y' = S \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^3}{48},$$

demnach die Durchbiegung y'_a des Streifens von der Länge a

$$y'_a = 2 W_a \frac{\alpha}{\Theta} \frac{a^3}{48}$$

und diejenige des Streifens von der Länge b

$$y'_b = 2 W_b \frac{\alpha}{\Theta} \frac{b^3}{48}.$$

Wegen

$$y'_a = y'_b$$

wird

$$W_a a^3 = W_b b^3,$$

d. h.

$$\frac{W_b}{W_a} = \frac{a^3}{b^3}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Die größte Materialanstrengung σ_a in der Mitte des a langen Streifens ergibt sich bei Vernachlässigung des Zusammenhanges mit dem anderen Streifen unter Beachtung der Gleichung 7, § 18 aus

$$W_a \frac{a}{2} = \frac{1}{6} \sigma_a h^2$$

zu

$$\sigma_a = 3 W_a \frac{a}{h^2}$$

und in gleicher Weise diejenige des b langen Streifens zu

$$\sigma_b = 3\, W_b \frac{b}{h^2}.$$

Folglich mit Rücksicht auf Gleichung 1

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \frac{W_b\, b}{W_a\, a} = \frac{a^2}{b^2}$$

oder

$$\sigma_b = \sigma_a \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ldots\ldots\ldots 2)$$

Da $a > b$, so ist

$$\sigma_b > \sigma_a,$$

beispielsweise

für $a = 2\,b$ $\quad \sigma_b = \sigma_a \left(\frac{2\,b}{b}\right)^2 = 4\,\sigma_a,$

- $a = 3\,b$ $\quad \sigma_b = \sigma_a \left(\frac{3\,b}{b}\right)^2 = 9\,\sigma_a.$

Wir erkennen — für das Streifenkreuz —, daß die am meisten gespannten Fasern in Richtung der kleinen Achse eine im quadratischen Verhältnisse der Achslängen stärkere Normalspannung erfahren als diejenigen in Richtung der großen Achse, und schließen hieraus, daß die Bruchlinie in der Richtung der großen Achse verlaufen muß.

Dementsprechend ist die elliptische Platte so einzuspannen, daß die große Achse a die Breite des Befestigungsquerschnittes bildet[1]).

---

[1]) Wie oben bemerkt, erfolgt das Herausschneiden zweier Streifen zu dem Zwecke der Gewinnung eines Urteils darüber, ob in der Mitte der Platte die größte Anstrengung in der Richtung der großen oder der kleinen Achse der Ellipse auftritt. Diese Methode, welche natürlich keinen Anspruch darauf erheben kann, genau und einwandfrei zu sein, setzt in erster Linie voraus, daß die Formänderung, welche den herausgeschnittenen Streifen unterstellt wird, mit aus-

a) Die elliptische Platte, welche im Umfange, bestimmt durch die große Achse a und die kleine Achse b, aufliegt, wird durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche $\frac{\pi}{4} a b$ belastet.

Auf dem in § 60, Ziff. 4 beschrittenen Wege (vergl. Fig. 18 daselbst) wird das biegende Moment M_b erhalten als Unterschied zwischen dem Moment M_u, welches die von der stützenden Halbellipse (Widerlager) auf die Platte ausgeübten Kräfte, die Umfangskräfte, liefern, und demjenigen Moment, welches der Flüssigkeitsdruck ergibt, d. i.

$$\frac{1}{8} \pi a b p \frac{2}{3\pi} b = \frac{1}{12} a b^3 p.$$

Die Bestimmung von M_u ist hier jedoch weniger einfach als dort. Bei der kreisförmigen Scheibe durfte ohne weiteres gleichmäßige Verteilung des Widerlagsdruckes über den Kreisumfang angenommen, d. h. vorausgesetzt werden, daß jede Längeneinheit des Umfanges πd von dem Widerlager die gleiche Pressung erfährt. Bei der elliptischen Platte ist diese Annahme nicht zulässig; denn nach Gleichung 1 nimmt der Widerlagsdruck von den Endpunkten der großen Achse, woselbst er durch W_a gemessen wird, nach den Endpunkten der kleinen Achse hin zu, und zwar im umgekehrten kubischen Verhältnis der Achslängen[1]), wenn das für

reichender Annäherung derjenigen entspricht, welche die Streifen in der Platte erfahren, mindestens hinsichtlich der Form an sich. Vergl. hierüber auch 3. Auflage dieses Buches S. 541 u. f.

Das ganze Verfahren hält Verfasser, wie er schon vor 15 Jahren ausgesprochen hat, nur für zulässig, weil der Versuch nebenhergeht, und der Berichtigungskoeffizient μ auf Grund von Versuchsergebnissen bestimmt wird, und weil man auf anderem Wege in genügend einfacher Weise nicht zum Ziele gelangt — wenigstens ist dies dem Verfasser bisher nicht gelungen — und andererseits das vorliegende praktische Bedürfnis dringend Befriedigung verlangt. Er würde es nur begrüßen können, wenn von anderer Seite Vollkommeneres ausfindig gemacht wird.

[1]) Diese Veränderlichkeit, welche beispielsweise bei dem Achsenverhältnis $a : b = 3 : 2$ nach Gleichung 1 durch die Zahlen

das Streifenkreuz gefundene auf die elliptische Platte übertragen wird. Mit welcher Annäherung dies zulässig ist, muß zunächst dahingestellt bleiben[1]). Da, wo der Krümmungshalbmesser der Ellipse am kleinsten ist, besitzt auch der Widerlagsdruck seinen geringsten Wert; da, wo jener seinen Größtwert erreicht, weist auch dieser denselben auf.

Der Krümmungshalbmesser der Ellipse ist bekanntlich im Scheitel der großen Achse

$$\varrho_a = \frac{b^2}{2a},$$

im Scheitel der kleinen Achse

$$\varrho_b = \frac{a^2}{2b},$$

demnach

$$\varrho_b : \varrho_a = a^3 : b^3,$$

d. i. aber dasselbe Verhältnis, in welchem nach Gleichung 1 die Größen W_b und W_a zueinander stehen. Es darf daher ausgesprochen werden, daß sich W_b und W_a wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser verhalten. Je mehr a von b abweicht, um so ungleichförmiger verteilt sich der Flüssigkeitsdruck über das Widerlager.

Zur Feststellung des Momentes M_u, welches dieser veränderliche Widerlagsdruck in bezug auf den Befestigungsquerschnitt der

$$3^3 : 2^3 = 27 : 8$$

gemessen wird derart, daß die Pressung, mit welcher die elliptische Platte im Scheitel der kleinen Achse gegen das Widerlager drückt, 27 : 8 mal = 3,375 mal größer ist als diejenige im Scheitel der großen Achse, bedingt eine ungleichmäßige Belastung gleich weit voneinander abstehender Schrauben, durch welche etwa die Platte als Verschlußdeckel befestigt ist. An der Erkenntnis, daß eine solche Ungleichmäßigkeit stattfindet, ändert sich nichts, wenn auch die für das Streifenkreuz ermittelte Gesetzmäßigkeit der Verteilung des Widerlagsdrucks nur mit einer mehr oder minder beschränkten Annäherung auf die elliptische Platte übertragen werden kann. Der Grad der Annäherung oder Abweichung beeinflußt nur das Maß der Ungleichmäßigkeit.

[1]) Der S. 606 in die Rechnung eintretende, aus unmittelbaren Biegungsversuchen mit elliptischen Platten zu ermittelnde Berichtigungskoeffizient μ hat der Abweichung Rechnung zu tragen.

elliptischen Platte liefert, werde die Ellipse auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse liegt, dessen x-Achse in die große Achse und dessen y-Achse in die kleine Achse fällt. Für einen beliebigen, durch x und y bestimmten Punkt der Ellipse sei das zugehörige Kurvenelement mit ds bezeichnet. Der auf dasselbe wirkende Widerlagsdruck betrage $W\,ds$. Dann ist

$$M_u = \int y\, W\, ds,$$

wobei die Integration sich auf die halbe Ellipse zu erstrecken hat.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{2}}\right)^2 = 1$$

folgt, sofern noch

$$x = \frac{a}{2}\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2} = \frac{b}{2}\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2}} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}\; d\left(\frac{a}{2}\sin\varphi\right)$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\;.\; d\varphi.$$

Nach Einführung von

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

ergibt sich

$$ds = \frac{a}{2}\sqrt{1 - n^2 \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi,$$

und

$$y\,ds = \frac{a\,b}{4}\sqrt{1 - n^2 \sin^2\varphi}\,.\,\cos\varphi\,d\varphi.$$

Hinsichtlich der Veränderlichkeit des Widerlagsdruckes W fanden wir oben für die zwei Grenzwerte W_a (in den Scheiteln der großen Achse) und W_b (in den Scheiteln der kleinen Achse), daß sie sich verhalten wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser. Mit Rücksicht hierauf werde angenommen, daß W in dem beliebigen Punkte x, y proportional dem Krümmungshalbmesser ϱ an dieser Stelle sei, d. h.

$$W = W_b \frac{\varrho}{\varrho_b} = W_b \frac{\varrho}{\frac{a^2}{2b}}.$$

Da

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so findet sich mit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b}{a^2}\frac{1}{\cos^3\varphi}$$

die absolute Größe des Krümmungshalbmessers zu

$$\varrho = \frac{a^2}{2b}\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}^3 \,.\, \cos^3\varphi = \frac{a^3}{2b}\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2\varphi}^3$$

$$= \frac{a^2}{2b}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^3 = \frac{a^2}{2b}\sqrt{1 - n^2\sin^2\varphi}^3.$$

Für

$$x = 0, \text{ d. i. } \varphi = 0, \quad \text{wird} \quad \varrho = \varrho_b = \frac{a^2}{2\,b},$$

$$x = \frac{a}{2}, \text{ d. i. } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad - \quad \varrho = \varrho_a = \frac{b^2}{2\,a},$$

wie oben bereits bemerkt.

Hiermit

$$W = W_b \frac{\varrho}{\frac{a^2}{2\,b}} = W_b \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}^3$$

und infolgedessen für die halbe Ellipse

$$M_a = \int y\, W\, ds = 2\,\frac{a\,b}{4}\, W_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{a\,b}{2}\, W_b \left(1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4\right).$$

Der Wert W_b bestimmt sich aus der Erwägung, daß die Kraft, welche die unter der Pressung p stehende Flüssigkeit auf die Hälfte der elliptischen Platte ausübt, d. i.

$$\frac{\pi\,a\,b}{8}\, p,$$

gleich sein muß der Summe der Widerlagskräfte für die halbe Ellipse, sofern von dem Einflusse des Eigengewichts abgesehen wird, und andere, den Widerlagsdruck beeinflussende Kräfte nicht vorhanden sind, d. h.

$$\frac{\pi a b}{8} p = \int W ds = 2 \frac{a}{2} W_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} a W_b \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4\right),$$

zu

$$W_b = \frac{b}{4} p \frac{1}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4}.$$

Die Einführung dieses Wertes in die Gleichung für M_u liefert

$$M_u = \frac{a b^2}{8} p \frac{1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} = \frac{a b^2}{15} p \frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}.$$

Hiermit ergibt sich nun die Biegungsgleichung in bezug auf den a breiten und h hohen Querschnitt der elliptischen Platte bei Einführung des Berichtigungskoeffizienten μ (vergl. § 60, Ziff. 4)

$$M_b = \frac{a b^2}{15} p \frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} - \frac{\pi a b}{8} p \frac{2 b}{3 \pi} \leq \frac{1}{6} k_b \frac{a}{\mu} h^2,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geq \frac{1}{2} \mu \frac{3{,}4 + 1{,}2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0{,}6\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} p \left(\frac{b}{h}\right)^2 \\ \text{oder} \\ h &\geq \frac{1}{2} b \sqrt{2\mu \frac{3{,}4 + 1{,}2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0{,}6\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} \frac{p}{k_b}}. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Für $a = b = d$ gehen diese Ausdrücke über in

$$k_b \geqq \frac{1}{4}\,\mu\left(\frac{d}{h}\right)^2 p \quad \text{bezw.} \quad h \geqq \frac{1}{2}\,d\sqrt{\mu\,\frac{p}{k_b}},$$

d. s., wie notwendig, die Gleichungen 31, § 60 für die kreisförmige Scheibe.

Mit Annäherung werde gesetzt

$$\frac{3{,}4 + 1{,}2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0{,}6\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} = \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

infolgedessen

$$k_b \geqq \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{b}{h}\right)^2 p$$

oder

$$h \geqq \frac{1}{2}\,b\sqrt{\frac{2\mu}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,\frac{p}{k_b}} \qquad \ldots\ldots 4)$$

Für den bei Mannlochverschlüssen üblichen Wert $a = \sim 1{,}5\,b$ liefern die Gleichungen 3

$$k_b \geqq \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{3{,}4 + 1{,}2\,\frac{4}{9} - 0{,}6\,\frac{16}{81}}{3 + 2\,\frac{4}{9} + 3\,\frac{16}{81}}\left(\frac{b}{h}\right)^2 p = 0{,}425\,\mu\left(\frac{b}{h}\right)^2 p$$

bezw.

$$h \geqq 0{,}65\,b\sqrt{\mu\,\frac{p}{k_b}},$$

die Gleichungen 4

$$k_b \geq \frac{1}{2}\mu \frac{1}{1+\frac{4}{9}} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p = 0{,}346\,\mu \left(\frac{b}{h}\right)^2 p$$

bezw.

$$h \geq 0{,}59\, b \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}}.$$

Demnach ergibt sich im vorliegenden Falle die Wandstärke unter Benutzung der Gleichung 4 um

$$100 \frac{0{,}65 - 0{,}59}{0{,}65} = 9\,\%$$

geringer, als Gleichung 3 liefert.

Der Berichtigungskoeffizient μ liegt nach Versuchen des Verfassers etwa zwischen $\frac{2}{3} = 0{,}67$ und $\frac{9}{8} = 1{,}12$, je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert.

b) Die elliptische Platte wie unter a), jedoch lose aufliegend und nur in der Mitte mit der Kraft P belastet.

Unter a) fand sich für das Moment der am stützenden Umfange der Platte tätigen Widerlagskräfte

$$M_u = \frac{ab}{2} W_b \left(1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4\right),$$

worin bedeutet

$$n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

und worin W_b, die auf die Längeneinheit der elliptischen Stützlinie bezogene Widerlagskraft im Scheitel der kleinen Achse, hier bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{P}{2} = \int W\,ds = 2\,\frac{a}{2}\,W_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\,a\,W_b \left(1 - n^2 + \frac{3}{8}\,n^4\right),$$

somit beträgt

$$W_b = \frac{P}{\pi a \left(1 - n^2 + \frac{3}{8}\,n^4\right)}.$$

Die Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung für M_u, die unter der Voraussetzung, daß die belastende Kraft sich nur auf eine sehr kleine Fläche in der Mitte der Platte verteilt[1]), auch gleichzeitig mit Annäherung das biegende Moment liefert, führt alsdann zu

$$\frac{b}{2\pi}\,P\,\frac{1 - \frac{2}{3}\,n^2 + \frac{1}{5}\,n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8}\,n^4} \leqq k_b \frac{1}{6}\,\frac{a}{\mu}\,h^2,$$

woraus

$$k_b \geqq \frac{8}{5\pi}\,\mu\,\frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}\,\frac{b}{a}\,\frac{P}{h^2}$$

oder

$$h \geqq \sqrt{\frac{8}{5\pi}\,\mu\,\frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}\,\frac{b}{a}\,\frac{P}{k_b}} \qquad \text{5)}$$

[1]) Erscheint diese Voraussetzung nicht genügend erfüllt, so ist die Größe der Fläche, über welche sich P verteilt, ins Auge zu fassen und so vorzugehen, wie oben in § 60, Ziff. 4, b geschehen.

Hierin ist nach den Ergebnissen der Versuche des Verfassers

$$\mu = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ bis } \frac{5}{3} = 1{,}67$$

zu setzen.

Mit $b = a$ ergibt sich aus Gleichung 5

$$k_b \geq \frac{3}{\pi} \mu \frac{P}{h^2},$$

übereinstimmend mit Gleichung 33, § 60, wenn $r_0 = 0$ gesetzt wird.

§ 62. Ebene quadratische Platte, Seitenlänge a.

Wie in § 61, so muß auch hier zunächst die zu erwartende Linie der größten Anstrengung (Bruchlinie) festgestellt werden. Diesem Zwecke dient die folgende Betrachtung.

Um den Mittelpunkt M der noch unbelasteten Platte werde auf derjenigen Plattenfläche, deren Fasern gezogen werden, ein kleines Quadrat, Fig. 1, gezeichnet, dessen Seiten BAB parallel den

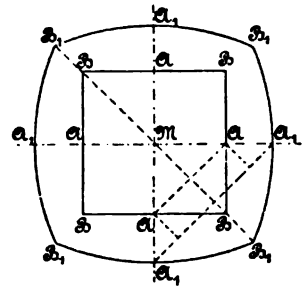


Fig. 1.

Seiten der Platte laufen. Unter Einwirkung der Belastung nehmen die Strecken MA die Länge MA_1 (übertrieben und ohne genaueres Eingehen auf den Verlauf der Formänderung gezeichnet) an, vergrößern sich also um AA_1. Die Strecken AB dehnen sich als außerhalb der Mitte gelegen, woselbst die Dehnung am größten

ist, etwas weniger, etwa so, daß die Punkte B nach B_1 rücken. Dabei geht dann das ursprüngliche Quadrat in die Figur $A_1B_1A_1B_1A_1B_1A_1B_1$ mit gekrümmten Seiten $B_1A_1B_1$ über.

Es beträgt nun die verhältnismäßige Dehnung in Richtung von MA

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{MA}}.$$

Ihr gleich erweist sich in dem kleinen (rechts unten gelegenen) Vierseit $MAA_1B_1A_1A$, in welches das Quadrat $MABA$ übergegangen ist, nur die Dehnung in der Richtung A_1A_1. Dieselbe wird gemessen durch

$$\frac{\overline{A_1A_1} - \overline{AA}}{\overline{AA}} = \frac{2\,(\overline{AA_1}\sqrt{0{,}5})}{\overline{MA}\sqrt{2}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{MA}}.$$

Die Dehnungen nach allen übrigen Richtungen sind kleiner, wie eine einfache Betrachtung sämtlicher, im ursprünglichen Quadrate $MABA$ beim Übergange in das Vierseit $MA_1B_1A_1$ ein-

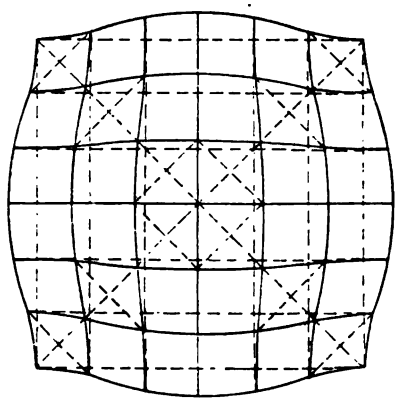


Fig. 2.

getretenen Längenänderungen ohne weiteres erkennen läßt. Demnach tritt die größte Anstrengung außerhalb des Punktes M nur in der Richtung AA oder A_1A_1 ein, d. h. der Verlauf

der Bruchlinie wird von der Mitte aus nach der Richtung der Diagonale zu erwarten sein.

Noch deutlicher tritt das hervor, wenn auf der bezeichneten Seite der Platte ein Quadratnetz gezeichnet wird, wie in Fig. 2 gestrichelt angedeutet ist. Durch die Belastung werden diese ursprünglich geraden Netzlinien in Kurven übergehen, ungefähr wie in Fig. 2 übertrieben gezeichnet. Daß die Dehnungen senkrecht zur Diagonale am größten sind, somit die Bruchlinie nach dieser verlaufen wird, dürfte die Abbildung deutlich zeigen.

a) Die quadratische Platte, am Umfange 4a aufliegend, wird durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche a^2 belastet.

Mit Rücksicht auf das Erörterte werde die quadratische Platte nach Maßgabe der Fig. 3 eingespannt.

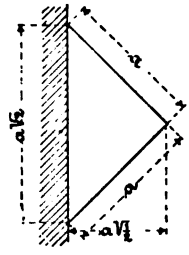


Fig. 3.

Das biegende Moment M_b ergibt sich alsdann aus der Erwägung,

daß auf jede der vier Quadratseiten eine resultierende Widerlagskraft $\frac{1}{4} a^2 p$ wirkt, deren Angriffspunkt in der Seitenmitte, also im Abstande $\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Einspannungsquerschnitt anzunehmen ist,

daß es sich für den letzteren um zwei solche Quadratseiten handelt, demnach um ein Moment der Widerlagskräfte von der Größe $2 . \frac{1}{4} a^2 p . \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$,

daß der Flüssigkeitsdruck auf die von der Diagonale begrenzte Quadrathälfte $\frac{1}{2} a^2 p$ beträgt und im Schwerpunkte, d. i. im Abstande $\frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Einspannungsquerschnitt angreift.

Hiermit folgt

$$M_b = 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^2 p \cdot \frac{a}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} a^3 p \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und demnach die Biegungsgleichung für den $a\sqrt{2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}} \leqq k_b \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{2}}{\mu} h^2 = \frac{1}{3\mu} \sqrt{\frac{1}{2}} k_b a h^2,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq \frac{1}{4} \mu \left(\frac{a}{h}\right)^2 p \\ \text{oder} \qquad h &\geqq \frac{1}{2} a \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1)$$

Hierin ist nach Versuchen des Verfassers

$$\mu = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ bis } \frac{9}{8} = 1{,}12$$

zu setzen, je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert.

b) Die quadratische Platte, wie unter a), jedoch lose aufliegend und nur in der Mitte durch eine Kraft P belastet.

Auf dem Wege wie unter a) findet sich

$$\frac{P}{2}\,\frac{1}{2}\,a\sqrt{\frac{1}{2}} \leqq k_b\,\frac{1}{6}\,\frac{a\sqrt{2}}{\mu}\,h^2,$$

woraus

$$k_b \geqq \frac{3}{4}\,\mu\,\frac{P}{h^2}$$

oder

$$h \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3\,\mu\,\frac{P}{k_b}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 2)$$

Für den Berichtigungskoeffizienten ist zu setzen (Versuche des Verfassers):

$$\mu = \frac{7}{4} = 1{,}75 \text{ bis } 2.$$

§ 63. Ebene rechteckige Platten, Fig. 1, a > b.

a) Die rechteckige Platte, welche im Umfange $2(a+b)$, bestimmt durch die lange Seite a und die kurze Seite b, aufliegt, ist durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche $a\,b$ belastet.

Die in § 61 für die elliptische Platte angestellte Betrachtung, welche zu der Erkenntnis führte, daß die größte Anstrengung für den Mittelpunkt derselben in Richtung der kleinen Achse stattfindet, kann ohne weiteres auch auf die rechteckige Platte übertragen werden. Sie ergibt, daß für den Mittelpunkt der letzteren die größte Inanspruchnahme in Richtung der kleinen Seite statthat, und daß infolgedessen in der Mitte die Bruchlinie in Richtung der langen Seite verlaufen wird. Nach außen hin wird

sie jedoch, wie aus dem in § 62 Erörterten zu schließen ist (vergl. auch Fig. 2, § 62), die Neigung haben müssen, in die Diagonale einzubiegen, etwa nach Fig. 1. Die Wahl unter den Diagonalen dürfte hierbei von Ungleichheiten im Material oder in der Stützung der Platte wesentlich beeinflußt werden.

Unter diesen Umständen begegnet die zutreffende Annahme des Bruchquerschnitts erheblicher Unsicherheit. In Erwägung des für die Entwicklungen dieses Paragraphen allgemein gemachten und durch Einführung des Berichtigungskoeffizienten μ auch rechnerisch zum Ausdruck gebrachten Vorbehaltes, die erhaltenen Gleichungen durch Versuche hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit zu prüfen, sowie in Anbetracht der Notwendigkeit, die praktisch wichtige Aufgabe mit einfachen Mitteln der Lösung zuzuführen, entschließen wir uns für die Einspannung nach der Diagonale

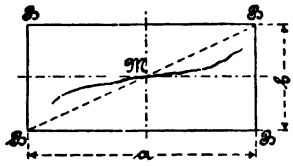


Fig. 1.

BMB mit der Maßgabe, nur das für diesen Querschnitt sich ergebende biegende Moment in Rechnung zu stellen.

Der gesamte Flüssigkeitsdruck $a\,b\,p$ verteilt sich allerdings nicht gleichförmig über die Seiten a bezw. b; vielmehr wird der Auflagerdruck in der Mitte der Seiten am größten sein und nach den Eckpunkten des Rechtecks hin abnehmen. Jedenfalls aber darf davon ausgegangen werden, daß für jede Seite der resultierende Widerlagsdruck durch die Mitte derselben geht, also um

$$\frac{b}{2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

von dem Einspannungsquerschnitt absteht. So ergibt sich das biegende Moment

$$M_b = \frac{1}{2}\,abp\,.\,\frac{b}{2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2}\,abp\,.\,\frac{1}{3}\,b\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{12}\,\frac{a^2\,b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,p$$

und hiermit die Biegungsgleichung für den $\sqrt{a^2+b^2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12}\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}p \leqq k_b \frac{1}{6}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mu}h^2,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq \frac{1}{2}\mu\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{b}{h}\right)^2 p \\ h &\geqq \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{2\mu}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\frac{p}{k_b}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1)$$

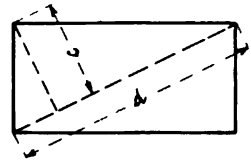


Fig. 2.

Wird nach Maßgabe von Fig. 2 die Länge c des Lotes auf die Diagonale, deren Länge d ist, eingeführt, so findet sich durch unmittelbare Ableitung oder auch durch Umrechnung von Gleichung 1

$$h \geqq c\sqrt{\frac{\mu p}{2 k_b}}, \quad \ldots\ldots 1a)$$

woraus ersichtlich ist, daß die Höhe c allein die maßgebende Größe für die Plattenstärke ist.

Mit $b = a$ ergibt sich

$$k_b \geqq \frac{1}{4}\mu\left(\frac{a}{h}\right)^2 p \qquad \text{oder} \qquad h \geqq \frac{a}{2}\sqrt{\mu\frac{p}{k_b}},$$

wie in § 62 für die quadratische Platte gefunden worden ist.

b) Die rechteckige Platte, wie unter a), jedoch am Umfange lose aufliegend und nur in der Mitte durch eine Kraft P belastet.

Auf dem unter a) beschrittenen Weg findet sich

$$\frac{P}{2}\frac{b}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqq k_b \frac{1}{6}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mu} h^2,$$

woraus

$$k_b \geqq \frac{3}{2}\mu \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\frac{P}{h^2}$$

oder

$$h \geqq \sqrt{\frac{3}{2}\mu \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\frac{P}{k_b}}. \quad \ldots\ldots 2)$$

Hieraus folgen die Gleichungen 2, § 62, wenn $b = a$ gesetzt wird. Mit den in Fig. 2 eingetragenen Bezeichnungen ergibt sich

$$h \geqq \sqrt{\frac{3}{2}\mu \frac{c}{d}\frac{P}{k_b}} \ldots\ldots 2a)$$

§ 64. Versuchsergebnisse.

Die in der Einleitung zu diesem Abschnitt erörterte Sachlage verlangte dringend die Anstellung von Versuchen über die Widerstandsfähigkeit plattenförmiger Körper. Infolgedessen unterzog sich Verfasser dieser Aufgabe und führte 1889/90 nach Konstruktion der erforderlichen Versuchseinrichtungen — solche lagen bisher nicht vor — eine große Anzahl von Versuchen mit Platten von Flußstahlblech und Gußeisen durch. Über dieselben ist in dessen Schrift: „Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten", Berlin 1890, berichtet[1]).

[1]) Ergänzungen hierzu finden sich in des Verfassers Arbeiten: „Versuche über die Widerstandsfähigkeit der Wasserkammerplatten von Wasserröhrenkesseln" (Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 1,

Insoweit es sich bei denselben um Scheiben von Flußstahlblech handelt, ist das Wichtigste aus den Ergebnissen in § 60, Ziff. 3 hervorgehoben, so daß hier auszugsweise nur noch der Ergebnisse zu gedenken sein wird, welche mit gußeisernen Platten erzielt worden sind. Hinsichtlich der Einzelheiten darf auf die erwähnte Schrift sowie auf die in der Fußbemerkung bezeichneten Arbeiten verwiesen werden.

1. Verlauf der Bruchlinie. Sonstiges Verhalten.

In bezug auf den zu erwartenden Verlauf der Bruchlinie wurden in den vorhergehenden Paragraphen (§ 60, Ziff. 4, § 61, § 62 und § 63) gewisse Betrachtungen angestellt, welche dazu führten, anzunehmen, daß diese Linie verlaufen werde

---

Berlin 1893, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1893, S. 489 u. f., S. 526 u. f.), „Berechnung von Schieberkastendeckeln“ u. s. w. (Protokoll der 21. Delegierten- und Ingenieur-Versammlung des internationalen Verbandes der Dampfkessel-Überwachungsvereine zu Nürnberg 1892, S. 84 u. f., oder auch Zeitschrift dieses Verbandes 1893, Berlin und Breslau, S. 1 u. f.; dieser Vortrag liefert gleichzeitig einen Beitrag zur Beurteilung des Grades der Verantwortlichkeit, die den einzelnen Ingenieur, dessen Konstruktionen infolge ungenügender Widerstandsfähigkeit ebener Wandungen zu einem Unfalle geführt haben, tatsächlich trifft), „Maschinenelemente“ 1891/92 (S. 512 u. f., S. 521 u. f., 1903 (9. Aufl.), S. 741 u. f., S. 762 u. f.), „Die Berechnung flacher durch Anker- oder Stehbolzen unterstützter Kesselwandungen und die Ergebnisse der neuesten hierauf bezüglichen Versuche“ (Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 2, Berlin 1894, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1894, S. 341 u. f., S. 373 u. f.), „Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung flacher Böden“ (Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 3, Berlin 1897, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 1157 u. f., S. 1191 u. f., S. 1218 u. f.), „Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung gewölbter Böden“ (Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 5, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 1585 u. f.). Der größte Teil der angeführten Arbeiten findet sich auch in des Verfassers „Abhandlungen und Berichte“ 1897.

Hiermit verwandte Aufgaben behandelt Verfasser in den Arbeiten: „Versuche über Flanschenverbindungen“ (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 321 u. f., S. 346 u. f., oder Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 4) und „Unfälle an Dampfgefäßen und die Beanspruchung der Zylinderwandungen solcher Gefäße auf Biegung durch die Flanschenverbindung“ (Zeitschrift des Bayerischen Dampfkessel-Revisionsvereines 1901, S. 1 u. f.).

1. bei der kreisförmigen Scheibe ungefähr nach einem Durchmesser,
2. - - elliptischen Platte ungefähr in Richtung der großen Achse,
3. - - quadratischen - - - - - Diagonale.
4. - - rechteckigen - - nach Maßgabe der Fig. 1, § 63.

Über den tatsächlichen Verlauf der Bruchlinie geben die Fig. 1 bis 9 im Text und Fig. 10 auf Taf. XIX Auskunft.

Zu Ziff. 1.

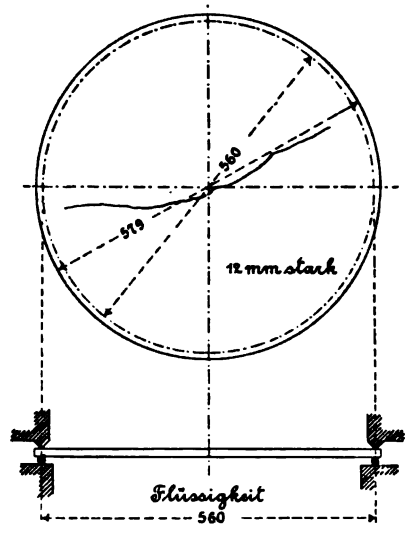


Fig. 1.

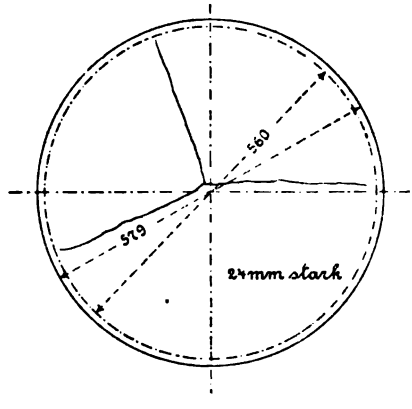


Fig. 2.

Fig. 1 zeigt die Bruchlinie einer gußeisernen Scheibe von 12 mm Stärke (immer auf der Seite der gezogenen Fasern). Andere Scheiben von derselben Stärke weisen ähnliche Bruchlinien auf. Die Scheibe ruht während des Versuchs auf einem Dichtungsring von weichem Kupfer (etwa 8 mm stark) und stützt sich oben gegen eine 2,5 mm breite Ringfläche von dem gleichen mittleren Durchmesser wie der Kupferring, nämlich 560 mm. Die Pressung zwischen der Scheibe und dem Kupferring muß natürlich so groß sein, daß die Abdichtung gesichert ist.

Fig. 2 gibt die Bruchlinie einer gußeisernen Scheibe von 24 mm Stärke wieder: sie verläuft ungefähr nach drei Halbmessern. Weitere Scheiben von dieser Stärke brachen in ähnlicher Weise.

Die der Prüfung unterworfenen Stahlscheiben bogen sich durch, ohne zu brechen.

Zu Ziff. 2.

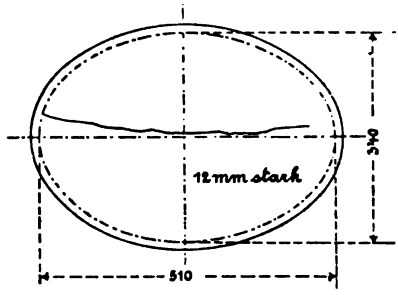


Fig. 3.

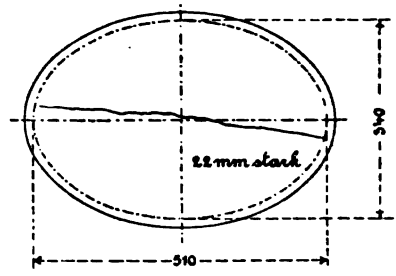


Fig. 4.

Wie die Fig. 3 und 4 (gußeiserne Platten) erkennen lassen, entspricht der Verlauf der Bruchlinien mit befriedigender Annäherung der gemachten Annahme, gleichgültig, ob die Platte mehr oder weniger stark ist.

Fig. 5 (Gußeisen) zeigt für die quadratische Platte das Zutreffen der gemachten Voraussetzung.

Die Fig. 6 bis 9 (Gußeisen $a : b = 2 : 3$ und $1 : 3$) entsprechen dem Ergebnis der stattgehabten Erwägung mehr oder minder.

Um ein getreues Bild der Formänderungen rechteckiger Platten zu erhalten, wurde eine solche aus Hartblei ($a = 360$ mm, $b = 240$ mm, $h = 20$ mm) hergestellt und ihre Oberfläche durch die Reißnadel mit einem Netz von Quadraten (je 10 mm Seitenlänge) versehen.

Zu Ziff. 3.

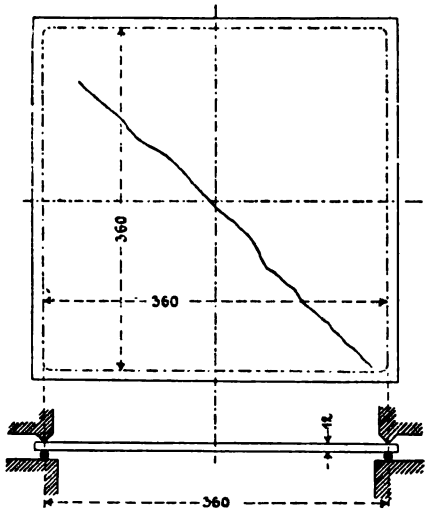


Fig. 5.

Zu Ziff. 4.

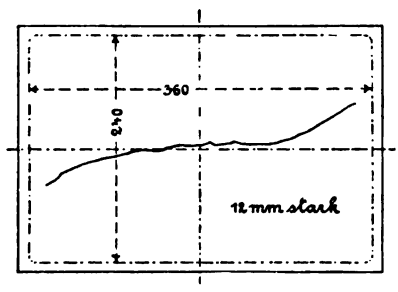


Fig. 6.

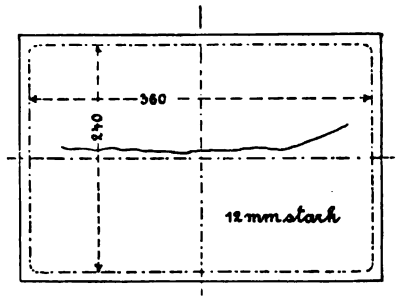


Fig. 7.

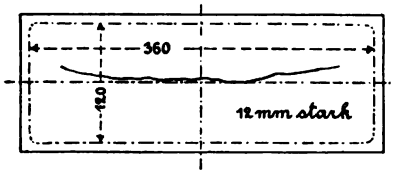


Fig. 8.

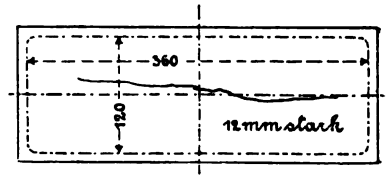


Fig. 9.

Fig. 10, Tafel XIX, gibt in ungefähr halber Größe die obere Fläche (Seite der gezogenen Fasern) mit der Bruchlinie wieder. Die Formänderung der ursprünglichen Quadrate zeigt volle Übereinstimmung mit der in § 62 angestellten Betrachtung, ebenso mit dem Ergebnisse, zu welchem wir in § 63 hinsichtlich des Verlaufs der Bruchlinie gelangt waren. Fig. 11, Tafel XX, stellt die untere Fläche (Seite der gedrückten Fasern) und Fig. 12, Tafel XVIII, die Seitenansicht dar. In diesen drei Abbildungen bietet sich dem Auge ein außerordentlich lehrreiches Bild über das Verhalten des Materials einer rechteckigen Platte an den verschiedenen Stellen bei Beanspruchung durch Flüssigkeitsdruck.

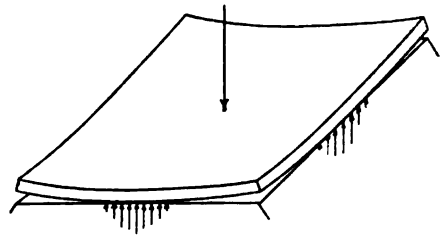
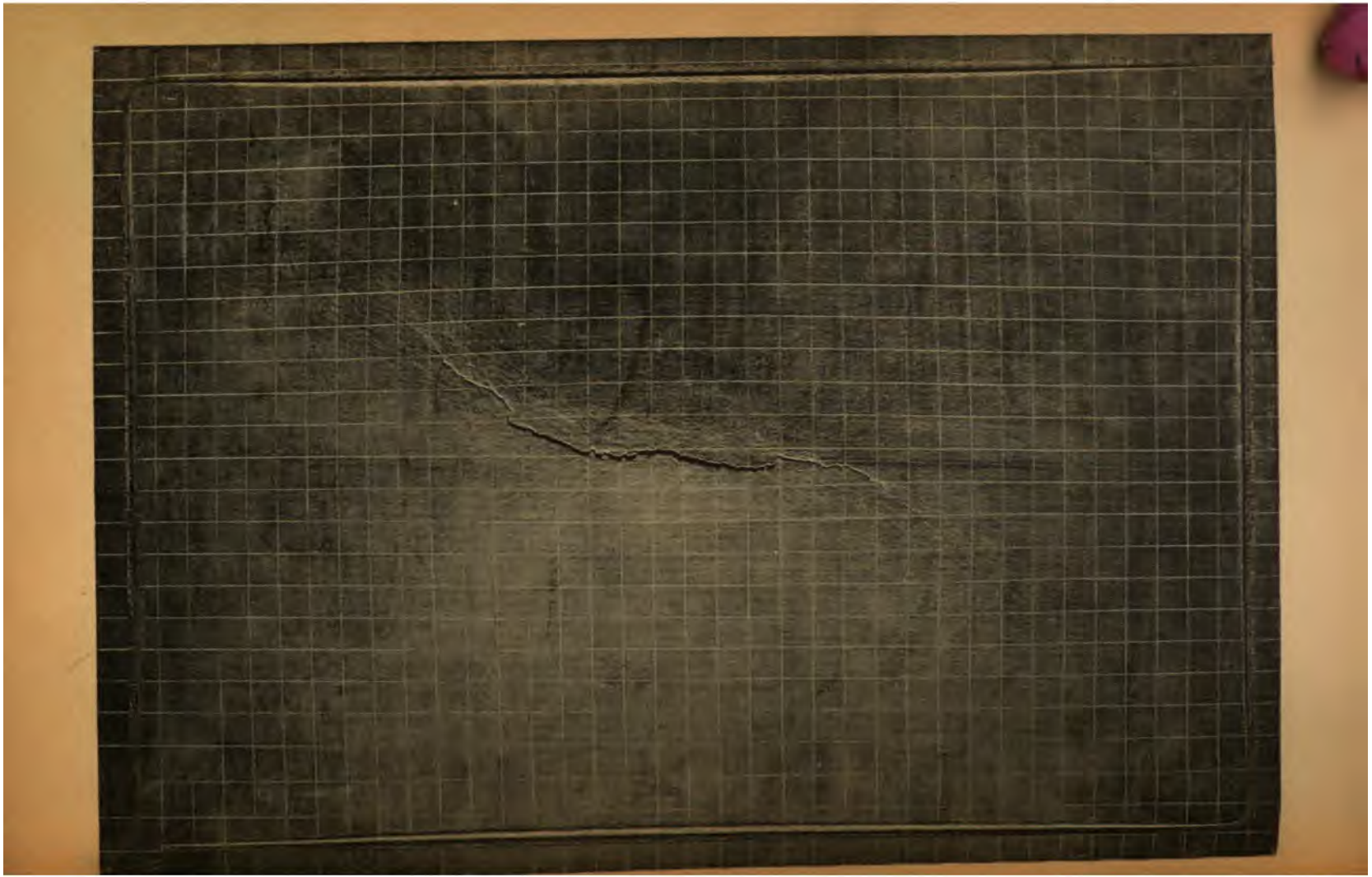
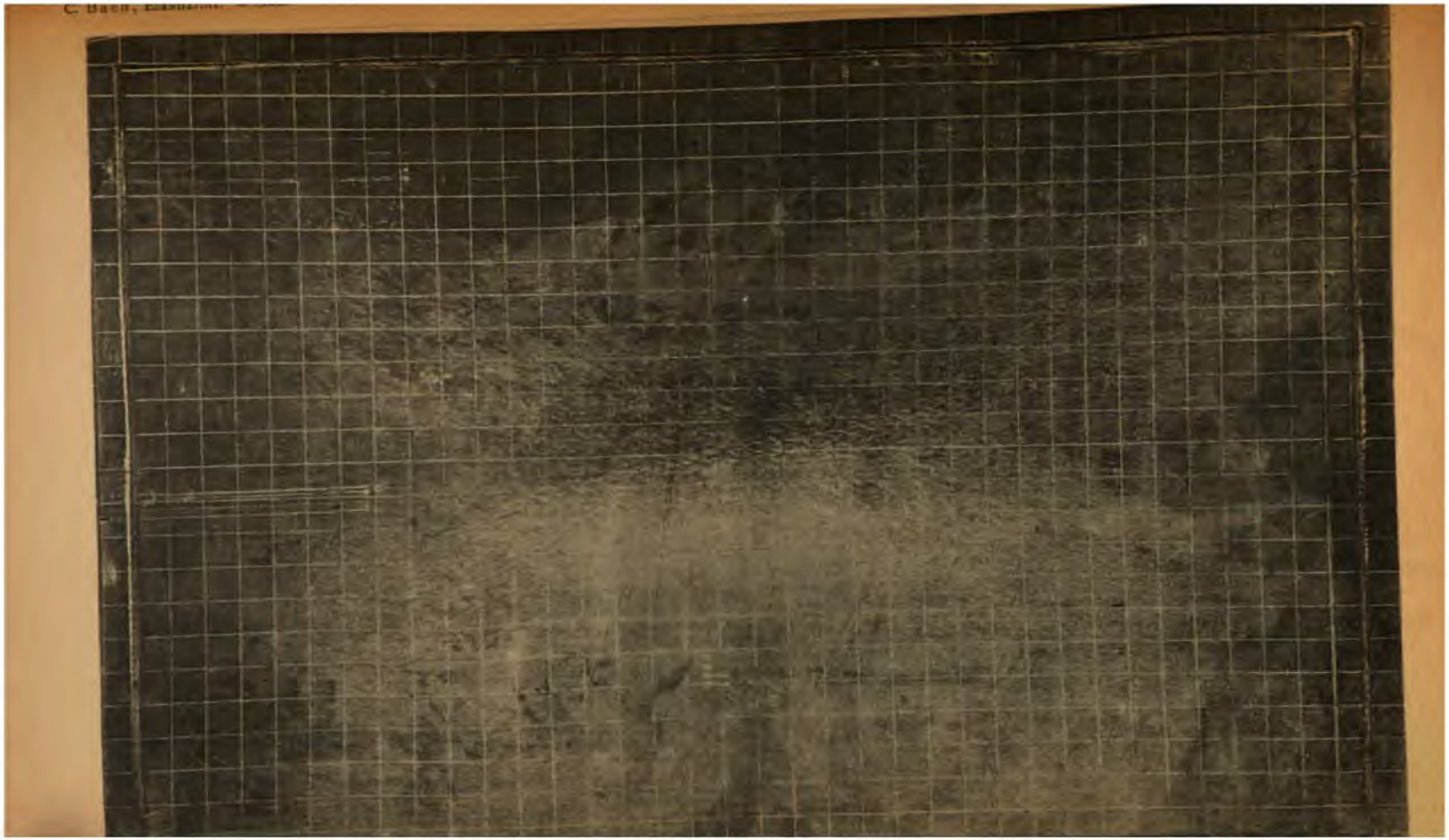


Fig. 13.

Wird eine rechteckige, sorgfältig bearbeitete Platte, welche das Widerlager im ganzen Umfange $2(a+b)$ berührt, in der Mitte belastet, so heben sich die Ecken sichtbar vom Widerlager ab, derart, daß in den vier Seiten nur der mittlere Teil aufliegt, wie dies Fig. 13 für eine quadratische Platte darstellt. Die Größe dieser in der Mitte jeder Umfangsseite liegenden Berührungsstrecke, innerhalb welcher die Pressung von der Mitte nach außen hin bis auf Null abnimmt, hängt von der Belastung ab und wird schließlich auch von der örtlichen Zusammendrückung beeinflußt, die das Material erfährt.

Das Lichtdruckbild, Fig. 10, Taf. XIX, zeigt durch das Auslaufen der Eindrückungen der Widerlager nach den Ecken hin deutlich die Abnahme der Pressung auch für den Fall gleichmäßig über die Platte verteilter Belastung durch Flüssigkeitsdruck; in der einen Ecke verschwindet die Eindrückung ganz, obgleich scharfes Anziehen der Schrauben des Versuchsapparates notwendig war, um die Abdichtung zu sichern. Der Auflager-





druck selbst ist in den Mitten der langen Seiten des Rechtecks größer als in denjenigen der kurzen Seiten; je mehr a von b abweicht, um so bedeutender fällt dieser Unterschied aus.

Fig. 14.

Hinsichtlich des Einflusses, welchen diese Veränderlichkeit der Widerlagspressung auf die Inanspruchnahme der etwaigen Befestigungsschrauben u. s. w. hat, sei auf die Fußbemerkung, S. 601 und 602 verwiesen.

Flache Böden mit Krempe sind in der Krempung am stärksten beansprucht. Der Bruch erfolgt dann, wenn es sich um Gußeisen handelt, und schlechte Stellen oder Gußspannungen nicht Einfluß nehmend auftreten, in der Krempung über den ganzen Umfang derart, daß der Boden herausgeschleudert wird. Fig. 14 zeigt die

Bruchfläche sowie das herausgesprungene Mittelstück und gibt in anschaulicher Weise Auskunft darüber, daß der am stärksten beanspruchte Querschnitt in der Krempung liegt[1]).

2. *Gesetz der Widerstandsfähigkeit.*

Die Beziehungen 18, 23, 30, 31 und 33, § 60; 3, 4 und 5, § 61; 1 und 2, § 62; 1 und 2, § 63, liefern übereinstimmend die Widerstandsfähigkeit **ebener** Platten proportional dem Quadrate der Stärke *h*. Die Versuche des Verfassers bestätigen die Richtigkeit dieses Gesetzes[2]).

Wenn sich bei Belastung von Platten durch Flüssigkeitsdruck, wobei diese zum Zwecke der Abdichtung stark angepreßt werden müssen, ergibt, daß stärkere Platten etwas weniger widerstandsfähig sind, als nach Maßgabe des quadratischen Verhältnisses der Wanddicken zu erwarten ist[3]), so liegt das in dem Einfluß der Abdichtungskraft, d. h. derjenigen Kraft, mit welcher die Platten behufs Abdichtung angepreßt werden müssen, wie dies bereits am Schlusse von § 60, Ziff. 3 dargelegt wurde.

Haben sich ebene, aus genügend zähem Material bestehende und am Umfange aufliegende oder derart befestigte Platten, daß die größte Anstrengung in der Plattenmitte eintritt, bleibend durchgebogen, sind sie also nicht mehr eben, sondern gewölbt, so besitzen sie in diesem gewölbten Zustande eine erheblich größere

---

[1]) Über diese Untersuchungen, welche sich auch auf Böden von Flußeisen beziehen, s. die S. 618 in der Fußbemerkung bezeichnete Schrift: „Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung flacher Böden".

Hinsichtlich gewölbter Böden liegt in rechnerischer Hinsicht eine wertvolle Arbeit von W. Schüle aus neuerer Zeit vor: „Festigkeit und Elastizität gewölbter Platten", Dinglers polyt. Journal 1900, Bd. 315, Heft 42. Über dahingehende Versuche s. Fußbemerkung S. 618.

[2]) Hierauf aufmerksam zu machen, erscheint um so mehr angezeigt, nachdem die Clarksche Berechnungsweise ebener Wandungen in neuerer Zeit auch in die deutsche Literatur (Häder, Bau und Betrieb der Dampfkessel 1893, S. 78 u. f.) übergegangen ist. Nach derselben wäre die Widerstandsfähigkeit einer ebenen Wand proportional der ersten Potenz von *h*. Eine Besprechung der Clarkschen Berechnung seitens des Verfassers findet sich Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1897, S. 1225 und 1226, sowie in „Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen", Heft 3, Berlin 1897.

[3]) Vergl. z. B. das S. 98 der „Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten" Gesagte im Zusammenhang mit der Feststellung auf S. 86 daselbst.

Widerstandsfähigkeit gegenüber ruhender Belastung als in ihrer ursprünglichen ebenen Form. Die Zähigkeit des Materials hat jedoch durch diese Überanstrengung abgenommen.

3. Schlußbemerkung.

Ein Blick über die in den §§ 60 bis 63 angewendete Methode des Verfassers zur Lösung der Aufgaben dieses Abschnittes läßt erkennen, daß sie darauf hinausläuft, die schwierigen Aufgaben, welche sich auf dem Gebiete der Inanspruchnahme plattenförmiger Körper bieten, auf einfache Biegungsaufgaben zurückzuführen unter Schaffung und Verwendung von Berichtigungskoeffizienten, welche aus Versuchen zu bestimmen sind. Die Methode ist keine streng wissenschaftliche; sie liefert aber, da sie sich in der bezeichneten Weise auf Versuche stützt, ausreichend zuverlässige Ergebnisse für die ausführende Technik und ermöglicht die Berechnung überdies jedem Techniker, welcher auf der technischen Mittelschule gebildet ist. Indem Verfasser diesen Weg einschlug, glaubte er den Interessen nicht bloß der Industrie, sondern der gesamten Technik wie auch denjenigen der Allgemeinheit, die ein Anrecht auf Sicherheit hat — auch dann, wenn es der Wissenschaft noch nicht gelungen ist, eine genaue Berechnung der hier zur Erörterung stehenden Anstrengung der Materialien zu liefern — am meisten zu nützen, wenigstens so lange, bis es gelingt, Vollkommeneres ausfindig zu machen.

Achter Abschnitt.

Allgemeine Beziehungen über Spannungen und Formänderungen im Innern eines elastischen Körpers.

§ 65. Spannungen in einem beliebigen Punkte eines festen Körpers.

1. Begriff der Normal- und Tangential- oder Schubspannung.

Wir legen durch den in Fig. 1 dargestellten und von äußeren Kräften SS ergriffenen Körper, welche sich an ihm das Gleichgewicht halten, eine Schnittfläche F. Es sei nun P ein Punkt

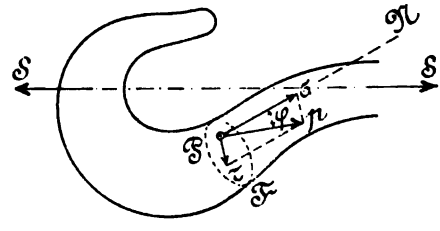


Fig. 1.

dieser Fläche, PN die Normale im Punkte P und p die Spannung im Punkte P der Fläche F, d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft, welche der an die Fläche F angrenzende und im Sinne der Normalen PN gelegene Körperteil im Punkte P, d. i. in dem Flächenelement, das den Punkt P enthält, auf den jenseits der Fläche F gelegenen ausübt.

Im allgemeinen wird die Richtung der Spannung p von der Richtung der Normalen PN abweichen. Der Winkel zwischen p und PN, also $\sphericalangle\, p\,P\,N$, sei mit φ bezeichnet.

Die Zerlegung von p normal und tangential zur Schnittfläche liefert die beiden Komponenten

$$\sigma = p \cos \varphi \qquad \text{und} \qquad \tau = p \sin \varphi.$$

Die Komponente σ, in die Richtung der Normalen fallend, heißt die Normalspannung im Punkte P der Fläche F. Sie ist positiv oder negativ, je nachdem $\varphi \lesseqgtr 90^0$. Im ersteren Falle nennt man sie eine Zugspannung oder Spannung im engeren Sinne des Wortes, im letzteren eine Pressung, einem gegenseitigen Zug bezw. Druck der durch F getrennten Körperteile entsprechend.

Die zweite Komponente τ fällt in die Tangentialebene des Punktes P der Fläche F und wird deshalb als Tangential- oder Schubspannung im Punkte P der Fläche F bezeichnet.

Im allgemeinen wird die Spannung von Flächenelement zu Flächenelement sich ändern, also ein bestimmter Wert von p (bezw. σ und τ) jeweils nur für das in Betracht gezogene Flächenelement dF gelten.

2. Spannungen in drei zueinander senkrechten Ebenen.

Wir stellen uns den betrachteten Körper auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen OX, OY und OZ bezogen

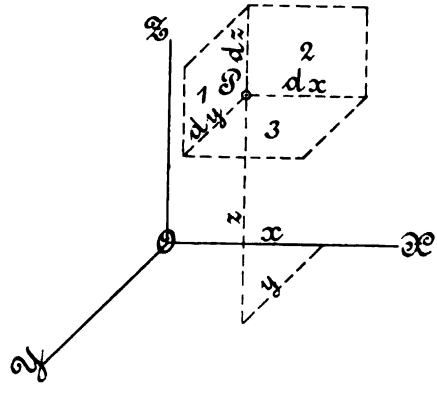


Fig. 2.

vor, Fig. 2. Der beliebige Punkt P des Körpers besitze die Koordinaten x, y, z. Durch P legen wir parallel zu den 3 Koordinatenebenen Schnitte, von denen die unendlich kleinen Flächenelemente

1 mit der Größe $dy\,dz$,
2 - - - $dz\,dx$,
3 - - - $dx\,dy$

ins Auge gefaßt werden sollen.

Die Spannungen in diesen Flächenelementen seien

$$p_x \qquad p_y \qquad p_z.$$

Unter Bezugnahme auf die Figuren 3 bis 5 heißt das folgendes.

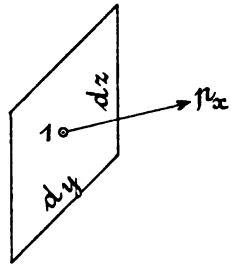


Fig. 3.

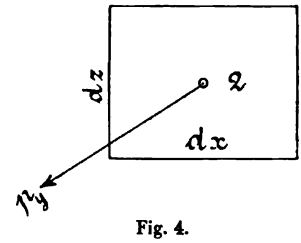


Fig. 4.

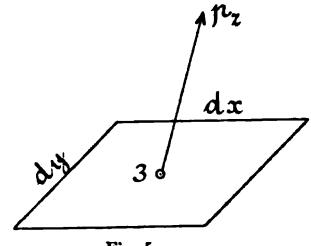


Fig. 5.

p_x ist die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft, mit welcher die diesseits des Flächenelementes $dy\,dz$ gelegenen Körperteile in diesem Element auf die jenseits gelegenen einwirken. Wie ersichtlich, deutet das Fußzeichen x von p_x an, daß das Flächenelement, in welchem p_x tätig ist, senkrecht zur Richtung der x-Achse steht.

p_y ist die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft, mit welcher die diesseits des Flächenelementes $dz\,dx$ gelegenen Körperteile

in diesem Element auf die jenseits gelegenen einwirken. Das Fußzeichen y von p_y spricht aus, daß das Flächenelement, in welchem p_y wirksam ist, senkrecht zur Richtung der y-Achse steht.

Für p_z gilt sinngemäß dasselbe wie für p_x und p_y.

Die Spannungen p_x, p_y und p_z besitzen im allgemeinen eine beliebige Neigung gegen die zugehörigen Flächenelemente; sie liefern demgemäß bei Zerlegung Normalspannungen und Schubspannungen, wie Fig. 6 bis 8 erkennen lassen.

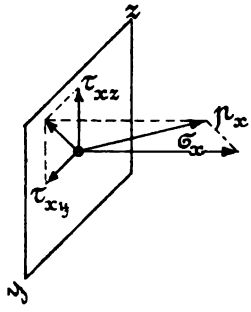


Fig. 6.

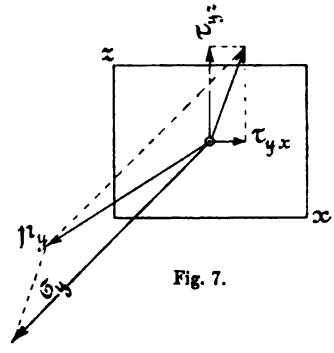


Fig. 7.

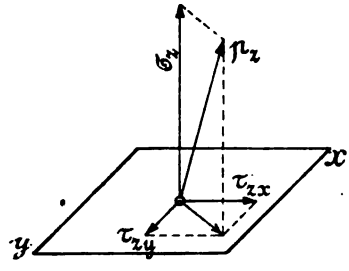


Fig. 8.

p_x (Fig. 6) ergibt die Normalspannung σ_x und eine Schubspannung, welche wir nach den Richtungen der y und z nochmals zerlegen. Die erstere dieser Schubspannungen sei mit τ_{xy}, die letztere mit τ_{xz} bezeichnet. Das Fußzeichen x bei diesen 3 Komponenten deutet an, daß es sich um Spannungen in demjenigen

Flächenelement handelt, welches senkrecht zur x-Achse steht; σ_x als Normalspannung läuft dann parallel mit der x-Achse, während τ_{xy} und τ_{xz} senkrecht dazu gerichtet sind. Das Fußzeichen y in τ_{xy} spricht aus, daß τ_{xy} parallel zur y-Achse gerichtet ist, das Fußzeichen z in τ_{xz}, daß τ_{xz} die Richtung der z-Achse besitzt. Hiernach bestimmt bei den beiden Schubspannungen das erste Fußzeichen das Flächenelement im Punkte P, für welches die Spannungen gelten, das zweite die Richtung, welche die betreffende Spannung besitzt.

In gleicher Weise ergibt

p_y (Fig. 7) die Komponenten $\sigma_y\ \tau_{yz}\ \tau_{yx}$,
p_z (Fig. 8) die Komponenten $\sigma_z\ \tau_{zx}\ \tau_{zy}$.

Demzufolge erhalten wir

im Flächenelement $dy\,dz$ p_x mit den Komponenten $\sigma_x\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}$,
- - $dz\,dx$ p_y - - - $\tau_{yx}\ \sigma_y\ \tau_{yz}$,
- - $dx\,dy$ p_z - - - $\tau_{zx}\ \tau_{zy}\ \sigma_z$
nach den Richtungen der x- y- z-Achse.

3. *Gleichgewicht der Kräfte an einem unendlich kleinen Parallelepiped.*

Mit P als Eckpunkt denken wir uns in dem betrachteten Körper ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Kanten dx, dy, dz sind, Fig. 9. Auf dasselbe werden die jenseits der Ebenen BPC, CPA und APB gelegenen Körperteile einwirken, und zwar

1. im Flächenelement $dy\,dz$ mit den Spannungen $-\sigma_x\ -\tau_{xy}\ -\tau_{xz}$,
2. - - $dz\,dx$ - - - $-\tau_{yx}\ -\sigma_y\ -\tau_{yz}$,
3. - - $dx\,dy$ - - - $-\tau_{zx}\ -\tau_{zy}\ -\sigma_z$.

d. h. mit den Kräften

1. $-\sigma_x\,dy\,dz - \tau_{xy}\,dy\,dz - \tau_{xz}\,dy\,dz$,
2. $-\tau_{yx}\,dz\,dx - \sigma_y\,dz\,dx - \tau_{yz}\,dz\,dx$,
3. $-\tau_{zx}\,dx\,dy - \tau_{zy}\,dx\,dy - \sigma_z\,dx\,dy$.

Da die Flächenelemente unendlich klein sind, also die soeben ermittelten Kräfte als gleichmäßig über die Flächenelemente ver-

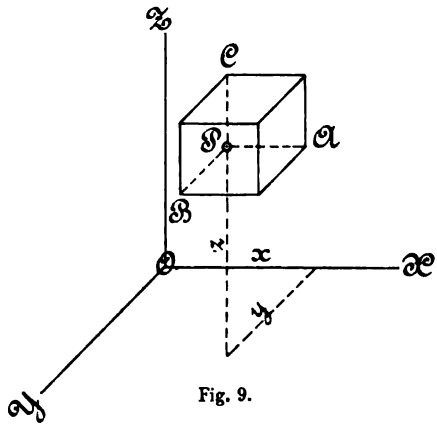


Fig. 9.

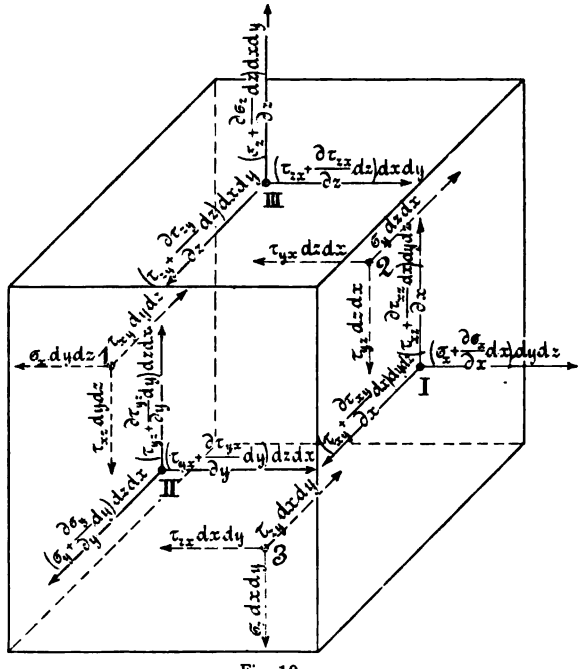


Fig. 10.

teilt angenommen werden dürfen, so haben wir uns die Kräfte selbst als in den Schwerpunkten der 3 Flächen *BPC*, *CPA* und

APB angreifend vorzustellen. In Fig. 10 sind diese 9 Kräfte an den bezeichneten Punkten 1, 2 und 3 eingetragen. In den drei übrigen Begrenzungsflächen des Parallelepipeds, welche um dx, dy, dz von den bereits behandelten abstehen, und deren Schwerpunkte in Fig. 10 mit I, II und III bezeichnet sind, wirken ebenfalls Kräfte, die von den diesseits der Flächen gelegenen Körperteilen ausgehen und deshalb in entgegengesetzter Richtung tätig anzunehmen sind. Hinsichtlich der absoluten Größe dieser Kräfte ist zu beachten, daß sich die Kräfte in I von denjenigen in 1 unterscheiden müssen um die Änderungen, welche die letzteren beim Fortschreiten lediglich um dx in dem Körper erfahren, d. h. die absoluten Größen der Kräfte, welche oben unter 1 angegeben wurden, werden in I betragen

$$\sigma_x\, dy\, dz + \frac{\partial(\sigma_x\, dy\, dz)}{\partial x}\, .\, dx = \left(\sigma_x + \frac{\partial\, \sigma_x}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz$$

$$\tau_{xy}\, dy\, dz + \frac{\partial(\tau_{xy}\, dy\, dz)}{\partial x}\, .\, dx = \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\, \tau_{xy}}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz$$

$$\tau_{xz}\, dy\, dz + \frac{\partial(\tau_{xz}\, dy\, dz)}{\partial x}\, .\, dx = \left(\tau_{xz} + \frac{\partial\, \tau_{xz}}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz.$$

In ganz gleicher Weise ergeben sich die Kräfte in II, da es sich hierbei nur um ein Fortschreiten um dy handelt und in III gemäß dem Fortschreiten um dz.

In Fig. 10 sind diese 9 Kräfte, angreifend an den Punkten I, II und III, gleichfalls eingetragen.

Außer den 18 Flächenkräften, zu denen uns die Betrachtung geführt hat, sind noch Massenkräfte zu berücksichtigen: die Schwerkraft und bei bewegten Körpern der Trägheitswiderstand, z. B. bei gleichförmig und rasch umlaufenden Zylindern oder Ringen die Fliehkraft. Die Komponenten dieser Massenkräfte nach den 3 Achsrichtungen seien für die Volumeinheit X, Y, Z, also die Seitenkräfte für das Volumen $dx\, dy\, dz$

$$X\, dx\, dy\, dz \qquad Y\, dx\, dy\, dz \qquad Z\, dx\, dy\, dz.$$

Dieselben sind als im Schwerpunkt des Parallelepipeds angreifend zu denken.

Diese 21 Kräfte müssen sich im Gleichgewicht befinden, also die bekannten 6 Gleichgewichtsbedingungen: je Summe der Kräfte in den 3 Achsrichtungen gleich Null, je Summe der Momente in bezug auf die 3 Achsen oder zu ihnen parallele Drehachsen gleich Null, erfüllen.

Die drei ersten Bedingungen führen nach Division durch $dx\,dy\,dz$ zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

Bei Aufstellung der Momentengleichung in bezug auf die zur x-Achse parallele Schwerpunktsachse des Parallelepipeds erkennt man, daß Momente nicht liefern:

a) sämtliche in den Punkten 1 und I angreifenden Kräfte,

b) die in den Punkten 2 und II angreifenden Kräfte:

$$-\tau_{yx}\,dz\,dx - \sigma_y\,dz\,dx \qquad \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dy\right) dz\,dx \qquad \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dy\right) dz\,dx,$$

c) die in den Punkten 3 und III angreifenden Kräfte:

$$-\tau_{zx}\,dx\,dy - \sigma_z\,dx\,dy \qquad \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy \qquad \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy,$$

d) die Massenkräfte.

Es verbleiben somit nur die in Fig. 11 (Schnitt durch den Schwerpunkt senkrecht zur x-Achse) eingetragenen Kräfte, welche als Momentengleichung ergeben

$$\tau_{yz}\,dz\,dx\,.\,\frac{dy}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\,\tau_{yz}}{\partial y}\,dy\right)dz\,dx\,.\,\frac{dy}{2}-\tau_{zy}\,dx\,dy\,.\,\frac{dz}{2}$$

$$-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\,\tau_{zy}}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy\,.\,\frac{dz}{2}=0,$$

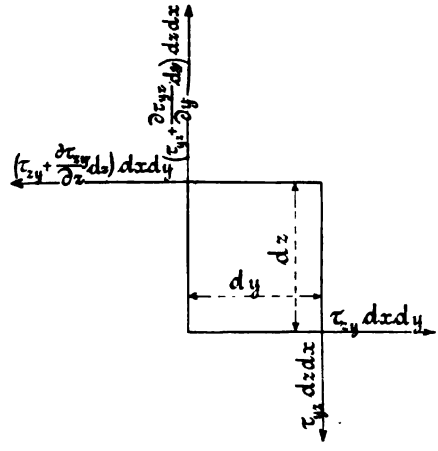


Fig. 11.

woraus bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen vierter Ordnung gegenüber denjenigen dritter Ordnung folgt

$$\tau_{yz}\,dx\,dy\,dz-\tau_{zy}\,dx\,dy\,dz=0$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}\,.$$

In gleicher Weise liefert die Aufstellung der Momentengleichungen in bezug auf die zur y- und zur z-Achse parallelen Schwerpunktsachsen die Beziehungen

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}\qquad\tau_{xy}=\tau_{yx}\,.$$

Wir erkennen, daß je die beiden zu einer Kante des Parallelepipeds senkrechten Schubspannungen (vergl. Fig. 12—14) einander gleich sind, daß sie also immer paarweise auftreten und in Hinsicht auf die betreffende Kante übereinstimmend (nach derselben hin oder von ihr weg) gerichtet sind.

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \tau_x \\ &\text{entsprechend dem Umstande, daß die beiden Schub-} \\ &\text{spannungen senkrecht zur } x\text{-Kante gerichtet sind,} \\ &\text{und ebenso} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \tau_y \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \tau_z \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

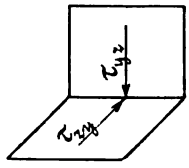


Fig. 12.

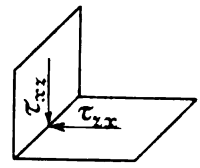


Fig. 13.

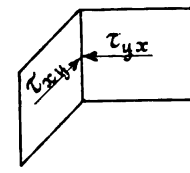


Fig. 14.

Durch Einführung der Gleichungen 2 in die Gleichungen 1 wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 3)$$

4. Gleichgewicht der Kräfte an einem unendlich kleinen Tetraeder.

Durch die Punkte ABC des Parallelepipeds (Fig. 9) legen wir eine Ebene und bilden so ein Tetraeder $PABC$, Fig. 15, dessen Volumen mit dV bezeichnet werde. Die Größe der Fläche ABC sei F, die Stellungswinkel derselben seien mit α, β und γ bezeichnet, d. h.

α ist der Winkel zwischen der Ebene ABC und der Ebene BPC,
β - - - - - - - - - - - CPA,
γ - - - - - - - - - - - APB,

so daß

$$BPC = F\cos\alpha, \quad CPA = F\cos\beta, \quad APB = F\cos\gamma.$$

Auf diese 3 Flächenelemente wirken die jenseits derselben gelegenen Körperteile mit den in der Fig. 15 eingetragenen Spannungen ein. Die Spannung, welche die diesseits des Flächen-

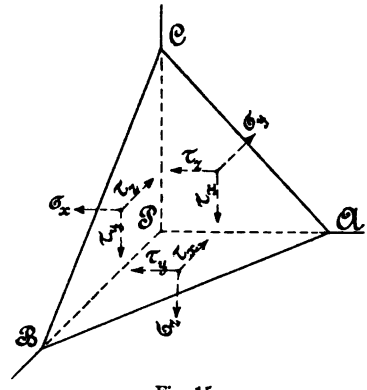


Fig. 15.

elementes ABC gelegenen Körperteile auf das Tetraeder ausüben, sei p, ihre Richtungswinkel gegenüber den Koordinatenachsen seien λ, μ, ν. Dann ergeben sich in Richtung der letzteren die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
&-\sigma_x . F\cos\alpha - \tau_z F\cos\beta - \tau_y F\cos\gamma + p F\cos\lambda + X\,dV = 0\\
&-\tau_z . F\cos\alpha - \sigma_y F\cos\beta - \tau_x F\cos\gamma + p F\cos\mu + Y\,dV = 0\\
&-\tau_y . F\cos\alpha - \tau_x F\cos\beta - \sigma_z F\cos\gamma + p F\cos\nu + Z\,dV = 0.
\end{aligned}$$

Die 4 ersten Glieder in jeder dieser Gleichungen sind unendlich klein zweiter Ordnung, das letzte Glied wegen dV unendlich klein dritter Ordnung, kann deshalb gegenüber den 4 ersten Gliedern vernachlässigt werden, somit

$$\left.\begin{aligned}
p\cos\lambda &= \sigma_x\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma\\
p\cos\mu &= \tau_z\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_x\cos\gamma\\
p\cos\nu &= \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 4)$$

Außerdem besteht die bekannte Beziehung

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Wir haben hiernach 4 Gleichungen und sind damit in der Lage, bei gegebenen Werten von $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ für das beliebige durch α, β, γ bestimmte Flächenelement die Spannung p und ihre Richtungswinkel λ, μ, ν zu ermitteln.

An diesen Verhältnissen ändert sich nichts, wenn wir das Flächenelement immer näher an P heranrücken und schließlich mit P zusammenfallen lassen. Dann aber wird p die Spannung im Punkte P einer beliebig durch ihn hindurchgehenden Fläche, deren Tangentialebene im Punkte P die Stellungswinkel α, β, γ besitzt, oder deren Normale im Punkte P die Richtungswinkel α, β, γ aufweist, d. h. die Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ bestimmen die Größe und Richtung der Spannung p, welche im Punkte P einer beliebig durch ihn hindurchgehenden Fläche herrscht.

An die Stelle der Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ können auch deren Resultanten p_x, p_y, p_z treten (vergl. oben Ziff. 2).

5. *Geometrische Darstellung der Spannungen.*

Denken wir uns die durch den Punkt P des Körpers gehende Fläche F der vorigen Betrachtung verschiedene Lagen einnehmend, also ihre Stellungswinkel α, β, γ geändert, so wird sich auch die Spannung p im Punkte P dieser Fläche sowohl der Größe als auch der Richtung nach ändern. Um uns das Gesetz, nach welchem diese Änderungen vor sich gehen, zu veranschaulichen, tragen wir auf jeder möglichen Spannungsrichtung vom Punkte P aus die Spannung $p = \overline{PQ}$ auf und bestimmen nun die Gleichung der Fläche, welche den geometrischen Ort der Endpunkte Q bildet.

P, Fig. 16, sei der Koordinatenanfang, die Richtungen der Spannungen p_x, p_y, p_z seien die Koordinatenachsen für die gesuchte Flächengleichung. Da dieselben im allgemeinen schiefe Winkel miteinander einschließen, so wird das System ein schiefwinkliges sein. Die Koordinaten des Punktes Q seien x', y', z'. In Fig. 16 sind überdies die Richtungen PX, PY, PZ der Achsen des früher

angenommenen rechtwinkligen Koordinatensystems strich-punktiert eingetragen. Es sei

λ der Winkel zwischen PX und p,
λ_x - - - - - p_x,
λ_y - - - - - p_y,
λ_z - - - - - p_z.

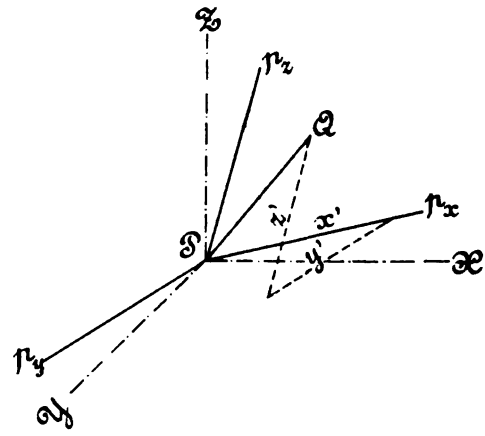


Fig. 16.

x', y' und z' geben die Komponenten von $p = \overline{PQ}$ nach den Richtungen p_x, p_y und p_z. Die in der Richtung PX genommene Spannung p muß demnach gleich sein der Summe der nach PX genommenen Komponenten x', y', z', d. h.

$$p \cos \lambda = x' \cos \lambda_x + y' \cos \lambda_y + z' \cos \lambda_z .$$

Unter Beachtung der Figuren 6 bis 8 findet sich

$$\cos \lambda_x = \frac{\sigma_x}{p_x}, \quad \cos \lambda_y = \frac{\tau_z}{p_y}, \quad \cos \lambda_z = \frac{\tau_y}{p_z},$$

folglich

$$p \cos \lambda = \sigma_x \frac{x'}{p_x} + \tau_z \frac{y'}{p_y} + \tau_y \frac{z'}{p_z}$$

und mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen 4

$$\sigma_x \cos\alpha + \tau_z \cos\beta + \tau_y \cos\gamma = \sigma_x \frac{x'}{p_x} + \tau_z \frac{y'}{p_y} + \tau_y \frac{z'}{p_z},$$

also

$$\cos\alpha = \frac{x'}{p_x}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{p_y}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{p_z}$$

und wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{x'}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{y'}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{z'}{p_z}\right)^2 = 1, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

d. i. die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoides in bezug auf die konjugierten Halbmesser p_x, p_y, p_z als Achsen. Wir kommen damit zu dem Satz:

Stellt man die Spannungen, welche in einem Punkte P des betrachteten Körpers für alle durch diesen Punkt möglichen Schnittflächen auftreten, nach Größe und Richtung durch Gerade dar, die von P ausgehen, so liegen die Endpunkte dieser Fahrstrahlen auf einem Ellipsoid.

Die Spannungen in drei zu einander senkrechten Ebenen sind konjugierte Halbmesser des Ellipsoides.

Dieses Ellipsoid wird als Spannungsellipsoid bezeichnet[1]).

6. *Hauptspannungen.*

Weicht die Spannung p im Punkte P der Fläche F von der Normalen PN in diesem Punkte um den Winkel φ ab, so ist die Normalspannung $\sigma = p\cos\varphi$, und da zwischen φ, den Richtungswinkeln α, β, γ der Normalen und den Richtungswinkeln λ, μ, ν von p die bekannte Beziehung

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$

besteht,

$$\sigma = p\cos\alpha\cos\lambda + p\cos\beta\cos\mu + p\cos\gamma\cos\nu,$$

[1]) Siehe die Mohrsche Darstellung der Spannungen und Formänderungen in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1900, S. 1524 u. f.

woraus unter Berücksichtigung der Gleichungen 4 folgt

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\,\tau_x \cos\beta \cos\gamma + 2\,\tau_y \cos\gamma \cos\alpha + 2\,\tau_z \cos\alpha \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Zur geometrischen Deutung dieser Gleichung tragen wir auf der Normalen von P aus eine Strecke $\overline{PN} = \frac{1}{\sqrt{\pm\sigma}}$ ab, also gleich dem reziproken Wert der Quadratwurzel aus dem Absolutwert von σ. Dann sind die Koordinaten des Endpunktes N

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\pm\sigma}}, \quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\pm\sigma}}, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\pm\sigma}}.$$

Die Einführung der hieraus folgenden Werte von $\cos\alpha$ $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ in Gl. 6 gibt

$$\pm 1 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\,\tau_x yz + 2\,\tau_y zx + 2\,\tau_z xy, \quad . \quad 7)$$

d. i. die Mittelpunktsgleichung einer Fläche zweiten Grades. Eine derartige Fläche hat drei zueinander senkrechte Hauptachsen, für welche, wenn sie zu Koordinatenachsen gewählt werden, die Glieder mit den Produkten der Koordinaten aus der Flächengleichung verschwinden, für die alsdann

$$\tau_x = 0 \qquad \tau_y = 0 \qquad \tau_z = 0$$

ist. In den drei zueinander senkrechten Ebenen, für welche die Schubspannungen Null werden, müssen alsdann die Spannungen p_x, p_y, p_z Normalspannungen sein und senkrecht zueinander stehen. Wir erkennen, daß es in jedem Punkte P des Körpers drei zueinander senkrechte Ebenen gibt, in denen keine Schubspannungen, sondern nur Normalspannungen auftreten.

Diese drei Normalspannungen werden die Hauptspannungen im Punkte P genannt; sie seien mit

$$\sigma_1 \qquad \sigma_2 \qquad \sigma_3$$

bezeichnet. Sie fallen mit den Hauptachsen des Spannungsellipsoides zusammen; denn sie wirken in drei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen, stehen senkrecht zueinander und sind konjugierte Halbmesser des Spannungsellipsoides. Hieraus folgt weiter, daß die Hauptspannungen die größte und die kleinste Spannung im Punkte P unter sich enthalten.

Sind für ein beliebig gewähltes rechtwinkliges Koordinatensystem die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z gegeben, so lassen sich die drei Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 auf folgende Weise bestimmen.

Wenn p im Punkte P der Fläche F eine Hauptspannung ist, so muß sie gleichzeitig Normalspannung sein; demnach müssen ihre Richtungswinkel λ, μ, ν gleich den Richtungswinkeln α, β, γ der Normalen im Punkte P der Fläche F sein. Aus den Gleichungen 4 folgt dann mit

$$p = \sigma \qquad \lambda = \alpha \qquad \mu = \beta \qquad \nu = \gamma$$

$$\begin{aligned}
\sigma \cos\alpha &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_z \cos\beta + \tau_y \cos\gamma,\\
\sigma \cos\beta &= \tau_z \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_x \cos\gamma,\\
\sigma \cos\gamma &= \tau_y \cos\alpha + \tau_x \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma.
\end{aligned}$$

Nach Beseitigung von $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ findet sich

$$\begin{aligned}
&\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,\sigma^2 + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2)\,\sigma\\
&\quad - \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_x^2 + \sigma_y\tau_y^2 + \sigma_z\tau_z^2 - 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0. \quad . \quad 8)
\end{aligned}$$

Die 3 Wurzeln dieser kubischen Gleichung geben die Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3.

Nach der Lehre von den kubischen Gleichungen ist

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

d. h. die (algebraische) Summe der Normalspannungen im Punkte P ist nach je drei sich rechtwinklig schneidenden Richtungen gleich der Summe der Hauptspannungen, somit unveränderlich.

Fällt in Gl. 8 das Absolutglied Null aus, d. h. ist

$$-\sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_x^2 + \sigma_y\tau_y^2 + \sigma_z\tau_z^2 - 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0 \quad . \quad 9)$$

so wird die eine Wurzel, etwa $\sigma_3 = 0$. Das Spannungsellipsoid

schrumpft auf eine Ellipse, die Spannungsellipse, zusammen, deren Halbmesser σ_1 und σ_2 sind und als Wurzeln der Gleichung

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,\sigma + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0 \quad 10)$$

erhalten werden.

§ 66. Formänderungen in einem beliebigen Punkte eines festen Körpers.

Daß im allgemeinen zweierlei Formänderungen zu unterscheiden sind: Längen- und Winkeländerungen, entsprechend Dehnungen und Schiebungen oder Gleitungen, ist bereits in § 28 dargelegt worden.

1. Die Dehnungen nach einer beliebigen Richtung als Funktion von den Dehnungen dreier ursprünglich zueinander senkrechter Richtungen und von Änderungen der Winkel dreier ursprünglich sich rechtwinklig schneidender Ebenen.

In Fig. 1 seien

P ein beliebiger Punkt des festen Körpers,

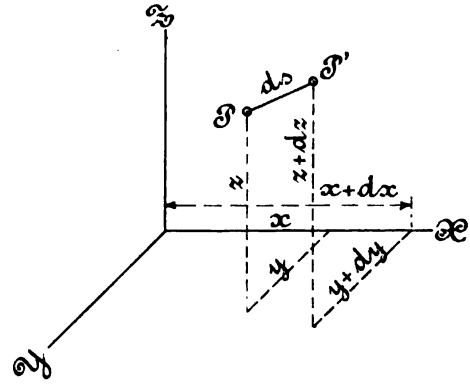


Fig. 1.

x, y, z dessen Koordinaten vor der Formänderung,

P' ein dem Punkte P unendlich nahe gelegener zweiter Punkt desselben Körpers,

$x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ dessen Koordinaten vor der Formänderung,

$PP' = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ die Entfernung der beiden Punkte vor der Formänderung,

α, β, γ die Richtungswinkel der Strecke ds.

Unter Einwirkung der den Körper belastenden Kräfte werden folgende Änderungen eintreten:

ds geht über in $ds + \Delta ds$, ändert sich also um $\Delta ds = \varepsilon ds$, sofern $\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds}$ die verhältnismäßige (spezifische) Längenänderung oder kurz Dehnung im Punkte P nach der Richtung, in welcher die Strecke gemessen wurde, bedeutet;

die Koordinaten	x	y	z
gehen über in	$x + \xi$	$y + \eta$	$z + \zeta$,
ändern sich also um	ξ	η	ζ.

Die Änderungen, welche die Koordinaten des Punktes P' erfahren, seien mit ξ_1, η_1, ζ_1 bezeichnet. Für sie ergeben sich die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \\ \eta_1 &= \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz \\ \zeta_1 &= \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 1)$$

Die Projektionen der Strecke $\overline{PP'} = ds$ waren vor der Formänderung

$$dx \qquad dy \qquad dz.$$

Sie haben sich infolge der Formänderung geändert um

$$\xi_1 - \xi \qquad \eta_1 - \eta \qquad \zeta_1 - \zeta.$$

Die Strecke ds hat sich geändert um $\varepsilon\, ds$, so daß aus ihr

$$ds + \varepsilon\, ds = (1 + \varepsilon)\, ds$$

geworden ist. Folglich muß sein

$$(1 + \varepsilon)^2\, ds^2 = (dx + \xi_1 - \xi)^2 + (dy + \eta_1 - \eta)^2 + (dz + \zeta_1 - \zeta)^2.$$

Unter der Voraussetzung, daß ε ein sehr kleiner Bruch ist, darf $\varepsilon^2\, ds^2$ gegenüber $2\,\varepsilon\, ds^2$ vernachlässigt werden. Da ferner $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$ und $\zeta_1 - \zeta$ als die sehr kleinen Änderungen unendlich kleiner Größen anzusehen sind, so können die Quadrate dieser Änderungen gegenüber den anderen Summanden ebenfalls vernachlässigt werden. Daraus folgt

$$\varepsilon = \frac{\xi_1 - \xi}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{\eta_1 - \eta}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{\zeta_1 - \zeta}{ds}\frac{dz}{ds}.$$

Nach Einführung der Werte von $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$ und $\zeta_1 - \zeta$, welche sich aus den Gleichungen 1 ergeben, und mit

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \qquad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

findet sich

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma$$

$$+ \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta. \quad . \quad . \quad 2)$$

Für $\alpha = 0$, d. h. wenn ds parallel zur x-Achse, werde ε mit ε_x bezeichnet; dann findet sich wegen $\beta = 90^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}$$

und ebenso für $\beta = 0$ bezw. $\gamma = 0$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial\eta}{\partial y} \quad \text{bezw.} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

d. h. die Koeffizienten der Glieder mit den Kosinusquadraten in der Gleichung 2, also die partiellen Differentialquotienten von ξ nach x,

von η nach y und ζ nach z sind die Dehnungen im Punkte P nach den Richtungen der Koordinatenachsen.

Zur Ermittlung der Bedeutung des Koeffizienten der Glieder mit den Kosinusprodukten ziehen wir in dem ursprünglichen Zustande des Körpers von dem beliebigen Punkte aus parallel zu den Koordinatenachsen Gerade und tragen auf ihnen die unendlich kleinen Strecken dx, dy, dz ab. In Fig. 2 (Schnitt senkrecht zur x-Achse) sei die ursprüngliche Lage des Punktes mit P_0 bezeichnet, seine Koordinaten seien y und z, ferner $\overline{P_0B_0} = dy$ und

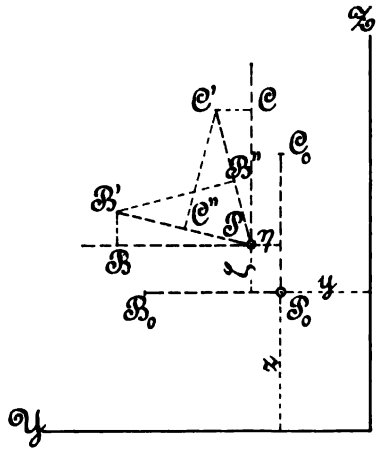


Fig. 2.

$\overline{P_0C_0} = dz$. Infolge der Formänderung ändern sich y und z um η bezw. ζ. Der Punkt P_0 rückt nach P. Die Punkte B_0 und C_0 würden, falls weitere Änderungen nicht stattfänden, nach B bezw. C gelangen ($\overline{PB} = \overline{P_0B_0}$, $\overline{PC} = \overline{P_0C_0}$). Im allgemeinen wird jedoch auch noch eine Verschiebung von C nach C' im Sinne der y-Achse um $\overline{CC'} = \frac{\partial \eta}{\partial z} dz$ und von B nach B' im Sinne der z-Achse um $\overline{BB'} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy$ eintreten, somit eine Änderung des ursprünglich rechten Winkels BPC um die beiden sehr kleinen Winkel CPC' und BPB' statthaben. Wegen der Kleinheit der Winkel darf gesetzt werden

$$\frac{CC'}{PC} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB}} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \gamma_x,$$

d. i. die Änderung des ursprünglich rechten Winkels an der x-Kante des Parallelepipeds, also nach § 28 die Schiebung oder Gleitung.

Ebenso finden sich für die Änderungen der ursprünglich rechten Winkel an der y- und der z-Kante

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \gamma_y \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \gamma_z.$$

Hiernach bedeuten in Gl. 2 die Koeffizienten der Glieder mit den Kosinusprodukten die Schiebungen an der x-, y- bezw. z-Kante des unendlich kleinen durch dx, dy, dz bestimmten Parallelepipeds.

Damit geht Gl. 2 über in die folgende:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta \cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma \cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha \cos\beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

2. *Darstellung der Formänderung.*

Wir denken uns in dem Körper — vor der Formänderung — eine unendlich kleine Kugel mit P als Mittelpunkt und ds als

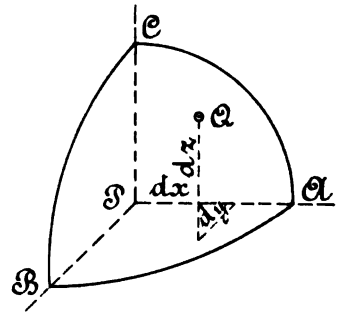


Fig. 3.

Halbmesser, Fig. 3. PA, PB und PC seien die den Achsen der x, y, z parallelen Halbmesser dieser Kugel und dx, dy, dz die

Koordinaten eines beliebigen Punktes Q der Kugelfläche in Beziehung auf PA, PB und PC als Achsen. Dann ist

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1.$$

Durch die Formänderung erfahren die drei Halbmesser die Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z, und die ursprünglich rechten Winkel an den Kanten PA, PB und PC ändern sich um γ_x, γ_y und γ_z, so daß das Achsenkreuz jetzt ein schiefwinkliges geworden ist. Der Punkt Q, auf dieses schiefwinklige System bezogen, wird die Koordinaten

$$dx_1 = dx\,(1 + \varepsilon_x), \qquad dy_1 = dy\,(1 + \varepsilon_y), \qquad dz_1 = dz\,(1 + \varepsilon_z)$$

zeigen, woraus folgt

$$dx = \frac{dx_1}{1 + \varepsilon_x}, \qquad dy = \frac{dy_1}{1 + \varepsilon_y}, \qquad dz = \frac{dz_1}{1 + \varepsilon_z}$$

und damit

$$\left(\frac{dx_1}{(1 + \varepsilon_x)\,ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{(1 + \varepsilon_y)\,ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{(1 + \varepsilon_z)\,ds}\right)^2 = 1, \quad . \quad 4)$$

d. i. die Gleichung eines Ellipsoids in bezug auf die konjugierten Halbmesser $(1 + \varepsilon_x)\,ds$, $(1 + \varepsilon_y)\,ds$, $(1 + \varepsilon_z)\,ds$ als Achsen. Wir erkennen, daß eine unendlich kleine Kugel durch die Formänderung in ein Ellipsoid übergeht. Dasselbe wird als Formänderungsellipsoid bezeichnet.

Um ein möglichst klares Bild über die Bedeutung der unter Ziff. 1 enthaltenen partiellen Differentialquotienten zu erlangen, empfiehlt es sich, die Formänderung eines unendlich kleinen Parallelepipeds darzustellen.

In den Fig. 4 bis 6 ist dies in stark übertriebenem Maße geschehen; die Ableitungen sind eingetragen. So läßt z. B. Fig. 4 deutlich erkennen, wie der ursprünglich in P_0 liegende Eckpunkt entsprechend der Änderung von y und z um η bezw. ζ nach P gerückt ist, wie die Kanten dy und dz ihre Länge um $\frac{\partial \eta}{\partial y}\,dy$ bezw.

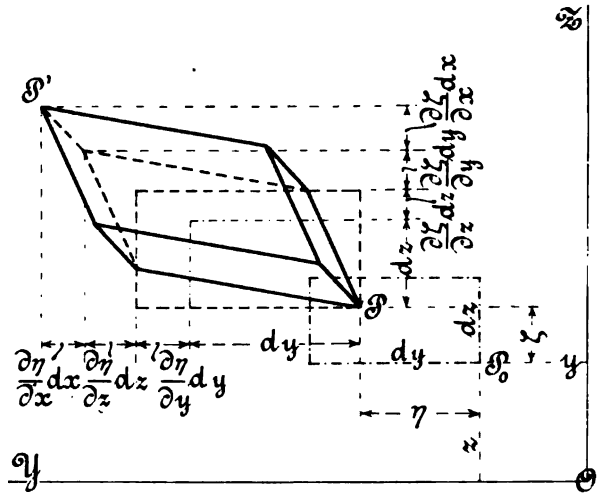


Fig. 4.

$\frac{\partial \zeta}{\partial z} dz$ geändert haben, und welche parallel zur YZ-Ebene gelegenen Größen die Änderung der Kantenwinkel bestimmen.

Fig. 5 und 6 zeigen das Entsprechende in bezug auf die parallel zur ZX- bezw. XY-Ebene liegenden Größen.

Die ursprüngliche, durch die Strecken dx, dy, dz gegebene Diagonale ds des Parallelepipeds ist in die Strecke $\overline{PP'}$ übergegangen und hat dabei die durch die Gleichung 3 bestimmte Dehnung erfahren. Diese Gleichung ergab die Dehnungen der angenommenen Strecke ds als Funktion von den Dehnungen in drei ursprünglich zueinander senkrechten Richtungen und von Änderungen der Winkel dreier ursprünglich sich rechtwinklig schneidender Ebenen. Die Darstellung läßt diesen Zusammenhang zwischen der Längenänderung der Diagonale des Parallelepipeds und den Änderungen der Kantenlängen sowie der Kantenwinkel deutlich erkennen.

3. Sätze über die Formänderung.

Die Größe, welche Gl. 3 für ε liefert, hat in Hinsicht auf α, β und γ die gleiche Form wie die Größe σ, die sich aus Gl. 6, § 65, ergibt; der eine Ausdruck geht in den andern über, wenn ε_x durch

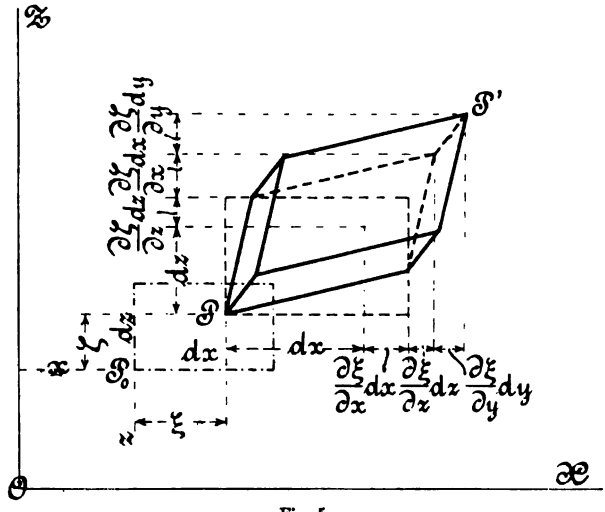


Fig. 5.

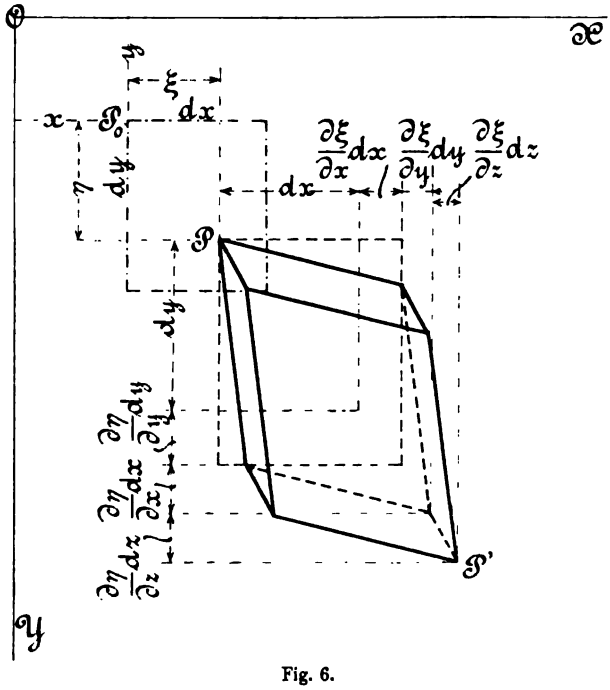


Fig. 6.

σ_x u. s. w. sowie $\frac{1}{2}\gamma_x$ durch τ_x u. s. w. ersetzt wird. Infolgedessen können hier sinngemäß die gleichen Schlüsse gezogen werden.

In jedem Punkte des Körpers gibt es immer drei zueinander senkrechte Ebenen, in denen keine Schiebungen auftreten, also $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0$ sind, so daß also das unendlich kleine Parallelepiped, das von diesen Ebenen begrenzt wird, dessen Kanten also die Richtungen der Durchschnittslinien dieser Ebenen besitzen, rechtwinklig bleibt.

Die Dehnungen nach diesen drei Richtungen heißen die Hauptdehnungen. Unter ihnen befindet sich der größte und der kleinste Wert der Dehnungen, die überhaupt in dem betreffenden Punkte auftreten.

Sie seien mit ε_1, ε_2 und ε_3 bezeichnet.

Die Summe der Dehnungen nach je drei beliebig zueinander senkrechten Richtungen ist konstant, und zwar gleich der Summe der drei Hauptdehnungen:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Diese unveränderliche Summe hat eine besondere Bedeutung. Das Volumen eines unendlich kleinen Parallelepipeds ist vor der Formänderung

$$dx\,dy\,dz,$$

infolge derselben

$$(1 + \varepsilon_x)\,dx\,(1 + \varepsilon_y)\,dy\,(1 + \varepsilon_z)\,dz = \sim (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\,dx\,dy\,dz,$$

sofern die sehr kleinen Größen höherer Ordnung gegenüber denjenigen niederer Ordnung vernachlässigt werden.

Hiermit die Volumenzunahme

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\,dx\,dy\,dz,$$

demnach

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

die Zunahme der Volumeneinheit oder die verhältnismäßige Volumenänderung, welche als Volumenausdehnungskoeffizient bezeichnet werde.

§ 67. Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen.

Die Elastizität des festen Körpers kann in den verschiedenen Punkten desselben nach allen Richtungen gleich groß, oder sie kann in den einzelnen Punkten und nach den verschiedenen Richtungen hin verschieden sein. Das erstere wird dann eintreten, wenn der Körper isotrop, d. h. in jedem seiner Punkte nach allen Richtungen hin gleich beschaffen ist, wie dies z. B. von vorzüglichem Flußstahl bei nicht zu großen Querschnittsabmessungen mit ziemlicher Annäherung erwartet werden darf. Bei Körpern von regelmäßigem Gefüge, die nicht isotrop sind, lassen sich bestimmte Richtungen erkennen, in denen die Elastizität ausgezeichnete Werte aufweist. So z. B. besitzt ein kreiszylindrisch gewalzter Stab aus gutem, sehnigem Schweißeisen in der Walzrichtung eine solche ausgezeichnete Richtung; in allen Richtungen senkrecht zu dieser darf zwar mit Annäherung wieder ein und dieselbe Elastizität angenommen werden, deren Größe wird jedoch von derjenigen in der Walzrichtung verschieden sein. Man spricht in solchen Fällen von einer Elastizitätsachse des Materials. So zeigt Holz drei ausgezeichnete Richtungen: eine im Sinne der Fasern, die anderen zwei tangential und radial in bezug auf die Jahresringe. Man spricht dann von drei Elastizitätsachsen.

Handelt es sich um einen Stoff, welcher in verschiedenen Punkten nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Elastizität zeigt, so muß im allgemeinen die Lage der Hauptdehnungen zu den Hauptspannungen von der Veränderlichkeit der Elastizität abhängen. Diese Abhängigkeit wird im allgemeinen nur für isotropes Material verschwinden; für Material mit einer oder drei Elastizitätsachsen wird dies nur in besonderen Fällen eintreten können[1]).

Im Falle der Isotropie des Materials werden — wie ohne weiteres aus der Anschauung gefolgert werden darf — die Achsen des Spannungsellipsoides mit denjenigen des

[1]) Es läßt sich nachweisen, daß bei Körpern mit drei zueinander senkrechten Elastizitätsachsen die Hauptspannungen nur dann mit den Hauptdehnungen zusammenfallen, wenn die Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtungen mit den Elastizitätsachsen in dem betreffenden Punkte übereinstimmen, bei Körpern mit einer Elastizitätsachse nur dann, wenn mit ihr eine der Hauptspannungs- oder Hauptdehnungsrichtungen zusammenfällt.

Formänderungsellipsoides, also die Richtungen der Hauptspannungen mit denjenigen der Hauptdehnungen zusammenfallen.

Die allgemeinen Untersuchungen der Elastizitätslehre verlangen, damit sie überhaupt durchgeführt werden können, in der Regel, daß isotropes Material vorausgesetzt wird, was auch im folgenden geschehen soll. Die Ergebnisse solcher Betrachtungen gelten deshalb — streng genommen — auch nur für derartige Körper.

1. Die Hauptdehnungen und die Hauptspannungen.

Auf das rechtwinklige Parallelepiped $ABCD$, Fig. 1, welches zu dem Koordinatensystem so gelegen sein möge, daß die Kante AC

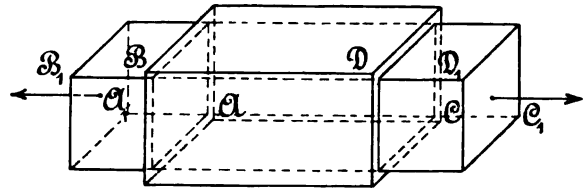


Fig. 1.

parallel zur x-Achse läuft, wirke je über die beiden Endflächen AB und CD, gleichmäßig verteilt angreifend, die gleiche Kraft P_x in Richtung der x-Achse. Hierdurch geht der Körper $ABCD$ in ein anderes Parallelepiped $A_1B_1C_1D_1$ über, und zwar in der Weise, daß die zur Richtung von P_x parallelen Kanten sich verlängern, während die anderen senkrecht dazu stehenden Kanten sich verkürzen. Die durch P_x hervorgerufene Spannung ist eine Hauptspannung σ_1, welche unter der Voraussetzung, daß zwischen Spannungen und Dehnungen Proportionalität besteht, mit der zu ihr gehörigen Dehnung ε_x durch die Gleichung

$$\varepsilon_x = \alpha\, \sigma_1$$

verbunden erscheint, worin α den in § 2 besprochenen Dehnungskoeffizienten bedeutet.

Nach den beiden dazu senkrechten Richtungen der y und z wird die Dehnung als gleich groß betrachtet und durch

$$-\frac{\varepsilon_x}{m}$$

gemessen, worin m das als unveränderlich vorausgesetzte Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung bedeutet (vergl. § 7). Wir haben somit

	die Spannung	die Dehnung
in Richtung der x-Achse	σ_1	$\varepsilon_x = \alpha\,\sigma_1$
- - - y-Achse	0	$-\frac{\varepsilon_x}{m}$
- - - z-Achse	0	$-\frac{\varepsilon_x}{m}$.

Würde das Parallelepiped in Richtung der y-Achse — und zwar nur in dieser — gezogen, so daß die Normalspannung σ_2 und die Dehnung $\varepsilon_y = \alpha\,\sigma_2$ eintritt, so ergäbe sich

	die Spannung	die Dehnung
in Richtung der x-Achse	0	$-\frac{\varepsilon_y}{m}$
- - - y-Achse	σ_2	$\varepsilon_y = \alpha\,\sigma_2$
- - - z-Achse	0	$-\frac{\varepsilon_y}{m}$.

Würde schließlich der Zug nur in Richtung der z-Achse stattfinden, so daß die Normalspannung σ_3 und die Dehnung $\varepsilon_z = \alpha\,\sigma_3$ stattfindet, so fände sich

	die Spannung	die Dehnung
in Richtung der x-Achse	0	$-\frac{\varepsilon_z}{m}$
- - - y-Achse	0	$-\frac{\varepsilon_z}{m}$
- - - z-Achse	σ_3	$\varepsilon_z = \alpha\,\sigma_3$.

Wirken sämtliche Zugkräfte gleichzeitig, so bleiben σ_1, σ_2 und σ_3 Hauptspannungen, die Hauptdehnungen aber sind

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{m}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m},$$

woraus nach Einführung der oben angegebenen Werte für ε_x, ε_y und ε_z

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right) \\ \varepsilon_2 &= \alpha\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}\right) \\ \varepsilon_3 &= \alpha\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}\right) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots 1)$$

Die Addition dieser Gleichungen gibt unter Beachtung von Gl. 5, § 66,

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{m}{m-2}\frac{e}{\alpha} \quad \ldots\ldots 2)$$

Die erste der Gleichungen 1 liefert

$$m\,\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = m \cdot \frac{\varepsilon_1}{\alpha},$$

durch Addition dieser Gleichung mit Gl. 2

$$\sigma_1 (1 + m) = \frac{m}{\alpha}\left(\frac{e}{m-2} + \varepsilon_1\right)$$

$$\sigma_1 = \frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right),$$

nach Einführung von

$$\frac{1}{2}\frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{2(1+m)}{m}\alpha \quad 3)$$

und Ermittlung der Werte für σ_2 und σ_3

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right) = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right)\\
\sigma_2 &= \frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right) = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right)\\
\sigma_3 &= \frac{m}{1+m}\frac{1}{\alpha}\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right) = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

2. *Spannungen und Formänderungen für drei beliebige, zueinander senkrecht stehende Richtungen.*

Die Gleichungen 4, § 65, gelten für das Koordinatensystem, welches sich ergibt, wenn wir die Normalspannungen σ_x, σ_y und σ_z im Punkte P für drei beliebige, senkrecht zueinander stehende Ebenen zu Koordinatenachsen wählen. Nehmen wir statt dessen die drei Hauptspannungen im Punkte P zu Koordinatenachsen, also die Ebenen, in denen die Hauptspannungen wirken, zu Koordinatenebenen, so folgt, da in diesen Ebenen die Schubspannungen τ_x, τ_y und τ_z gleich Null sind, und an Stelle von σ_x, σ_y und σ_z die Größen σ_1, σ_2 und σ_3 treten, aus den Gleichungen 4, § 65,

$$p\cos\lambda = \sigma_1\cos\alpha, \qquad p\cos\mu = \sigma_2\cos\beta, \qquad p\cos\nu = \sigma_3\cos\gamma.$$

Die Normalspannung σ in dem beliebigen durch den Punkt P gelegten Flächenelement bildet mit der resultierenden Spannung p einen Winkel φ, für welchen, da die Richtungswinkel

von	σ	α	β	γ
-	p	λ	μ	ν

sind, die Beziehung

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$

gilt. Somit

$$\sigma = p\cos\varphi = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma$$

und nach Einführung der Werte, welche die Gleichungen 4, § 67, für die Hauptspannungen liefern,

$$\sigma = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma + \frac{e}{m-2}\right).$$

Die Heranziehung der Gleichung 3, § 66, unter Beachtung, daß die Schiebungen wegfallen, wenn für ε_x, ε_y und ε_z die Hauptdehnungen ε_1, ε_2 und ε_3 gesetzt werden, führt zu

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma,$$

folglich

$$\sigma = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon + \frac{e}{m-2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Da diese Gleichung für eine ganz beliebige Richtung gilt, so muß sie auch für drei beliebige zueinander senkrecht stehende Richtungen gelten, somit

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right); & \varepsilon_x &= \alpha\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right); & \varepsilon_y &= \alpha\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right) \\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right); & \varepsilon_z &= \alpha\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

3. *Bedeutung der Größe β.*

Die Einführung des Wertes ε aus Gl. 3, § 66, in Gl. 5 ergibt

$$\sigma = \frac{2}{\beta}\Big[\varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma$$

$$+ \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta + \frac{e}{m-2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\Big],$$

wobei der Faktor von $\frac{e}{m-2}$ am Schlusse mit Rücksicht auf das Spätere an Stelle von 1 gewählt worden ist.

Aus Gl. 6, § 65, folgt unter Beachtung der Gleichungen 6 dieses Paragraphen

$$\sigma = \frac{2}{\beta}\left[\varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \frac{e}{m-2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\right]$$

$$+ 2\,\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\,\tau_y \cos\gamma\cos\alpha + 2\,\tau_z \cos\alpha\cos\beta.$$

Da die beiden für σ gefundenen Werte einander gleich sein müssen, so ergibt sich

$$\frac{2}{\beta}(\gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta)$$

$$= 2\,\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\,\tau_y \cos\gamma\cos\alpha + 2\,\tau_z \cos\alpha\cos\beta$$

$$(\beta\,\tau_x - \gamma_x)\cos\beta\cos\gamma + (\beta\,\tau_y - \gamma_y)\cos\gamma\cos\alpha + (\beta\,\tau_z - \gamma_z)\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Soll diese Gleichung für beliebige Werte von α, β und γ bestehen, so muß

$$\gamma_x = \beta\,\tau_x, \qquad \gamma_y = \beta\,\tau_y, \qquad \gamma_z = \beta\,\tau_z \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

sein, d. h. β ist diejenige Erfahrungszahl, mit welcher die Schubspannungen multipliziert werden müssen, damit die Schiebungen erhalten werden, also der Schubkoeffizient (§ 29). Zwischen ihm und dem Dehnungskoeffizienten α besteht die Beziehung Gl. 3, wie bereits § 31, Ziff. 2, unmittelbar festgestellt worden ist.

§ 68. Allgemeine Aufgabe der Elastizitätslehre und Weg zur Lösung derselben.

Die Aufgabe der Elastizitätslehre begreift in sich:

1. die Feststellung des Zusammenhanges zwischen den äußeren Kräften, welche auf den in Betracht gezogenen Körper wirken, und den durch sie hervorgerufenen Formänderungen,

2. die Feststellung der Abmessungen eines solchen Körpers unter der Bedingung, daß die Formänderung, d. i. die größte Hauptdehnung, in keinem Punkte desselben die höchstens noch für zulässig erachtete Grenze überschreitet, und unter der weiteren

Forderung, daß die Gesamtformänderung des belasteten Körpers innerhalb der Grenze bleibe, welche durch den besonderen Zweck desselben oder durch den Zusammenhang mit anderen Teilen gesteckt ist.

Die Lösung dieser Aufgabe fordert in erster Linie die Ermittlung der Hauptdehnungen in einem beliebigen Punkte P des Körpers; denn unter ihnen befindet sich die größte und kleinste, welche überhaupt in dem Punkte auftritt.

Allgemein würde dabei in folgender Weise vorzugehen sein.

Für den Punkt P sind x, y und z die Koordinaten vor Eintritt der Formänderung, ξ, η und ζ deren Änderungen infolge der letzteren und damit nach den Gleichungen 6 sowie 7, § 67, und den in § 66 unter Ziff. 1 für ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y und γ_z gefundenen Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\beta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{e}{m-2}\right), & \tau_x &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{e}{m-2}\right), & \tau_y &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{e}{m-2}\right), & \tau_z &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\}, \quad 1)$$

worin

$$e = \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \qquad \beta = \frac{2\,(1+m)}{m}\,\alpha.$$

Die aus den Gleichungen 1 folgenden Werte der sechs Spannungskomponenten sind in die Gleichungen 3, § 65, einzusetzen. Hierdurch werden drei simultane partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Größen ξ, η und ζ erhalten.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\beta X &= 0\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y}+\beta Y &= 0\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}+\beta Z &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad 2)$$

Bei der Integration werden im allgemeinen Funktionen einzuführen sein, welche in bezug auf diejenige Veränderliche, nach welcher jeweils integriert wird, konstant sind. Diese Funktionen sind durch die Oberflächenbedingungen, d. h. dadurch bestimmt,

a) daß die Spannungskomponenten

$$p\cos\lambda \qquad p\cos\mu \qquad p\cos\nu$$

in den Gleichungen 4, § 65, für die Punkte der Körperoberfläche (durch die Belastung) gegebene Werte haben,

b) daß ξ, η, ζ für gewisse Punkte von vornherein bekannt sind oder doch ermittelt werden können (Unterstützung des Körpers).

Sind hiernach ξ, η, ζ als Funktionen von x, y, z festgestellt, so ergeben sich

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z, \quad \tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z$$

aus den Gleichungen 1, sodann die Hauptspannungen aus Gleichung 8, § 65, und die Hauptdehnungen mittelst der Gleichungen 1, § 67.

Oder es kann auch so verfahren werden, daß, nachdem ξ, η, ζ als Funktionen von x, y, z vorliegen,

$$\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \varepsilon_z, \quad \gamma_x, \quad \gamma_y, \quad \gamma_z$$

mittelst der in § 66 unter Ziff. 1 für diese Größen gefundenen Beziehungen und aus ihnen die Hauptdehnungen berechnet werden.

In den weitaus meisten Fällen der technischen Anwendung erweist sich die Integration der partiellen Differentialgleichungen als unausführbar, infolgedessen das angedeutete Verfahren, trotz seiner Einfachheit in grundsätzlicher Hinsicht, nur in Ausnahmefällen zum Ziel führt. Unter diesen Verhältnissen geht man zweckmäßigerweise derart vor, daß zunächst einfache Fälle betrachtet und von diesen unter Benützung der gewonnenen Ergebnisse zu zusammengesetzteren fortgeschritten wird. Die hierbei auftretenden Schwierigkeiten sucht man durch geeignete Annahmen zu überwinden. Dieser Weg, der nach heutigem Stand für den Ingenieur — wie bereits bemerkt, mit ganz seltenen Ausnahmen — allein übrig bleibt, ist in den ersten 7 Abschnitten dieses Buches beschritten. Daß es trotzdem für den Ingenieur angezeigt ist, die allgemeinen Beziehungen dieses Abschnittes zu kennen, ergibt sich aus dem im Vorwort zur vierten Auflage Bemerkten.

§ 69. Anwendung auf den Sonderfall der Belastung eines geraden stabförmigen Körpers.

F und F', Fig. 1, seien zwei unendlich nahe gelegene Querschnitte des stabförmigen Körpers. Die auf ihn wirkenden äußeren Kräfte lassen sich für den in Betracht gezogenen Querschnitt F ersetzen: durch eine im Schwerpunkte desselben angreifende Kraft R und durch ein Kräftepaar vom Moment M, entsprechend der Paarachse $\overline{OM}$. Durch Zerlegung senkrecht zum Querschnitt und parallel zu demselben ergeben sich

die Kraftkomponenten R_1 R_2,
die Momentkomponenten M_1 M_2.

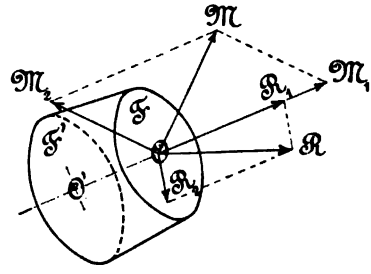


Fig. 1.

Die Kraft R_1 veranlaßt, je nachdem sie ziehend oder drückend wirkt, eine Zu- oder Abnahme der Entfernung der beiden Querschnitte F und F' voneinander, verursacht also positive oder negative Dehnungen, ruft demgemäß Normalspannungen wach: Fall der einfachen Zug- oder Druckelastizität (S. 91, 154).

Das Kräftepaar M_2 mit der Paarachse $\overline{OM_2}$ bewirkt eine Änderung der gegenseitigen Neigung von F zu F', verursacht also positive und negative Dehnungen und ruft damit positive und negative Normalspannungen wach: Fall der einfachen Biegungselastizität (S. 187).

Die Kraft R_2 veranlaßt eine Verschiebung der Flächenelemente von F gegen diejenigen von F', d. h. Schiebungen, und ruft dem-

entsprechend Schubspannungen wach: Fall der einfachen Schubelastizität (S. 357).

Das Kräftepaar M_1 bewirkt Verdrehungen der Flächenelemente in F gegen diejenigen in F', also Schiebungen, und ruft demgemäß Schubspannungen wach: Fall der einfachen Drehungselastizität (S. 302).

Hiernach haben wir als Hauptwirkungen von R und M erkannt: Änderung der Entfernung und der Neigung der beiden Querschnitte, Verschiebung und Verdrehung der beiden Querschnitte gegeneinander. Im allgemeinen wird noch eine Krümmung derselben eintreten, die von der Gesetzmäßigkeit abhängt, nach

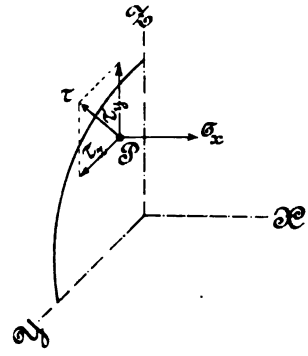


Fig. 2.

welcher sich die Dehnungen und Schiebungen im Querschnitt F von Flächenelement zu Flächenelement und von den Flächenelementen des Querschnitts F zu den gleichgelegenen von F' ändern.

In dem beliebigen Punkte P des Querschnitts F, Fig. 2, erhalten wir als Gesamtwirkung eine resultierende Normalspannung σ_x (in Richtung der Stabachse wirkend, welche wir uns als x-Achse denken wollen) und eine resultierende Schubspannung τ. Letztere zerlegen wir nach Fig. 2 in zwei Komponenten parallel zur y- und zur z-Achse und erhalten somit für den Punkt P die Spannungen

$$\sigma_x, \qquad \tau_y, \qquad \tau_z.$$

Damit geht die Gleichung 8, § 65, für die Hauptspannungen wegen

$$\sigma_y = 0^1), \qquad \sigma_z = 0^1), \qquad \tau_x = 0^1)$$

über in

$$\sigma^3 - \sigma_x \sigma^2 - (\tau_y^2 + \tau_z^2)\,\sigma = 0,$$

woraus die eine Wurzel $\sigma_3 = 0$ folgt (das Spannungsellipsoid wird zur Spannungsellipse), während für die beiden anderen Hauptspannungen mit

$$\tau_y^2 + \tau_z^2 = \tau^2$$

sich ergibt

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\,\tau^2}\right), \quad \ldots \quad 1)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\,\tau^2}\right). \quad \ldots \quad 2)$$

Für die Hauptdehnungen folgt aus den Gleichungen 1, § 67, wegen $\sigma_3 = 0$

$$\varepsilon_1 = \alpha\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{m}\right),$$

$$\varepsilon_2 = \alpha\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1}{m}\right),$$

$$\varepsilon_3 = -\alpha\,\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m},$$

somit

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-1}{2\,m}\,\sigma_x + \frac{m+1}{2\,m}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\,\tau^2}, \quad \ldots \quad 3)^2)$$

---

[1]) Diese 3 Gleichungen führen zur Erfüllung der Gleichung 9, § 65, und damit — wie schon dort bemerkt — zum Übergang des Ellipsoids in eine Ellipse.

[2]) In anderer Weise wurde diese Gleichung bereits in § 48 abgeleitet.

$$\frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}, \quad \ldots \quad 4)^1)$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\alpha} = -\frac{\sigma_x}{m}. \quad \ldots \quad 5)$$

Ist σ_x positiv, einem Zug entsprechend, so wird, da in der Regel die zulässige Anstrengung gegenüber Zug kleiner zu sein pflegt als gegenüber Druck, Gl. 3 maßgebend. Wenn σ_x negativ ist, einem Druck entsprechend, so wird Gl. 4 einen größeren Wert ergeben als Gl. 3; dabei ist aber immerhin zu prüfen, ob die kleinere, aus Gl. 3 folgende Zuginanspruchnahme nicht maßgebend wird.

Im übrigen ist das im zweiten Teil von § 48 Gesagte, betreffend die Einführung des Berichtigungskoeffizienten α_0, zu beachten.

Da die Gleichung 3 bezw. 4 häufige Benutzung erfährt, so erscheint es angezeigt, an dieser Stelle nochmals die Voraussetzungen zusammenzustellen, auf denen sie beruht, und das um so mehr, als diese nicht selten recht ungenügend erfüllt sind, ohne daß daran auch nur gedacht wird.

1. Die allgemeinen Voraussetzungen der Elastizitätslehre:
   a) Isotropie des Materials,
   b) Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen sowie Unveränderlichkeit des Verhältnisses zwischen Längsdehnung und Querzusammenziehung,
   c) Elastizität gegenüber Druck ist die gleiche wie gegenüber Zug,
   d) Formänderungen sind so klein, daß die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird.

2. Die Sondervoraussetzungen:

   a) $\sigma_y = 0$ und $\sigma_z = 0$,

   d. h. Normalspannungen senkrecht zur Stabachse treten nicht auf; (diese Voraussetzung ist z. B. bei einer

---

[1]) S. Fußbemerkung 2, S. 662.

Welle da, wo diese durch die Nabe einer Kurbel, eines Rades u. s. w. in radialer Richtung stark gepreßt wird, nicht erfüllt.)

b) $$\tau_x = 0,$$

d. h. Schubspannungen, welche in Ebenen wirken, die sich in Parallelen zur Stabachse rechtwinklig schneiden, sind nicht vorhanden; (diese Voraussetzung ist beispielsweise bei einer Welle da, wo auf diese durch ein aufgekeiltes Rad oder eine aufgekeilte Kurbel ein bedeutendes Drehmoment übertragen wird, nicht erfüllt.)

Denkt man sich den geraden stabförmigen Körper aus Fasern bestehend, so kommen die Voraussetzungen

$$\sigma_y = 0 \qquad \sigma_z = 0 \qquad \tau_x = 0$$

darauf hinaus, daß diese Fasern weder einen Zug noch einen Druck noch einen Querschub aufeinander äußern, also auch nicht von außen empfangen.

Bedeutung der in den Gleichungen auftretenden Buchstabengröfsen.

A Formänderungsarbeit (§ 41 u. f.), Konstante.

a bei elliptischen Querschnitten die große Halbachse, bei elliptischen Platten die große Achse der Ellipse; die eine Seite eines rechteckigen Querschnitts, einer rechteckigen Platte; Seite des quadratischen Querschnitts, der quadratischen Platte; Abstand (unveränderlicher).

a_0 große Halbachse der inneren Begrenzung eines Ellipsenringes.

a_1, a_2 Abstände.

B Konstante.

b bei elliptischen Querschnitten die kleine Halbachse, bei elliptischen Platten die kleine Achse der Ellipse; die andere Seite eines rechteckigen Querschnitts, einer rechteckigen Platte; Seite eines regelmäßigen Dreiecks oder Sechsecks; Breitenabmessung; Abstand (unveränderlicher).

b_0 kleine Halbachse der inneren Begrenzung eines Ellipsenringes; Breitenabmessung.

C_1, C_2 Integrationskonstanten.

c Strecke.

c_1, c_2 Integrationskonstanten.

d Durchmesser im allgemeinen, bei Hohlstäben der äußere Durchmesser; Strecke.

d_0 innerer Durchmesser eines Hohlzylinders.

d_m mittlerer - - - .

e, e_1, e_2 Abstände, für gerade Stäbe s. § 16, für gekrümmte s. § 54.

e Kreishalbmesser; Basis der natürlichen Logarithmen.

$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (§ 58, Gleichung 2, § 66, § 68).

F Größe einer Fläche.

f Querschnitt.

f_0, f_1 Sonderwerte von f.

f_b Querschnitt an der Bruchstelle des zerrissenen Stabes, dessen ursprünglicher Querschnitt die Größe f besaß.

G Eigengewicht.

H Horizontalkraft.

h Höhe eines Querschnitts, eines Prisma; Stärke einer Platte.

h_0 Höhenabmessung.

i Anzahl der Windungen einer Schraubenfeder.

K_z Zugfestigkeit (§ 3).
K Druckfestigkeit (§ 11).
K_b Biegungsfestigkeit (§ 22).
K_d Drehungsfestigkeit (§ 35).
K_s Schubfestigkeit (§ 15, § 40).
k_z zulässige Anstrengung gegenüber Zug.
k - - - Druck.
k_b - - - Biegung.
k_d - - - Drehung.
k_s - - - Schub.

l Länge des Körpers.
l_b die Länge, welche das ursprünglich l lange Stabstück nach dem Zerreißen besitzt.

M Moment im allgemeinen.
M_A Moment im Punkt A (§ 18, Ziff. 3).
M_b biegendes Moment.
max (M_b) Größtwert von M_b.
M_d drehendes Moment.
M_u Moment, herrührend von den auf den Umfang einer Platte wirkenden Widerlagskräften (§ 61).

$M_\eta = \int_\eta^e 2\,y\,\eta\,d\eta$ statisches Moment (s. § 39).

m Exponent, welcher die Veränderlichkeit der Dehnung zum Ausdruck bringt (§ 4 und § 5, insbesondere Ziff. 3 daselbst); Verhältnis der Längsdehnung zur Querzusammenziehung (§ 7, § 67); Koeffizient (§ 33).
m_1 und m_2 Sonderwerte des Exponenten m (§ 20, Ziff. 4).

n Größe einer Strecke; Koeffizient.

P Zug- oder Druckkraft, Einzelkraft.
P_{max} Bruchbelastung.
P_0 Knickbelastung (§ 24).
p Belastung der Längeneinheit eines auf Biegung beanspruchten Stabes, Spannung im allgemeinen.
p, p_1, p_2, p_a, p_c Pressungen auf die Flächeneinheit (§ 60, § 53), Spannungen (§ 65).
p_i Pressung im Inneren eines Hohlgefäßes, für $p_a = 0$ innerer Überdruck.
p_a - der das Hohlgefäß umschließenden Flüssigkeiten, für $p_i = 0$ äußerer Überdruck.
p_x, p_y, p_z Spannungen in drei zueinander senkrechten Ebenen (§ 65).

Q gleichmäßig über den gebogenen Stab verteilte Last, Einzellast (§ 55, Ziff. 1).
$2Q$ Belastung eines Hohlzylinders auf die Längeneinheit (§ 55, Ziff. 2).

r Kreishalbmesser, Krümmungshalbmesser insbesondere der Mittellinie eines gekrümmten Stabes vor der Formänderung, Trägheitshalbmesser (§ 26).
r_1, r_2 Sonderwerte von r (§ 57, Fig. 4 bis 6).
r_0 Sonderwert von r (§ 60, Fig. 17).
r_i innerer Durchmesser eines Hohlzylinders, einer Hohlkugel.
r_a äußerer - - - - - .

$\mathfrak{S}$ Sicherheitskoeffizient gegenüber Knickung (§ 25).

S Schubkraft.

s Wandstärke, Strecke.

u Umfang des Querschnittes.

V Volumen.

v Abstand.

x beliebige Strecke, Abszisse.

x' Koordinate (§ 65).

y Koordinate, insbesondere Ordinate der elastischen Linie, Querschnittsabmessung.

y' Koordinate, Durchbiegung eines Stabes infolge des biegenden Momentes (§ 18), Zusammendrückung oder Verlängerung einer Schraubenfeder (§ 57).

y'' Durchbiegung eines Stabes infolge der Schubkraft (§ 52, Ziff. 2b).

W, W_a und W_b Widerlagskräfte (§ 61).

X, Y, Z Komponenten von Massenkräften (§ 65).

$Z = \int x\,y\,df$ (§ 21, Gleichung 2).

z Koordinate; Abstand, Querschnittsabmessung.

z' Koordinate; Durchbiegung plattenförmiger Körper.

z_0' Sonderwert von z'.

z_0 Schwerpunktsabstand (S. 250).

α Dehnungskoeffizient (§ 2, reziproker Wert des Elastizitätsmodul), Dehnung für die Spannung 1 (§ 4 und § 5); Winkel; Konstante.

α_1 und α_2 Sonderwerte der Dehnung für die Spannung 1 (§ 20, Ziff. 4).

α_0 Anstrengungsverhältnis (§ 48).

β Schubkoeffizient (§ 29, reziproker Wert des Schubelastizitätsmodul, § 67); Winkel, insbesondere der elastischen Linie mit der ursprünglichen Stabachse (§ 18); Konstante.

$\beta_0 = \frac{k_b}{k_z}$ (§ 45, Ziff. 1).

γ Schiebung, Winkeländerung (§ 28), Gewicht der Volumeneinheit, Winkel.

γ_x, γ_y, γ_z Winkeländerung (Schiebung) an der x-, y- bezw. z-Kante (§ 66, § 67).

γ_{max} Größtwert der Schiebung γ.

ε verhältnismäßige Dehnung (§ 2).

ε' Sonderwerte von ε.

ε_q Querdehnung (§ 7).

ε_0 Dehnung der Mittellinie (§ 54).

ε_1, ε_2, ε_3 die Dehnungen in den drei Hauptrichtungen (§ 58), die Hauptdehnungen (§ 66).

ε_x, ε_y, ε_z Dehnungen in Richtung der x-Achse bezw. der y- und z-Achse.

ζ Änderung von z (§ 58, § 66).

η Koordinate; Abstand, insbesondere eines Flächenelementes von der einen Hauptachse des Querschnitts, Änderung von y (§ 66).

Θ Trägheitsmoment eines Querschnitts im allgemeinen, meist jedoch in bezug auf die eine Hauptachse.

Θ' polares Trägheitsmoment eines Querschnitts.

Θ_1, Θ_2, Θ_x, Θ_y Trägheitsmomente in bezug auf besonders bezeichnete Achsen.

ϑ verhältnismäßiger Drehungswinkel (§ 33, § 43).

ι Koeffizient (§ 42).

$\varkappa$ Zerknickungskoeffizient (§ 26).

$\varkappa = -\frac{1}{f}\int \frac{\eta}{r+\eta} df$ (§ 54).

λ Winkel (§ 65).

λ, λ', λ'' Längenänderungen eines Stabes (§ 1, § 2, § 4, § 5, § 41).

μ Koeffizient (§ 46) insbesondere Berichtigungskoeffizient (§ 60, Ziff. 4, § 61 u. f.).

μ_0 Koeffizient (§ 22, S. 250).

ν Winkel.

ξ Koordinate, Änderung von x (§ 66).

$\pi = 3{,}14159$.

ϱ Krümmungshalbmesser, insbesondere der elastischen Linie; Abstand eines beliebigen Querschnittselementes von der Drehungsachse (§ 32, Fig. 4, Gleichung 1).

ϱ_a, ϱ_b Sonderwerte von ϱ (§ 61).

σ Normalspannung (§ 1, § 29, erster Absatz).

σ_{max} Größtwert von σ.

σ_1, σ_2 Sonderwerte von σ.

σ_x, σ_y, σ_z Normalspannungen in Richtung der x-Achse, bezw. y- und z-Achse.

σ_a, σ_b größte Normalspannung im Streifen von der Länge a bezw. b (§ 61).

σ_d, σ_z Druck- bezw. Zugspannung (§ 20, Ziff. 4).

τ Schubspannung (§ 29).

τ_{max} Größtwert von τ bei Schub (§ 38, § 39).

τ_1 Sonderwert von τ.

τ_x τ_y τ_z Schubspannungen senkrecht zur Richtung der x-Achse, der y- bezw. z-Achse (§ 65).

τ' Schubspannung an näher bestimmter Stelle.

τ'_y, τ'_z die Werte von τ_y und τ_z an einer solchen Stelle.

τ_s, τ_d Schubspannungen, unterschieden je nachdem sie von der Schubkraft oder vom drehenden Moment hervorgerufen werden.

τ'_{max} Schubspannung in den Endpunkten der kleinen Halbachse eines elliptischen Querschnitts.

τ'_a Schubspannung in den Mitten der langen Seiten eines rechteckigen Querschnitts.

τ'_b Schubspannung in den Mitten der kurzen Seiten eines rechteckigen Querschnitts.

φ Dehnung des zerrissenen Stabes in Prozenten (§ 8); Winkel (von veränderlicher Größe), Koeffizient (§ 34).

ψ Querschnittsverminderung des zerrissenen Stabes in Prozenten (§ 8); Winkel, Koeffizient (§ 35, Ziff. 2, § 60, Ziff. 4).

ψ_0 Koeffizient (§ 57).

ω Befestigungskoeffizient (§ 24, § 25), Winkel.
Verhältnismäßige Änderung des Querschnittswinkels (§ 54).

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand.

Von **C. Bach,**

K. Württ. Baudirektor, Prof. d. Masch.-Ingenieurwesens a. d. K. Techn. Hochschule Stuttgart.

Mit 5 lithogaphierten Tafeln. — Preis M. 3,—.

Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten.

Von **C. Bach,**

K. Württ. Baudirektor, Prof. d. Masch.-Ingenieurwesens a. d. K. Techn. Hochschule Stuttgart.

Mit Textfiguren. — Preis M. 2,60.

Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen.

Von **C. Bach,**

K. Württ. Baudirektor, Prof. d. Masch.-Ingenieurwesens a. d. K. Techn. Hochschule Stuttgart.

Heft 1. Wasserkammerplatten von Wasserröhrenkesseln. *Mit 77 in den gedruckten Text Abbildungen.* Vergriffen.

Heft 2. Die Berechnung flacher, durch Anker oder Stehbolzen unterstützter Kesselwandungen und die Ergebnisse der neuesten hierauf bezüglichen Versuche. — Die auf der kaiserlichen Werft in Danzig von 1887 bis 1892 ausgeführten Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Flammrohren. *Mit 56 in den Text gedruckten Abbildungen und 2 Tafeln.* Preis M. 3,—.

Heft 3. Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung flacher Böden. *Mit 67 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln.* Preis M. 3,—.

Heft 4. Versuche mit Flanschenverbindungen an Rohrleitungen für hohen Dampfdruck und im Zusammenhange hiermit Untersuchungen über das Arbeitsvermögen von Gußeisen, Flußeisen, Bronze- und Stahlguß. *Mit 50 Abbildungen im Text.* Preis M. 2,—.

Heft 5. Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung gewölbter Böden. *Mit 81 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln.* Preis M. 3,—.

Heft 6. Die Widerstandsfähigkeit kugelförmiger Wandungen gegenüber äußerem Überdruck. *Mit 36 Abbildungen im Text.* Preis M. 2,—.

Technische Mechanik.

Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure.

Von **Ed. Autenrieth,**

Oberbaurat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Stuttgart.

Mit 327 Textfiguren. — Preis M. 12,—; in Leinwand gebunden M. 13,20.

Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken.

Eine systematische Darstellung der verschiedenen Arten, ihrer Größe und ihres Einflusses auf die konstruktive Gestaltung der Brücken.

Von **Fr. Engesser,**

Baurat und Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

I. Die Zusatzkräfte. Mit 58 Textfiguren. — Preis M. 3,—.

II. Die Nebenspannungen. Mit 137 Textfiguren. — Preis M. 7,—.

Theorie und Berechnung der Bogenfachträger ohne Scheitelgelenk.

Mit verschiedenen der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen.

Von **Fr. Engesser,**

Baurat und Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

Mit 2 lithographierten Tafeln. — Preis M. 2,—.

Handbuch der Materialienkunde für den Maschinenbau.

Von **A. Martens,**

Professor und Direktor des Kgl. Material-Prüfungsamtes zu Groß-Lichterfelde-West.

Erster Teil:

Materialprüfungswesen, Probiermaschinen und Meßinstrumente.

Mit 514 Textfiguren und 20 Tafeln. — In Leinwand gebunden Preis M. 40,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Hilfsbuch für den Maschinenbau.

Für Maschinentechniker sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten.

Von **Fr. Freytag,**

Professor, Lehrer an den technischen Staatslehranstalten in Chemnitz.

Mit 867 Textfiguren und 6 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 10,—; in Leder gebunden M. 12,—.

Die Werkzeugmaschinen.

Von **Hermann Fischer,**

Geh. Regierungsrat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Hannover.

I. Die Metallbearbeitungsmaschinen.
Zweite, verm. u. verbess. Auflage.
Mit 1545 Textfiguren und 50 lithogr. Tafeln.
In zwei Leinwandbde. geb. Preis M. 45,—.

II. Die Holzbearbeitungsmaschinen.
Mit 421 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 15,—.

Die Hebezeuge.

Theorie und Kritik ausgeführter Konstruktionen mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Anlagen.

Ein Handbuch für Ingenieure, Techniker und Studierende.

Von **Ad. Ernst,**

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der Kgl. Techn. Hochschule zu Stuttgart.

Vierte, neubearbeitete Auflage. — Drei Bände.

Mit 1486 Textfiguren und 97 lithographierten Tafeln.

In 3 Leinwandbänden gebunden Preis M. 60,—.

Die Gebläse.

Bau und Berechnung der Maschinen zur Bewegung, Verdichtung und Verdünnung der Luft.

Von **Albrecht von Ihering,**

Kaiserl. Reg.-Rat, Dozent an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Mit 522 Textfiguren und 11 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Das Königliche Materialprüfungsamt

der Technischen Hochschule Berlin

auf dem Gelände der Domäne Dahlem beim Bahnhof Groß-Lichterfelde-West.

Denkschrift zur Eröffnung

bearbeitet von

dem Direktor **A. Martens** und dem Bauleitenden **M. Guth.**

Mit zahlreichen Textfiguren und 6 Tafeln. — Preis M. 10,—.

Neuere Turbinenanlagen.

Auf Veranlassung von Professor E. Reichel und unter Benutzung seines Berichtes „Der Turbinenbau auf der Weltausstellung in Paris 1900“

bearbeitet von **Wilhelm Wagenbach,**

Konstruktionsingenieur an der Königl. Technischen Hochschule Berlin.

Mit 48 Textfiguren und 54 Tafeln. — In Leinw. gebunden Preis M. 15,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Die Dampfturbinen

mit einem Anhang
über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine.
Von **Dr. A. Stodola,**
Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich.
Dritte, bedeutend erweiterte Auflage.
Mit 434 Figuren und 3 lithographierten Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Die automatische Regulierung der Turbinen.

Von Dr.-Ing. **Walther Bauersfeld,**
Assistenten an der Königlichen Technischen Hochschule Berlin.
Mit 126 Textfiguren.
Preis M. 6,—.

Entwerfen und Berechnen der Dampfmaschinen.

Ein Lehr- und Handbuch für Studierende und Konstrukteure.
Von **Heinrich Dubbel,**
Ingenieur.
Mit 388 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 10,—.

Theorie und Berechnung der Heifsdampfmaschinen.

Mit einem Anhange über die
Zweizylinder-Kondensations-Maschinen mit hohem Dampfdruck.
Von **Josef Hrabák,**
k. u. k. Hofrat, emer. Professor an der k. k. Bergakademie zu Pribram.
In Leinwand gebunden Preis M. 7,—.

Die Steuerungen der Dampfmaschinen.

Von **Karl Leist,**
Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin.
Zweite, sehr vermehrte und umgearbeitete Auflage,
zugleich als fünfte Auflage des gleichnamigen Werkes von Emil Blaha.
Mit 553 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Die Dampfkessel.

Ein Lehr- und Handbuch für Studierende Technischer Hochschulen, Schüler Höherer Maschinenbauschulen und Techniken, sowie für Ingenieure und Techniker.
Von **F. Tetzner,**
Professor, Oberlehrer an den Königl. vereinigten Maschinenbauschulen zu Dortmund.
Zweite, verbesserte Auflage.
Mit 134 Textfiguren und 38 lithographierten Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 8,—.

Generator-, Kraftgas- und Dampfkessel-Betrieb

in bezug auf Wärmeerzeugung und Wärmeverwendung.
Eine Darstellung der Vorgänge, der Untersuchungs- und Kontrollmethoden bei der Umformung von Brennstoffen für den Generator-, Kraftgas- und Dampfkessel-Betrieb.
Von **Paul Fuchs,**
Ingenieur.
Zweite Auflage von „Die Kontrolle des Dampfkesselbetriebes".
Mit 42 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 5,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren.

Handbuch für Konstrukteure und Erbauer von Gas- und Ölkraftmaschinen.

Von **Hugo Güldner,**

Oberingenieur, Direktor der Güldner Motoren-Gesellschaft in München.

Zweite, bedeutend erweiterte Auflage.

Mit 800 Textfiguren und 30 Konstruktionstafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 24,—.

Zwangläufige Regelung der Verbrennung bei Verbrennungs-Maschinen.

Von Dipl.-Ing. **Carl Weidmann,**

Assistent an der Technischen Hochschule zu Aachen.

Mit 35 Textfiguren und 5 Tafeln.

Preis M. 4,—.

Die Regelung der Kraftmaschinen.

Berechnung und Konstruktion

der Schwungräder, des Massenausgleichs und der Kraftmaschinenregler

in elementarer Behandlung.

Von Professor **Max Tolle.**

Mit 372 Textfiguren und 9 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 14,—.

Fliehkraft und Beharrungsregler.

Versuch einer einfachen Darstellung der Regulierungsfrage im Tolleschen Diagramm.

Von Dr.-Ing. **Fritz Thümmler.**

Mit 21 Textfiguren und 6 lithographierten Tafeln.

Preis M. 4,—.

Technische Messungen,

insbesondere bei Maschinen-Untersuchungen.

Zum Gebrauch in Maschinenlaboratorien und für die Praxis.

Von **Anton Gramberg,**

Dipl.-Ingenieur, Dozent an der Technischen Hochschule Danzig.

Mit 181 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 6,—.

Technische Untersuchungsmethoden zur Betriebskontrolle,

insbesondere zur Kontrolle des Dampfbetriebes.

Zugleich ein Leitfaden für die

Arbeiten in den Maschinenbaulaboratorien technischer Lehranstalten.

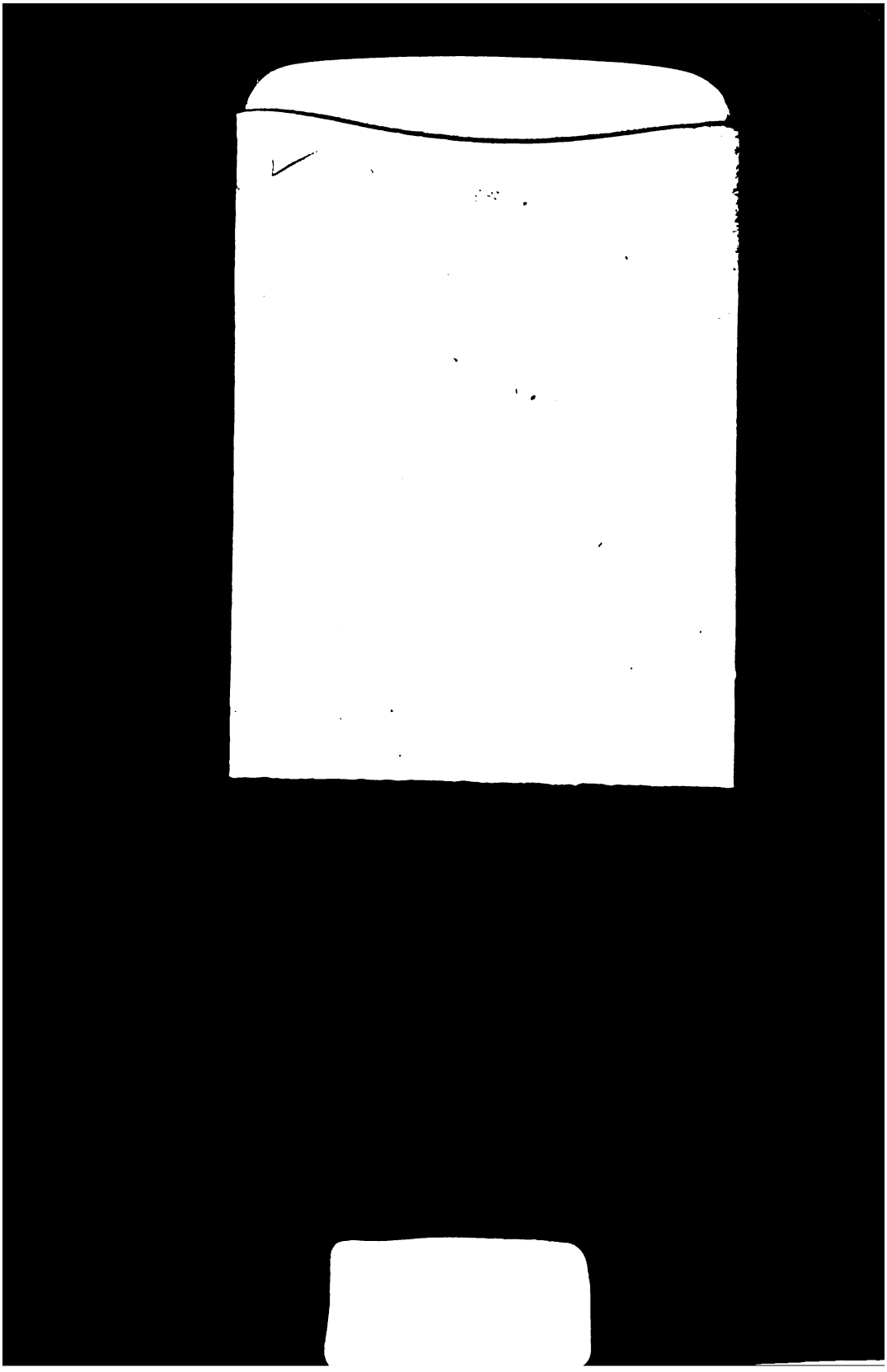
Von **Julius Brand,**

Ingenieur, Oberlehrer der Königl. vereinigten Maschinenbauschulen zu Elberfeld.

Mit 168 Textfiguren, 2 Tafeln und mehreren Tabellen.

In Leinwand gebunden Preis M. 6,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

89080442239

b89080442239a